

近场衍射图样的抽样定理处理方法*

谢建平 方 晖 王守涛 吴为民 王 刚
吴云霞 高 伟 张国平 明 海
(中国科技大学物理系, 合肥 230026)

摘 要 提出近场衍射图样的抽样定理处理方法。在近场衍射中, 孔径和衍射场分布为或近似为空间有界物, 在其频域中抽样可以比较精确地恢复衍射场的分布。衍射场频谱带宽的近似值由频谱的幅值大于中心频谱极大幅值的 1% 的频率范围所确定。在此带宽内对频谱抽样, 抽样间距与观察处的带宽成正比, 与孔径函数的空间带宽积成反比。对于线度小于波长的狭缝和圆孔的近场衍射图样的计算结果都与他人理论和实验结果相一致。该方法具有直观简捷的优点。

关键词 抽样定理, 近场衍射, 空间带宽积。

1 引 言

扫描近场光学显微镜(SNOM)近年来得到快速的发展^[1], 它的分辨率一般达数十纳米, 有的已达几个纳米, 这已远远地突破了瑞利分辨极限^[2]。在扫描近场光学显微镜中一般都有一个比波长小的孔径作为微小光源或用于接收近场衍射光波, 因此这种线度的孔径的近场衍射图样的分析就显得特别重要。在已采用的分析方法中, 平面波角谱的方法被认为是处理近场衍射图样较简便的方法^[3-6]。在此基础上, 本文提出近场衍射图样的抽样定理处理方法。衍射场的频谱可由孔径的角谱及其传播规律知道, 在频谱内进行抽样, 对抽样谱进行逆傅里叶变换可以得到衍射场的分布。本文将给出近场衍射图样的抽样定理处理方法的原理, 主要是如何确定抽样间距和抽样频谱的范围。本文结果表明, 抽样定理的处理方法会使得近场衍射图样的分析计算大大简化, 并与其他人结果符合得比较好。这对扫描近场光学显微镜的实验研究和近场区域光的传播特性的理解十分有益。

2 原 理

在带有线度为亚波长孔径的扫描近场光学显微镜中, 小孔可作为微小光源或作为光检测^[1]。目前, 扫描近场光学显微镜中的小孔是用光纤拉锥、锥周围侧面镀铝膜而制成, 光纤锥尖端透光孔大小可达数十纳米, 远小于照明波长, 分辨率主要由光纤探针的大小和观察距离决定, 也即依赖于光纤探针在待测样品上造成近场衍射图样的分布和大小所决定。因此,

* 国家自然科学基金资助项目, 批准号 69577005

收稿日期: 1998-01-04; 收到修改稿日期: 1998-05-04

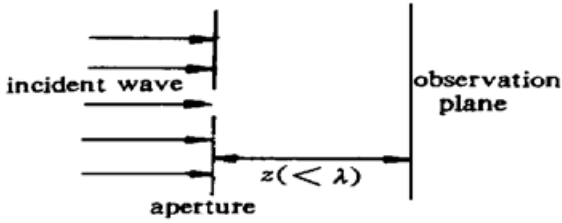


Fig. 1 Geometry of the near-field diffraction

线度为亚波长孔径的近场衍射图样的分析具有重要意义。目前已发展了电磁理论^[7, 8]和角谱^[3-5]等处理方法,其中角谱方法较为直观和简便。本文是在角谱方法的基础上,对衍射场的角谱进行抽样,由抽样角谱来恢复衍射场的分布。

近场衍射的光路如图 1 所示,线度比波长小的孔径的透射函数为 $U_1(x_1, y_1)$, 用振幅为 A 的单色

平面波垂直照明,紧贴孔后光场的空间频谱为

$$U_1(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{AU_1(x_1, y_1)\} \quad (1)$$

它传播到 z 处的观察面上的频谱为^[9]

$$U_0(f_x, f_y) = \begin{cases} U_1(f_x, f_y) \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\mathcal{N}_x)^2-(\mathcal{N}_y)^2}\right]; & |f_x|, |f_y| \leq \frac{1}{\lambda} \\ U_1(f_x, f_y) \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{(\mathcal{N}_x)^2+(\mathcal{N}_y)^2-1}\right]; & |f_x|, |f_y| > \frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (2)$$

