

用伽柏小波作干涉波前重建

姚 卫 李振华 贺安之

(南京理工大学应用物理系, 南京 210094)

摘 要 在分析傅里叶相位展开法中存在的一阶频谱定位误差的基础上, 尤其针对实际工作中非严格均匀参考条纹干涉图的相位展开问题, 提出基于伽柏(Gabor)小波的局域匹配滤波方法, 构造多通道伽柏滤波器, 得到在 Mallat 极大模意义下的最佳匹配相位。同时也较好地实现了噪声及遮挡物的去除。通过对模拟的和真实的干涉图的波前重建, 证实本方法在处理非平行等间距参考条纹图象及畸变严重的干涉图时, 优于通常的傅里叶相位展开法。

关键词 伽柏变换, 相位展开, 干涉图分析, 波前重建。

1 引 言

平面光波经相位场扰动后会发​​生扭曲和变形, 干涉图记录了经过调制的这种变形波前的信息。在用干涉法进行相位物体检测时, 通常需要调整测试光路, 力图得到平行等间距参考条纹的有限宽干涉图作为检测的基准。也就是期望在整个视场中接收单一调制的信号。在记录干涉图为单一调制的前提下, Takeda、Kreis^[2]等人于 80 年代提出了干涉图的傅里叶分析和相位提取, 结合各种相位展开算法, 获得了较好的由单张干涉图重建干涉波前的效果。然而, 由于实际测试条件的限制, 要得到严格平行等间距的参考条纹是很困难的, 而且有限视场造成的边界效应也使得单一调制的假设不能实现。因此, 通常对一幅未经干扰的基准等厚干涉图作傅里叶变换并不能获得严格的零频和 ± 1 级频谱处的 δ 函数, 而是有一定不规则展宽的频谱分布。在用傅里叶方法实现的过程中, 认为展宽的 $+1$ 级频谱的加权重心是整幅干涉图的单一调制频率 f 。于是, 在图象局域调制频率 $f(x, y)$ 与 f 相差相对较大时, 用傅里叶方法解调的干涉相位必然存在很大的误差。

为了获得局域的调制频率, 很自然地想到兼有空间、频域定位特性的小波变换。伽柏函数是唯一使得空频不确定度同时达到最小的小波基函数^[3, 4]。这一优良特性使之成为解决定域分析调制基频而解调相位信息的首选。

本文的第 2 部分将讨论伽柏小波变换的性质和这些性质在干涉图分析中的应用; 第 3 部分介绍对于干涉图构造伽柏小波匹配滤波器的实现方法; 第 4 部分将用模拟的非单一调制(调制频率渐变)的干涉图分析傅里叶方法产生误差的原因, 并对伽柏变换与傅里叶变换的结果进行比较。最后给出一个双峰温度场干涉测试中记录的真实干涉图用多通道伽柏匹配滤波器进行波前重建的结果。

2 干涉图的伽柏基小波变换

理想的单一调制的干涉图的灰度分布可表示为^[1]

$$p(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f x + \epsilon(x, y)] \tag{1}$$

其中 $a(x, y)$ 表示背景光强, $b(x, y)$ 表示条纹对比度, f 是参考条纹频率(周/幅), $\epsilon(x, y)$ 是一个低频缓变的窄带信号, 表征相位物体对参考场的扰动。本工作的目标是从调制信号 $p(x, y)$ 中解调出 $\epsilon(x, y)$ 。

伽柏小波基函数能够在空间一频域不确定度最小的意义下实现对干涉图的空频分解, 即伽柏变换。把对干涉图 $p(x, y)$ 的二维单通道伽柏变换记为

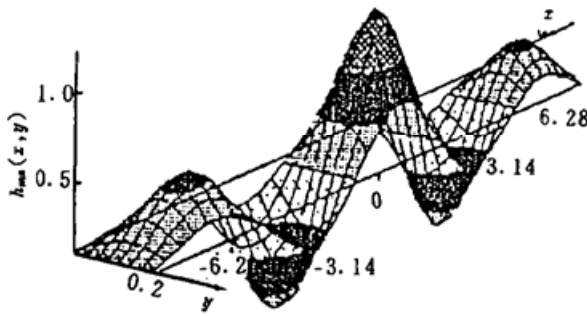
$$\mathcal{G}_{mn}\{p(x, y)\} = h_{mn}(x, y) \odot p(x, y) \tag{2}$$

