

光学多稳系统的相变及临界点分类*

欧 发

吴福根 何明高

(华南理工大学应用物理系, 广州 510641) (广东工业大学数理系, 广州 510090)

摘 要 参照朗道(Landau)相变理论的基本精神, 研究光学多稳性系统的相变与临界现象, 揭示了相变的多样性, 以及多稳系统通向完全单稳状态的不同路径。多稳性的级次愈高, 相变的式样也就愈多。根据临界点的稳定性准则, 对临界点进行分类, 并用以考察作为非平衡系统的多稳系统中多种临界现象。这种分类法对于平衡与非平衡相变的研究, 均有其参考价值。

关键词 光学多稳性, 临界点, 非平衡相变。

光学的多态记忆功能或模拟-数字转换功能已在实验上得到证实^[1, 2]。多稳器件如同双稳器件一样, 有其开发应用的潜力。作者对多稳系统相变有些初步研究^[3], 现进一步发现多稳系统中的临界现象有其丰富的多样性。本文将采取适当的物理模型, 去揭示这种多样性, 正因为其多样性, 有必要根据一定的准则, 对临界点进行分类。这种分类, 对一般的非平衡相变与临界现象, 相信是会有其参考价值的。平衡热力学中, 传统的分类法是 Ehrenfest 提出的^[4]。他的分类标志是热力学势及其导数的连续性: 到了第 n 阶导数出现不连续的相变, 称为 n 阶(类)相变。而本文的分类准则为临界点的稳定性。

1 远离平衡系统的临界点的分类

临界点就意味着相变, 本文所作临界点的分类实质也就是非平衡相变的分类。对于平衡相变的传统分类法, 则并非如此, 只有二级相变或一级相变线的结束点与临界点相联系, 而一级(不连续)相变本身发生在两相的等化学势点, 该点并不是临界点。正因如此, 在平衡热力学理论中, 提到临界现象就是指二级相变, 或连续相变^[5, 6]。

非平衡系统一般是非线性的。若对其静态 S 进行线性稳定性分析, 可将失去线性稳定性的静态定义为临界点^[7]。在临界点附近起主要作用的往往只有少数几个甚至只是一个自由变量, 因此可以取浸渐(adiabatic)近似^[7]。设浸渐消除后就剩下一个自由变量 x , 则总是可以藉势函数 $G(x)$ (可称为“准热力学势”)来描述临界点附近的行为, 用 G 来判别静态以及临界点的稳定性, 特别方便^[9]。由若干状态参量决定某一静态, 同一组状态参量, 有多个稳定的静态, 就是多稳态。

* 国家自然科学基金资助项目(批号 69678003)。

收稿日期: 1998-03-20; 收到修改稿日期: 1998-06-08

$(\partial^2 G / \partial x^2)_s > 0$ 的静态是线性稳定的, 否则是不稳定的。包括 $(\partial^2 G / \partial x^2)_s = 0$ 的态也是线性不稳定的, 它就是上面定义的临界点 K 。然而 K 的线性不稳, 并不是它的稳定性的终审判决^[18, 9]:

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_K = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_K \neq 0 \quad (1)$$

这样的临界点恒为不稳, 称之为为一类临界点。双稳以及多稳系统每个稳定支一侧或两侧的端点(阈)点, 就属于该类临界点。若

$$\left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_K = 0, \quad \text{但} \quad \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right)_K < 0 \quad (2)$$

这样的 K 称为亚二类临界点, 也是不稳定的; 若

$$\left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_K = 0, \quad \text{且} \quad \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right)_K > 0 \quad (3)$$

那么, 这样的 K 才是稳定的, 称之为二类临界点。推而广之,

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_K = \cdots = \left(\frac{\partial^{n+1} G}{\partial x^{n+1}}\right)_K = 0, \quad \left(\frac{\partial^{n+2} G}{\partial x^{n+2}}\right)_K \neq 0, \quad n = 1, 3, 5, \cdots \quad (4)$$

这是奇 ($n = 1, 3, 5, \cdots$) 次类临界点, 恒为不稳;

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_K = \cdots = \left(\frac{\partial^{n+1} G}{\partial x^{n+1}}\right)_K = 0, \quad \left(\frac{\partial^{n+2} G}{\partial x^{n+2}}\right)_K < 0, \quad n = 2, 4, 6, \cdots \quad (5)$$