上式的第一部分为传播波,第二部分为倏逝波分量,其幅值随传播距离 z 呈 e 指数衰减,因此只有在近场衍射中才必须计及这些频率分量。观察面上的衍射场分布为:

$$U_0(x_0, y_0) = \int_{-1/\lambda}^{1/\lambda} \int_{-1/\lambda}^{1/\lambda} U_1(f_x, f_y) \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\mathcal{N}_x)^2-(\mathcal{N}_y)^2}\right] \times \exp\left[j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)\right] df_x df_y + \int_{-\infty}^{-1/\lambda} U_1(f_x, f_y) \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{(\mathcal{N}_x)^2+(\mathcal{N}_y)^2-1}\right] \times \exp\left[j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)\right] df_x df_y + \int_{1/\lambda}^{\infty} U_1(f_x, f_y) \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{(\mathcal{N}_x)^2+(\mathcal{N}_y)^2-1}\right] \times \exp\left[j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)\right] df_x df_y \quad (3)$$

当孔径透射函数为圆对称时,可采用极坐标和贝塞尔变换^[9]便可得到衍射场。(1)式和(3)式是近场衍射角谱处理方法的主要公式。

由于孔径为空间有界物,按照抽样定理可用频域的抽样函数来精确地恢复孔径的透射函数。假定孔径在 x 和 y 方向上的大小为 L_x 和 L_y , 频域的抽样间距应为 $\Delta f_x \leq 1/L_x$, $\Delta f_y \leq 1/L_y$, 则频谱的抽样函数为

$$U_{1s}(f_x, f_y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_1(f_x, f_y) \delta\left(\frac{f_x}{\Delta f_x} - n\right) \delta\left(\frac{f_y}{\Delta f_y} - m\right) \quad (4)$$

与 $U_{1s}(f_x, f_y)$ 对应的空间域函数为

$$U_{1s}(x_1, y_1) = \mathcal{F}^{-1}\{U_{1s}(f_x, f_y)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_1\left(x_1 - \frac{n}{\Delta f_x}, y_1 - \frac{m}{\Delta f_y}\right) \quad (5)$$

它是孔径函数的周期性阵列,可在 n, m 为任一对整数处用 $\frac{1}{\Delta f_x} \times \frac{1}{\Delta f_y}$ 的窗口来选取出 $U_1(x_1, y_1)$ 。

如狭缝、圆孔等孔径的频谱一般是中央强,边缘高频分量弱。用频谱幅值大于中央频谱幅值极大的1%作为带宽的近似值,记为 F_{0x} 和 F_{0y} , 在此带宽内进行抽样可使分析大大简化。

这样抽样点数为

$$M_{0x} = \frac{F_{0x}}{\Delta f_x} = L_x F_{0x}, \quad M_{0y} = \frac{F_{0y}}{\Delta f_y} = L_y F_{0y} \quad (6)$$

式中已取 $\Delta f_x = \frac{1}{L_x}$, $\Delta f_y = \frac{1}{L_y}$ 。(6)式可看作是孔径透射函数的空间带宽积的近似值。

用同样的方法确定 z 处观察面上频谱带宽的近似值 F_{zx} 和 F_{zy} , 由于带宽变窄, 衍射场的范围要扩展, 所以抽样间距要变小, 而空间带宽积不变。则抽样间距为

$$\Delta f_{zx} = \frac{F_{zx}}{M_{0x}}, \quad \Delta f_{zy} = \frac{F_{zy}}{M_{0y}} \quad (7)$$

衍射场的抽样频谱为

$$U_{0z}(f_x, f_y) = \sum_{-M_{0x}/2}^{M_{0x}/2} \sum_{-M_{0y}/2}^{M_{0y}/2} U_0(f_x, f_y) \delta\left(\frac{f_x}{\Delta f_{zx}} - n\right) \delta\left(\frac{f_y}{\Delta f_{zy}} - m\right) \quad (8)$$

由(5)式可得到衍射场的分布

$$U_{0z}(x_0, y_0) = \sum_{-M_{0x}/2}^{M_{0x}/2} \sum_{-M_{0y}/2}^{M_{0y}/2} \mathcal{F}^{-1}\{U_0(f_x, f_y) \delta\left(\frac{f_x}{\Delta f_{zx}} - n\right) \delta\left(\frac{f_y}{\Delta f_{zy}} - m\right)\} \quad (9)$$

同样用 $\frac{1}{\Delta f_{zx}} \times \frac{1}{\Delta f_{zy}}$ 的窗口在 $x_0 = y_0 = 0$ 处可选取衍射场分布。