其中^[5]

$$h_{mn}(x, y) = g(x, y) \exp [2\pi j(U_m x + V_n y)] \tag{3}$$

$$g(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi\lambda\sigma^2}\right) \exp \left[-\frac{(x/\lambda)^2 + y^2}{2\sigma^2}\right] \tag{4}$$

\odot 表示卷积, $h_{mn}(x, y)$ 即是伽柏小波函数, σ 为尺度系数, 如图 1 所示。它可以看作是幅值呈高斯线型的等相面为平面的平面光栅, 即一个中心频率调谐为 (U_m, V_n) 的带通滤波器, 它的



频率响应为

$$H(u, v) = \exp \{-2\pi^2\sigma^2[(u - U_m)^2\lambda^2 + (v - V_n)^2]\} \tag{5}$$

对于如 (1) 式的干涉图, 可选定 $(U_m, V_n) = (f, 0)$, 把 $h_{mn}(x, y)$ 分成实部和虚部:

$$\left. \begin{aligned} h_r(x, y) &= g(x, y) \cos (2\pi f x) \\ h_i(x, y) &= g(x, y) \sin (2\pi f x) \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

用中心频率为 $(f, 0)$ 的通道伽柏滤波器对图像滤波, 即 $h_r(x, y)$ 、 $h_i(x, y)$ 分别作用于 $p(x, y)$ 得到

该通道的滤波输出 $\mathcal{G}_{(f, 0)}$:

$$\mathcal{G}_{(f, 0)}\{p(x, y)\} = h_r(x, y) \odot p(x, y) + j h_i(x, y) \odot p(x, y) = k_r(x, y) + j k_i(x, y) \tag{7}$$

进一步把 $p(x, y)$ 写成

$$p(x, y) = a(x, y) + 2[c(x, y) \cos (2\pi f x) + s(x, y) \sin (2\pi f x)] \tag{8}$$

$$\text{其中} \quad \sqrt{c^2(x, y) + s^2(x, y)} = \frac{1}{2} b(x, y) \tag{9}$$

$$- \arctan [s(x, y)/c(x, y)] = \epsilon(x, y) \tag{10}$$

则实部、虚部分别对应相等, 并应用卷积的运算性质, 可知

$$\begin{aligned} k_r(x, y) &= h_r(x, y) \odot p(x, y) = \\ &h_r(x, y) \odot a(x, y) + [g(x, y) \odot c(x, y)] \cos (2\pi f x) + \\ &[g(x, y) \odot s(x, y)] \sin (2\pi f x) \end{aligned} \tag{11}$$

及

$$\begin{aligned} k_i(x, y) &= h_i(x, y) \odot p(x, y) = \\ &h_i(x, y) \odot a(x, y) + [g(x, y) \odot c(x, y)] \sin (2\pi f x) - \\ &[g(x, y) \odot s(x, y)] \cos (2\pi f x) \end{aligned} \tag{12}$$

注意到, 背景光强 $a(x, y)$ 是零频附近的窄带信号, (9)、(10) 两式中的第一项远小于后两项

[亦可先对 $p(x, y)$ 作去直流分量处理, 消除第一项], 故伽柏变换后的幅值为

$$m(x, y) = \sqrt{k_r^2(x, y) + k_i^2(x, y)} \approx \sqrt{[g(x, y) \odot c(x, y)]^2 + [g(x, y) \odot s(x, y)]^2} \quad (13)$$

相位为

$$\Psi(x, y) = \arctan \left[\frac{k_i(x, y)}{k_r(x, y)} \right] = 2\pi f x - \arctan \left[\frac{g(x, y) \odot s(x, y)}{g(x, y) \odot c(x, y)} \right] \quad (14)$$

根据 $\epsilon(x, y)$ 的低频窄带特性, 若选择 $g(x, y)$ 的空间尺度足够小, 即 $g(x, y)$ 有足够的带宽包含 $\epsilon(x, y)$, 可以认为 $\epsilon(x, y)$ [或 $c(x, y)$, $s(x, y)$] 在 $g(x, y)$ 的空间尺度内是常数, 则

$$\epsilon(x, y) = -\arctan \left[\frac{s(x, y)}{c(x, y)} \right] \approx -\arctan \left[\frac{g(x, y) \odot s(x, y)}{g(x, y) \odot c(x, y)} \right] = \arctan \left[\frac{k_i(x, y)}{k_r(x, y)} \right] - 2\pi f x \quad (15)$$

至此, 可以说, 对于去除直流项的干涉图作伽柏基小波变换后得到了经高斯平滑去噪声的幅值包络 $m(x, y)$ 和弱扰动相位的主值 $\Psi(x, y) - 2\pi f x$ 。