为亚偶次类临界点, 也不稳定;

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_K = \cdots = \left(\frac{\partial^{n+1} G}{\partial x^{n+1}}\right)_K = 0, \quad \left(\frac{\partial^{n+2} G}{\partial x^{n+2}}\right)_K > 0, \quad n = 2, 4, 6, \cdots \quad (6)$$

为偶次类临界点, 是稳定的。

以上所定义的临界点在多稳系统都有可能出现, 稳定支愈多, 出现临界点的类别愈多, 类别的级次也愈高。下面参照以上临界点的分类, 考察多稳系统的相变与临界现象。

2 势及运动方程在某临界点附近的展开

设从光场与物质耦合系统的方程组中浸渐地消除物质变量, 可得一单模光场的决定性运动方程, 其一般形式表达成:

$$\frac{dx}{dt} \equiv X^\circ = -f(X) + Y = -\frac{\partial G}{\partial x} \quad (7)$$

X 与 Y 分别代表光腔输出光场与输入(驱动)光场的实振幅(或光强), $f(X)$ 为 X 的某种非线性函数, $G(X)$ 为系统的准热力学势。这里 X 为自由变量, 而 Y 为可受外界控制的参量。其实, 在 $f(X)$ 中还会包含其它一系列控制参量。在动态情况, X 与 Y 是互相独立的变量, 但在静态($X^\circ = 0$, 即 $\frac{\partial G}{\partial X} = 0$) 情况下, X 的静态值 X_s 与 Y 之间有如下依赖关系——静态方程:

$$Y = f(X_s) \quad (8)$$

朗道相变理论的基本精神就是在临界点附近考察相变的特征^[8]。本文仍将遵从这个原则来揭示多稳系统的临界现象。为此, 将势 $G(X)$ 在 X_s 的某一临界值 X_c 附近展开:

$$G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n G}{\partial X^n}\right)_{X=X_c} (X - X_c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n, \quad |x| = |X - X_c| < 1 \quad (9)$$

据(7)式, 其中系数 G_1 可表达成:

$$G_1 = -y, \quad y \equiv Y - f(X_c) \quad (10)$$

将(9)式改写成:

$$G(x) = G(X) - G(X_c) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n x^n \quad (11)$$

$G(X) \rightarrow G(x)$ 为对应于变量替换 $X \rightarrow x (= X - X_c)$ 的函数变换。严格地说, $G(x)$ 与 $G(X)$ 是两个不同函数。但是, 显然有

$$\frac{\partial^n G(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n G(X)}{\partial X^n}, \quad (n \neq 0) \quad (12)$$

为简化符号系统, 约定 $\frac{\partial G}{\partial x}$ (或 $\frac{\partial G}{\partial X}$) 就意味着 $G(x)$ (或 $G(X)$) 对 x (或 X) 的导数。值得指出, 本文所考虑的临界现象不仅是与 X_c 对应的这一个临界点, 还有在 X_c 附近的许多其它临界点。(9) 式原则上是无穷级数。若要描述 N 重稳态系统中与各类临界点相联系的相变, 将该级数 $\sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n$ 在第 $2N$ 项截断即可。再则, 为了便于用解析的方法说明问题, 除 $G_1 \neq 0$ 以外, 设所有奇次项系数均为零, 即有

$$G(x) = \sum_{n=1}^{2N} G_n x^n, \quad G_1 = -y, \quad G_3 = G_5 = \cdots G_{2N-1} = 0 \quad (13)$$

(13) 式所示的 $G(x)$ 包含临界点的最高级次为 $2(N-1)$ —— 偶次。 G_{2N} 这个系数的符号, 关系到该偶次类临界点的稳定性(如前所述 $G_{2N} > 0$ 时, 该点为稳定)。为确定起见, 令 $G_{2N} = \frac{1}{2N}$ 。系数 $G_2, G_4, \cdots, G_{2(N-1)}$ 连同 $y (= -G_1)$ 构成 N 稳系统的一组独立的控制(状态)参量。

相应运动方程($\dot{x} = -\frac{\partial G}{\partial x}$) 与静态方程($\frac{\partial G}{\partial x} = 0$) 分别为:

$$\dot{x} = -[x^{2N-1} + 2(N-1)G_{2(N-1)}x^{2N-3} + \cdots + 2G_2x] + y \quad (14)$$

$$y = x_s^{2N-1} + 2(N-1)G_{2(N-1)}x_s^{2N-3} + \cdots + 2G_2x_s, \quad (x_s = X_s - X_c) \quad (15)$$