3 数值分析结果

本节作者给出线度较小于波长的狭缝和圆孔等近场衍射图样的例子, 并与其他人理论和实验结果相比较。

3.1 狭 缝

狭缝的透射函数为一维的矩形函数, 用单位振幅的单色平面波垂直照明, 孔后的光场为

$$U_1(x_1) = \text{rect}\left(\frac{z_1}{a}\right)$$

它的空间频谱为

$$U_1(f_x) = \mathcal{F}\{\text{rect}\left(\frac{z_1}{a}\right)\} = a \text{sinc}(af_x),$$

其中 a 为缝宽。则观察面上的频谱由(2)式得到

$$U_0(f_x) = \begin{cases} a \text{sinc}(af_x) \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\mathcal{N}_x)^2}\right] & (|f_x| \leq \frac{1}{\lambda}) \\ a \text{sinc}(af_x) \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{(\mathcal{N}_x)^2-1}\right] & (|f_x| > \frac{1}{\lambda}) \end{cases} \quad (10)$$

在 $z = 0$ 的孔径面上, 带宽的近似值 F_{0x} 由下式确定,

$$a \text{sinc}\left(a\frac{F_{0x}}{2}\right) \leq \frac{a}{(2n+1)\pi/2} \geq \frac{a}{100}, \quad n \leq \frac{100}{\pi} - \frac{1}{2},$$

因此,

$$F_{0x} = \frac{2n+1}{a} \quad (11)$$

这时抽样间距取为 $\Delta f_x = \frac{1}{2a}$, 所以孔径面上的空间带宽积为

$$M_{0x} = \frac{F_{0x}}{\Delta f_x} = 2(2n + 1) \tag{12}$$

当 $a = 0.1\lambda$, $z = 0$ 时, $F_{0x} = 636.6/\lambda$, $\Delta f_x = \frac{1}{2a} = \frac{5}{\lambda}$, $M_{0x} = 128$ 。在 $x_0 = 0$ 处用宽度为 $2a$ 的窗口可选取所得出的衍射场分布。分析表明改变抽样间距 $\Delta f_x = 2/\lambda$ 和 $\Delta f_x = 8/\lambda$ 时, 衍射场无明显变化, 衍射场光强度的半高宽都为 $a = 0.1\lambda$ 。因此孔径面上光场可由抽样谱来比较精确地恢复。为了考察只在带宽近似值范围内抽样所造成的误差, 采用抽样范围外所丢弃的能量与孔径总衍射场能量的比值来表示这种误差,

$$P = \frac{2 \int_{F_{0x}/2}^{\infty} a^2 \text{sinc}^2(af_x) df_x}{2 \int_0^{F_{0x}/2} a^2 \text{sinc}^2(af_x) df_x} = \frac{1}{a} \int_{F_{0x}/2}^{\infty} a^2 \text{sinc}^2(af_x) df_x$$

代入上面的数值后 $P = 0.3\%$, 可见所丢弃的能量很少。

图 2(a) 是观察距离 $z = 0.05\lambda$ 时上述狭缝的衍射光强度分布, 其中 $F_{zx} = \frac{30}{\lambda}$, $\Delta f_{zx} = \frac{F_{zx}}{M_{0x}} = \frac{0.24}{\lambda}$, $x_0 = 0$ 处截取衍射场的窗口宽度为 $1/\Delta f_{zx} = 4.17\lambda$, 衍射场光强度半值宽度为 0.102λ 。当抽样间距变小为 $0.1/\lambda$ 时, 结果表明它的半宽度未变。图 2(b) 是 $z = 0.5\lambda$ 时的衍射场光强度分布, 其半高宽已扩展到 0.755λ 。

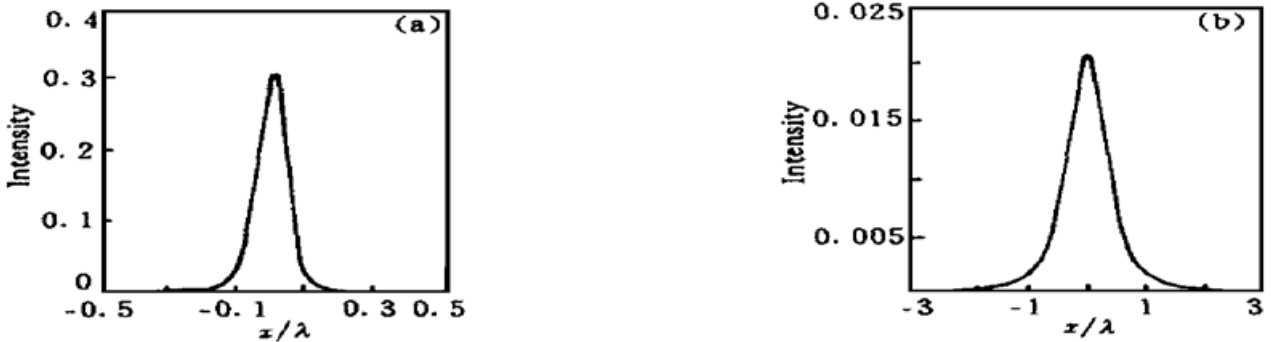


Fig. 2 The near-field diffraction pattern for slit width $\alpha = 0.1\lambda$. (a) $z = 0.05\lambda$, (b) $z = 0.50\lambda$