3 多通道伽柏匹配滤波器

上一节的讨论仍然是在整幅图像为严格平行等间距参考条纹的假设下进行的。然而, 实际得到的干涉图并不是如(1)式描述的单一调制无限周期的二维信号。由于噪声、遮挡物、有限视场等原因, 调制频率 f 是位置的函数 $f(x, y)$ 。当然, 除了视场及遮挡物边缘处, $f(x, y)$ 也是一个连续的窄带信号, 这样就有充足的理由认为, 在足够小的某个区域 S_{mn} 里, $f(x, y)$ 可以取常数 (U_m, V_n) 。也就是说, 在 S_{mn} 中的 $p(x, y)$ 的 +1 级频谱里能够准确地解调出 S_{mn} 中的干涉相位信息 $\epsilon_{mn}(x, y)$ 。

因为 $f(x, y)$ 的窄带性, 可以以足够高的分辨率把 $f(x, y)$ 在其中心 $(f, 0)$ 的邻域内量化为若干量级 (U_m, V_n) , 则干涉图 $p(x, y)$ 可写成

$$p(x, y) = a(x, y) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{mn}(x, y) Z_{mn}(x, y) + p'(x, y) \quad (16)$$

其中

$$p_{mn}(x, y) = 2\{c_{mn}(x, y) \cos [2\pi(U_m x_m + V_n x_n)] + s_{mn}(x, y) \sin [2\pi(U_m x_m + V_n y_n)]\}$$

$$Z_{mn}(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in S_{mn} \\ 0 & (x, y) \notin S_{mn} \end{cases} \quad \text{是 } S_{mn} \text{ 的指标集。} \quad (17)$$

$p'(x, y)$ 是量化后的误差, 当量化间隔足够小时 $p'(x, y) \rightarrow 0$ 。

给定一组伽柏小波基函数 $h_{mn}(x, y) = g(x, y) \exp [2\pi j(U_m x + V_n y)]$, 选择 σ, λ 使 $g(x, y)$ 有足够好的限带特性, 则当 $k \neq m$ 或 $l \neq n$ 时必存在

$$|h_{mn}(x, y) \odot p_{kl}(x, y)| \ll |h_{mn}(x, y) \odot p_{mn}(x, y)| \quad (18)$$

所以, 这一组伽柏函数就构成了一组 Mallat 极大模意义下的多通道匹配滤波器。对图像中的每一点 (x, y) , 选择各通道中输出幅值最大的通道频率中心为其调制频率 $f(x, y)$, 即

$$f(x, y) = (U_m, V_n),$$

$$\text{如果 } (m, n) = \arg \left\{ \max_{\substack{l \leq i \leq M \\ l \leq j \leq N}} [m_{ij}(x, y)] \right\} \quad (19)$$

对干涉幅值和相位包络, (13)、(15)式成为

$$m(x, y) = \sqrt{k_{r_{mn}}^2(x, y) + k_{i_{mn}}^2(x, y)} \approx$$

$$\sqrt{[g(x, y) \odot_{Cmn}(x, y)]^2 + [g(x, y) \odot_{Smn}(x, y)]^2} \quad (20)$$

$$\epsilon(x, y) \approx \arctan \left[\frac{k_{imn}(x, y)}{k_{rmn}(x, y)} \right] - 2\pi U_m x \quad (21)$$

通常 $m(x, y)$ 不够光滑, 这是因为的带宽有时大于, 频率成分遗漏所致。故在比较各滤波器的输出幅值之前还需要对幅值 $m(x, y)$ 作一次高斯滤波以消除频率成分遗漏的影响, 即 (19) 式应写成

$$f(x, y) = (U_m, V_n),$$

如果 $(m, n) = \arg \left[\max_{\substack{l \leq i \leq M \\ l \leq j \leq N}} [g(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}) \odot m_{ij}(x, y)] \right], \quad \gamma > 1 \quad (22)$