方程(14)与(15)具有一定的对称性, 即“空间坐标”反演下,

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y \quad (16)$$

(14) 式或(15)式均保持不变。虽然实际的多稳系统不一定明显地具有这种对称性, 但这种对称性给理论研究带来许多方便, 也就是说, 它有利于揭示多稳系统的临界现象及其规律。在朗道相变理论中热力学势 $G(x)$ 主要只有二项^[8]:

$$G(x) = G_2x^2 + G_4x^4, \quad (G_4 > 0) \quad (17)$$

并将 G_1 与 G_3 全部奇次项系数均定为零, 直接使 $G(x)$ 在 x 的反演下不变。(17) 式十分扼要地描述了二级相变。

3 三稳系统的临界点与相变

首先还是以三稳系统为典型事例说明问题, $N = 3$ 时的静态方程为:

$$y = x_s^5 - 2\beta x_s^3 + Cx_s \quad (18)$$

其中, $C \equiv 2G_2, \quad \beta \equiv -2G_4$

先求 $y = 0$ 时静态解, 它对于了解 $y = 0 [Y = f(X_c) \equiv Y_c]$ 附近的多稳状况是很有参考价值的。当 $y = 0$ 时 x_s 有这样 5 个根,

$$x_s = 0, \pm \sqrt{\beta_+}, \pm \sqrt{\beta_-} \quad (19)$$

式中, $\beta_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - C}$

并且均为实根的条件为

$$\beta > 0, \quad C > 0, \quad \beta^2 > C. \quad (20)$$

这 5 个根的稳定性, 如前所述, 则由 $(\partial^2 G/\partial x^2)_{x=x_s}$ 的符号来决定。现

$$(\partial^2 G/\partial x^2)_{x=x_s} = \frac{dy}{dx_s} = 5x_s^4 - 6\beta x_s^2 + C \quad (21)$$

由(19)式得

$$\left. \begin{aligned} (\partial^2 G/\partial x^2)_{x_s=0} &= C, & (\partial^2 G/\partial x^2)_{x_s=\pm(\beta_+)^{1/2}} &= 4\beta_+ \sqrt{\beta^2 - C}, \\ (\partial^2 G/\partial x^2)_{x_s=\pm(\beta_-)^{1/2}} &= -4\beta_- \sqrt{\beta^2 - C} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

因此, $x_s = 0, \pm \sqrt{\beta_+}$ 为稳定, $x_s = \pm \sqrt{\beta_-}$ 为不稳定的。由此可以大体上可以判定: x_s-y 静态曲线中有三个斜率 dy/dx_s 为正的稳定支, 在 x_s 轴上的截距分别为 $\sqrt{\beta_+}, 0$ 与 $-\sqrt{\beta_+}$, 并依次称为高支、中支与低支; 两个斜率为负的不稳支, 截距为 $\pm \sqrt{\beta_-}$, 如图 1 所示, 其中实、虚线分别表示稳定与不稳定支。各支的端点(上跳或下跳阈点)的 x_s 值, 据临界点的定义和(21)式, 是方程

$$(\partial^2 G/\partial x^2)_{x=x_s} = 5x_s^4 - 6\beta x_s^2 + C = 0 \quad (23)$$

的根:

$$\begin{aligned} x_s &= \pm \sqrt{\beta'_\pm}, \\ \beta'_\pm &= \frac{1}{5}[3\beta \pm \sqrt{(3\beta)^2 - 5C}] \end{aligned} \quad (24)$$

$x_s = \pm \sqrt{\beta'_\pm}$ 这 4 个根均为实数的条件是:

$$(3\beta)^2 > 5C \quad (25)$$

令 $x_s^{(-)} = -\sqrt{\beta'_+}, \quad x_s^{(0)} = -\sqrt{\beta'_-},$

$$x_s^{(+)} = \sqrt{\beta'_-}, \quad x_s^{(+)} = \sqrt{\beta'_+} \quad (26)$$

这里右上标(-)、(0)与(+)分别标志低、中、高支(参见图 1), 据(18)式不难得对应的 y 值:

$$\begin{aligned} y(\pm \sqrt{\beta'_\pm}) &= \pm \frac{4}{5^2} \sqrt{\beta'_\pm} [5C - 3\beta^2 \mp \\ &\quad \beta \sqrt{(3\beta)^2 - 5C}] \end{aligned} \quad (27)$$