Massey^[10] 等人用波长 $\lambda = 118.8 \mu\text{m}$ 的远红外激光束照射一块厚度为 $10 \mu\text{m}$ 的金属屏上宽度为 $10 \mu\text{m}$ 的狭缝, 后面用相同的狭缝接收光波。当观察距离为 $27 \mu\text{m}$ 和 $46 \mu\text{m}$ 时, 测得的衍射光强度分布的半高宽分别为 $37 \mu\text{m}$ 和 $54 \mu\text{m}$, 图 3 是用本文抽样方法得到的衍射场光

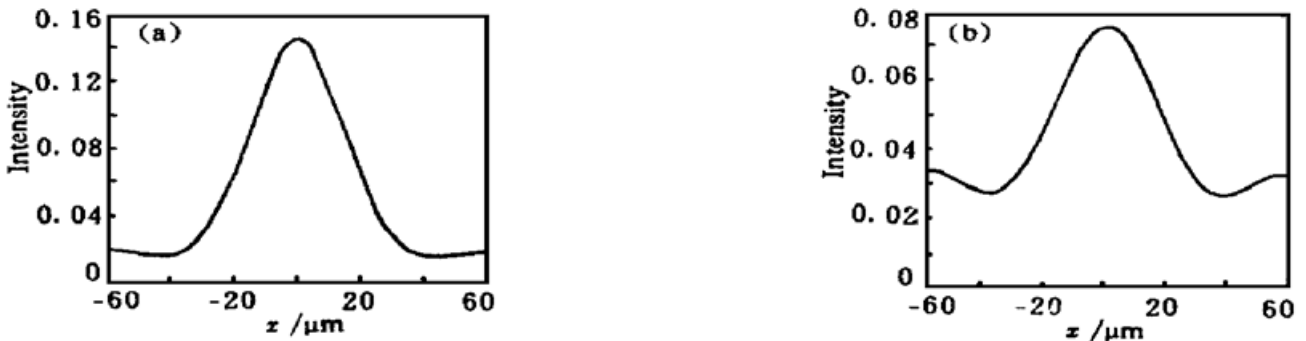


Fig. 3 The near-field diffraction patterns of width $a = 10 \mu\text{m}$ under $118.8 \mu\text{m}$ illumination at the different plane: (a) $z = 27 \mu\text{m}$, (b) $z = 46 \mu\text{m}$

强度分布, 其半高宽分别为 $36.8 \mu\text{m}$ 和 $49.9 \mu\text{m}$, 它们与文献[10]的实验值符合较好。

3.2 圆 孔

用单位振幅、波长为 λ 的单色平面波垂直照明半径为 a 的圆孔, 其角谱为 $A_0(\rho) = \frac{aJ_1(2\pi a\rho)}{\rho}$, 其中 J_1 以及下文中的 J_0 分别为一阶和零阶的第一类贝塞尔函数。抽样在径向进行, 抽样范围由

$$\frac{aJ_1(2\pi a\rho)}{\rho} \exp \frac{-2\pi}{\lambda} z \sqrt{(\lambda\rho)^2 - 1} \geq \frac{1}{100}$$

确定。对于 $a = 0.1\lambda$ 的圆孔, 在 $z = 0$ 处, 抽样范围 $F_{r0} = 23.71/\lambda$, 选取抽样间距 $\Delta\rho_0 = \frac{1}{4a} \approx 2.371/\lambda$ 。因此抽样点数为 $M_{r0} = \frac{F_{r0}}{\Delta\rho_0} = 10$ 。由抽样谱得到的衍射场为

$$U(r, z = 0) = \sum_{n=0}^{n=10} 2\pi a J_1(2\pi a n \Delta\rho_0) J_0(2\pi r n \Delta\rho_0)$$