γ 表示对形如(4) 式的高斯调制函数的通常作进一步压缩的压缩系数, 一般 γ 取 1.5 左右即可。

图 2 给出多通道伽柏匹配滤波器的实现原理框图。

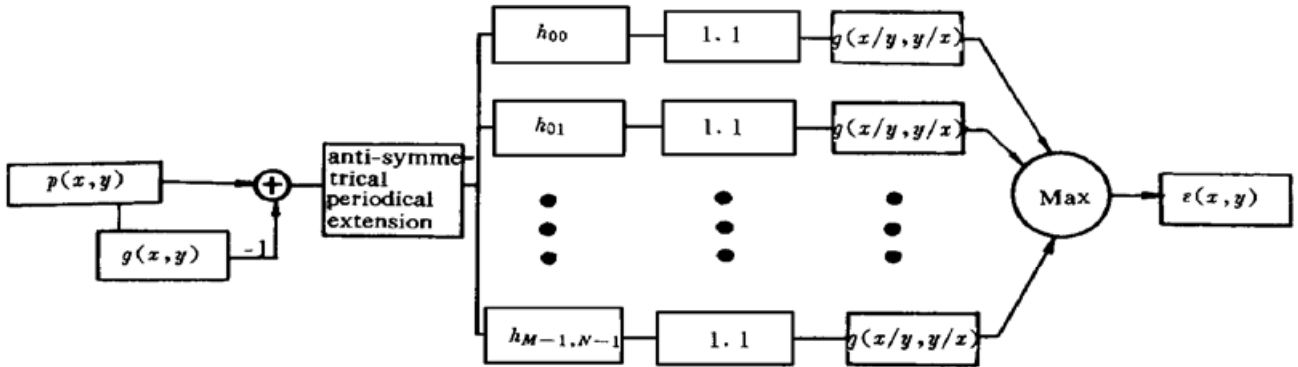


Fig. 2 Block-diagram of Gabor multi-channel matching filtering

4 实验结果及分析

图 3(a) 是一个模拟的参考条纹频率渐变的干涉图。图幅为 64×64 像素, 参考频率从 6 周/幅线性增加至 8 周/幅。各条纹均呈同一高斯线型, 即干涉波前应具有相应于参考频率的线性增加。图 3(b) 是图 3(a) 的傅里叶频谱, 显然其 +1 级谱不是 δ 函数。采用加权重心近似的方法必然造成会很大的误差。对其作单一调制的干涉图的近似是不合理的。图 4(a) 是用傅里叶方法解调出的干涉相位主值。图 4(b) 是由图 4(a) 作相位展开后重建的干涉波前。可见, 重建的结果不能反映波前沿 x 方向增加的变化趋势。



Fig. 3 (a) A simulated interferogram with gradually increasing reference frequency, (b) Fourier frequency spectrum of (a)

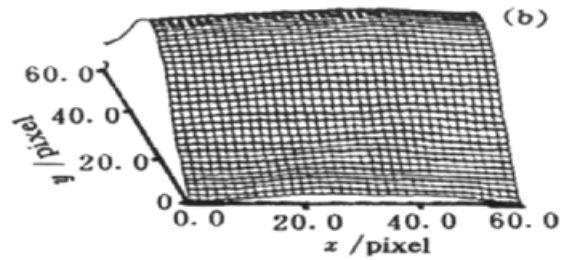
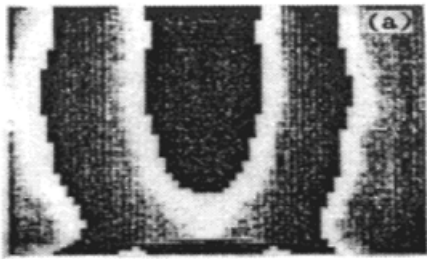


Fig. 4 (a) Wrapped phase map demodulated by Fourier transform method from Fig. 3(a), (b) Wave-front retrieved. It is clear that the result cannot represent increasing trend along x direction

为简单说明问题, 构造一个通频带分布如图 5 的多通道伽柏小波匹配滤波器, 其中 f 为 +1 级傅里叶频谱的加权重心。按图 2 所示的框图进行匹配滤波。

图 6(a)、(b) 是匹配滤波得到的干涉图图 3(a) 沿 x 、 y 方向的调制频率分布。图 6(c) 是由伽柏小波提取的干涉相位主值。图 6(d) 给出按图 2 框图重建的干涉波前。重建波前有不平滑的地方是由于滤波器数量相对较少, 而 $f(x, y)$ 带宽相对较宽的缘故。尽管如此, 它已经能够反映波前沿 x 方向由线性增加的趋势。