当 $(3\beta)^2$ 在 $5C$ 的附近, 即

$$(3\beta)^2 = 5C + \Delta, \quad \text{并且} \quad \Delta > 0, \quad \Delta/\beta^2 \ll 1, \quad (28)$$

$$y(\pm \sqrt{\beta'_\pm}) \approx \pm \frac{4}{5^2} \sqrt{\frac{3}{5}\beta(6\beta^2 - \frac{5}{4}\Delta \mp \frac{11\Delta\sqrt{\Delta}}{72\beta})} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} y(-\sqrt{\beta'_+}) &= y_s^{(-)}, & y(-\sqrt{\beta'_-}) &= y_s^{(0)}, \\ y(\sqrt{\beta'_-}) &= y_s^{(0)}, & y(\sqrt{\beta'_+}) &= y_s^{(+)} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

将(26)式、(30)式与图 1 对照。临界点的稳定性及其类型将根据一般准则(4)式与(5)式来判断。先列出 $x_s = \pm \sqrt{\beta'_\pm}$ 四个阈点 $[(\partial^2 G/\partial x^2)_{x_s=\pm(\beta'_\pm)^{1/2}} = 0]$, G 的三次以上的各次导数:

$$\left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_{x_s=\pm(\beta'_\pm)^{1/2}} = 4x_s(5x_s^2 - 3\beta) = 4\sqrt{\beta'_\pm} \sqrt{(3\beta)^2 - 5C} \quad (31)$$

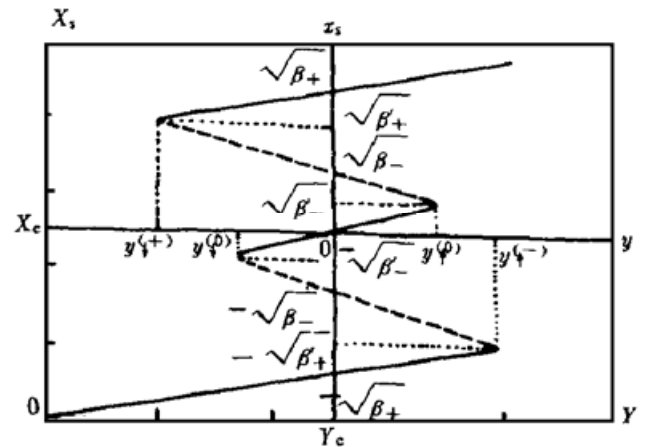


Fig. 1 Plot of the output $X_s (= x + X_c)$ vs input $Y (= y + Y_c)$ curve in the neighborhood of a critical point (X_c, Y_c) for $\beta > 0, C > 0$ and $\beta^2 > C$, where the open interval $y_s^{(+)} > y > y_s^{(0)}$ is the tristable region, the solid line represents stable branch and dotted line — unstable branch

$$\left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right)_{x_s = \pm(\beta_{\pm}')^{1/2}} = 12(5x_s^2 - \beta) = 12[2\beta \pm \sqrt{(3\beta)^2 - 5C}] \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial^5 G}{\partial x^5}\right)_{x_s = \pm(\beta_{\pm}')^{1/2}} = 120x_s = \pm 120 \sqrt{\beta_{\pm}'} \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial^6 G}{\partial x^6}\right)_{x_s = \pm(\beta_{\pm}')^{1/2}} = 120 \quad (34)$$

由(31)式可见, 两对上、下跳阈点 ($x_s^{(+)} = \sqrt{\beta_-}'$, $x_s^{(-)} = \sqrt{\beta_+}'$) 与 ($x_s^{(+)} = -\sqrt{\beta_+}'$, $x_s^{(-)} = -\sqrt{\beta_-}'$) 的 G 的 3 次导数恒不为零, 故均为不稳, 并属于一类临界点, 对应于高、低稳支之间的转变(相变)。但是, 在状态参量 β 与 C 变化的过程中, 它们演化为另一种类型的临界点。