计算表明光强度半高宽为 0.2λ 。在 $z = 0.1\lambda$ 处, 抽样范围 $F_{rz} = 8.44/\lambda$, 抽样间距 $\Delta\rho_z = 0.844/\lambda$, 抽样谱形成的衍射场为

$$U(r, z = 0.1\lambda) = \sum_{n=0}^{n=4} 2\pi a J_1(2\pi a n \Delta\rho_z) J_0(2\pi r n \Delta\rho_z) \times \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (n\lambda\Delta\rho_z)^2} \right] + \sum_{n=5}^{n=10} 2\pi a J_1(2\pi a n \Delta\rho_z) J_0(2\pi r n \Delta\rho_z) \times \exp \left[\frac{-2\pi}{\lambda} z \sqrt{(n\lambda\Delta\rho_z)^2 - 1} \right]$$

其光强度分布表示在图 4 中, 这些结果都与积分方法的结果符合的很好。

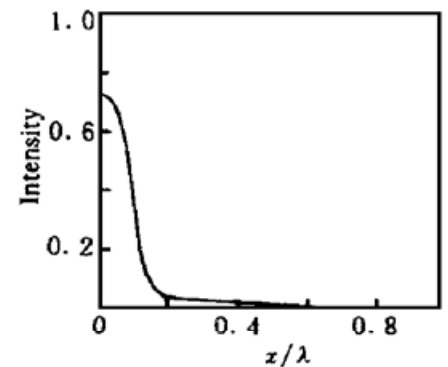


Fig. 4 The near-field diffraction pattern for a circle with radius $a = 0.1\lambda$ at the distance $z = 0.1\lambda$

结束语 本文介绍了抽样定理处理近场衍射图样的原理和分析结果。文中的例子表明, 线度小于波长的狭缝和圆孔的近场衍射图样分别只需 128 个和 10 个频谱抽样点便可得到, 并与其他人的实验和理论结果符合较好。这使近场衍射图样的分析得到了极大的简化, 也使得角谱方法更便于应用。

参 考 文 献

- [1] Heinzelman H, Pohl D W. Scanning near-field optical microscopy. *Appl. Phys. (A)*, 1994, **59**(2) : 89 ~ 101
- [2] Zenhausern F, Óboyle M P, Wickramasinghe H K. Apertureless near-field optical microscope. *Appl. Phys. Lett.*, 1994, **65**(13) : 1623~ 1625
- [3] Massey G A. Microscopy and pattern generation with scanning evanescent waves. *Appl. Opt.*, 1984, **23** (5) : 658~ 660
- [4] Rudduck R C, Chen C L J. New plane wave spectrum formulations for the near-fields of circular and strip apertures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1976, **Ap-24**(4) : 438~ 449
- [5] Kowarz M W. Homogeneous and evanescent contributions in scalar near-field diffraction. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(17) : 3055~ 3063

- [6] Depasse F, Paesler M A, Courjon D *et al.*. . Hygens-fresnel principle in the near field. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(3) : 234~ 236
- [7] Betzig E, Harootunian A, Lewis A *et al.*. . Near-field diffraction by a slit: Implications for superresolution microscopy. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(12) : 1890~ 1900
- [8] Roberts A. Electromagnetic theory of diffraction by a circular aperture in a thick, perfectly conducting screen. *J. Opt. Soc. Am (A)*, 1987, **4**(10) : 1970~ 1983
- [9] 顾德门 J W 著, 詹达三, 董经武, 顾本源译. 秦克诚校. 傅里叶光学导论. 北京: 科学出版社, 1987, 54~ 61; 12~ 14
- [10] Massey G A, Davis J A, Katnik S M *et al.*. . Subwavelength resolution far-infrared microscopy. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(10) : 1498~ 1501

Approach of Near-Field Diffraction Patterns by the Sampling Theorem

Xie Jianping Fang Hui Wang Shoutao Wu Weimin

Wang Gang Wu Yunxia Gao Wei Zhang Guoping Ming Hai
(*Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

(Received 4 January 1998; revised 4 May 1998)

Abstract The method of approaching the near-field diffraction patterns by sampling theorem is proposed. In the near-field diffraction, the aperture is well-defined space-function, and approximately so does the diffraction field distribution. The diffraction field can be restored with rather high precision by sampling function in its spatial spectrum. The approximate value of the spectrum bandwidth of the diffraction field is the region in which the spectrum amplitude is larger than 1% of the maximum of its center spectrum. The spatial spectrum is sampled in this bandwidth. The sampling space is proportional to the bandwidth and inversely to the space-bandwidth product of the aperture function. The calculation results of the near-field diffraction patterns of slit and circle apertures with the size smaller than the wavelength are coincided with other theoretical and experimental results. The sampling method has advantages of direct perceivable and forthright.

Key words sampling theorem, near-field diffraction, space-bandwidth product.