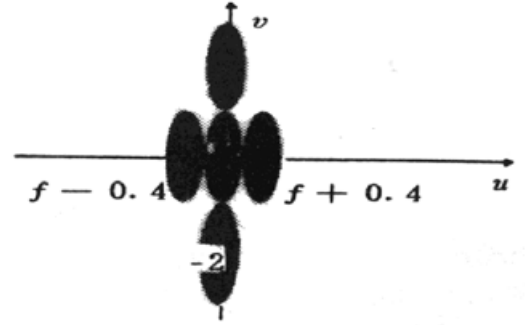


Fig. 5 Configuration of a Gabor multi-channel matching filter set

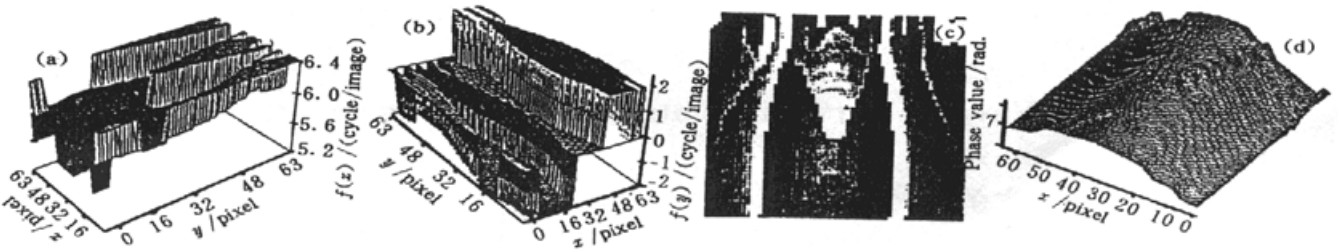


Fig. 6 (a) Distribution of modulation frequency along x direction (U), (b) Distribution of modulation frequency along y direction (V), (c) Wrapped phase map demodulated by Gabor matching filtering method from Fig. 3(a), (d) Wave-front retrieved from (c). It is clear that the result can represent increasing trend along x direction even if it is not smooth enough because of insufficient number of filters

图 7(a) 是一个真实双峰温度场干涉测试中记录的一幅干涉图。图 7(b) 是傅里叶方法解调的干涉相位主值。可见, 傅里叶方法本身对遮挡物和边界不敏感, 它们的影响被传播到解



Fig. 7 (a) An interferogram of a temperature field produced by two heaters, (b) Wrapped phase map demodulated by Fourier transform method from Fig. 7(a), (c) Wrapped phase map demodulated by Gabor transform method from Fig. 7(a), (d) Wave-front retrieved from (c)

调相位主值的各处, 不可避免地影响波前恢复的准确性。图 7(c) 给出由伽柏小波分解法解调的干涉相位主值, 它本身具有对边界和遮挡物的敏感性, 能够准确定位局域参考频率。从图 7(d) 给出的波前恢复结果可以看到, 伽柏方法很好地提取了波前变化的细节。

结 论 理论分析和实验都表明, 用伽柏小波构造的多通道相位匹配滤波器能够克服傅里叶频域滤波固有的频率中心估计误差问题。尤其对于缓变弱相位场的干涉波前重建能够达到很好的空间—频域联合分辨率, 因而它是提高干涉图分析精度, 改善干涉测试技术适应性的有效方法。

参 考 文 献

- [1] Takeda M, Ina H, Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based tomography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1) : 156~ 160
- [2] Kreis T. Digital holographic interference-phase measurement using the Fourier-transform method. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1986, **3**(6) : 847~ 855
- [3] Gabor D. Theory of communication. *J. Instit. Electr. Engrs.*, 1946, **93** : 429~ 457
- [4] Daugman J G. Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1985, **2**(7) : 1160~ 1169
- [5] Bovik A C, Clark M, Geister W S *et al.*. Multi-channel texture analysis using localized spatial filters. *IEEE Trans. on PAMI.*, 1990, **12**(1) : 55~ 73

Wave-Front Retrieval by Gabor Wavelets

Yao Wei Li Zhenhua He Anzhi

(Department of Applied Physics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210014)

(Received 5 February 1998; revised 18 May 1998)

Abstract On the basis of localization error of the first order frequency spectrum associated with interferogram phase unwrapping by Fourier transform method, especially aimed at phase unwrapping for practical interferograms with nonstrictly parallel and equally spaced references, a method of localized matching filtering using Gabor wavelets is proposed. Multi-channel Gabor spatial filter set is constructed to get the best matched local spatial frequency in meaning of Mallat maximum modulo. At the same time noises and opaque objects can be removed. The method is proved more effective than conventional Fourier transform method for cases of nonequally-spaced references and seriously deformed fringes by applying it to simulated and real interferograms to reconstruct interferometric wave fronts.

Key words Gabor transform, phase unwrapping, interferogram analysis, wave-front reconstruction.