4 参量 β 与 C 变化过程中的相变

当 $\beta > 0$, $C > 0$ 且 $\beta^2 > C$, 在 $y^{(+)} < y < y^{(-)}$ 开区内(参见图 1), 同一个 y 有 3 个稳定的 x_s , 例如 $y = 0$ 时, 分别为 0 、 $\pm \sqrt{\beta_+}'$, 该区域称为三稳区。由(27)~(30)式可见

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow C} y^{(+)} = 0, \quad \lim_{\beta^2 \rightarrow C} y^{(-)} = 0 \quad (35)$$

当 $\beta^2 > C$, $\beta^2 \rightarrow C$ 意味三稳区趋向消失。 $C \geq \beta^2$ (但 $C < 9\beta^2/5$) 时, 三稳区虽然消失, 但仍存在高、中、低这 3 个稳定支。在 x_s - y 面的第 1、3 象限形成 2 个互不重叠的双稳滞回线, 如图 2 所示, 这样互不重叠的两个以上的双稳回线, 可称为多阶双稳性, 实际上早期发现的光学多稳态就属于这种多阶双稳^[1, 2, 10]。总之, $\beta^2 = C$ 代表一种临界状态, 意味着三稳区与二阶双稳性之间转变。不过, 这种转变所对应的临界点为高支的下跳阈点 ($x_s^{(+)} = \sqrt{\beta_+}' = \sqrt{\beta}$) 与低支的上跳阈点 ($x_s^{(-)} = -\sqrt{\beta_+}' = -\sqrt{\beta}$), 仍属一类临界点。特殊之处在于同位于 x_s 轴上, 并且都要跳到中支的同一点 ($x_s = 0$, $y = 0$)。

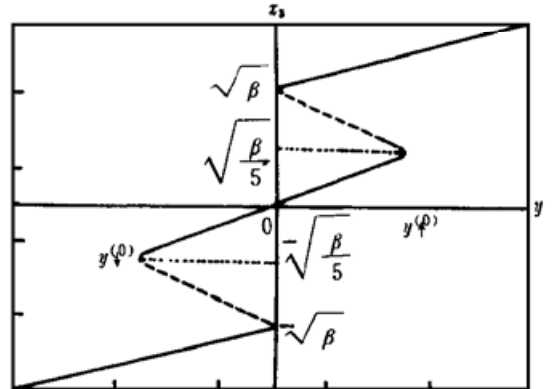


Fig. 2 The x_s vs y curve in the critical condition $\beta^2 = C$ (which means $y^{(+)} = y^{(-)} = 0$), related to disappearance of tristable region and emergence of two-step bistable loops (cf. Fig. 1). This transition is corresponding to the critical point ($\sqrt{\beta}$, 0) or ($-\sqrt{\beta}$, 0) of 1st kind (unstable)

$C > \beta^2 > 5C/9$, 但当 β^2 趋向 $5C/9$ 时, 由(24)~(26)式可见, 二阶双稳性的每个双稳回线的上、下跳阈点互相靠近, 在极限情况下:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\beta^2 \rightarrow 5C/9} x_s^{(+)} &= x_s^{(+)} = \sqrt{3\beta/5}; \\ \lim_{\beta^2 \rightarrow 5C/9} x_s^{(-)} &= x_s^{(-)} = -\sqrt{3\beta/5} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

这意味两个双稳回线均缩成了一个点[参照(24)~(30)式], 分别位于第 1 与第 3 象限, 如图 3 所示。而且两者均为 x_s - y 曲线的拐点, 因为[参见(31)、(32)、(21)与(23)诸式]

$$\left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_{\beta^2 = 5C/9, x_s = \pm(3\beta/5)^{1/2}} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_s = \pm(3\beta/5)^{1/2}} = 0 \quad (37)$$

而且

$$\left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right)_{\beta^2 = 5C/9, x_s = \pm(3\beta/5)^{1/2}} = 24\beta > 0 \quad (38)$$

故该拐点为二类(稳定)临界点, 对应于二阶双稳与多稳性完全消失(完全的单稳)之间的转变。走向多稳性完全消失, 还有另一条道路。

当 $\beta^2 > C > 0$, 先令 β 不变, 而 C 减小, 则中间稳定支逐渐缩短, 在极限情况下[参见(24)~(26)式与图1]

$$\lim_{C \rightarrow 0^+} x_s^{(0)} = \lim_{C \rightarrow 0^+} \sqrt{\beta'} = 0, \quad \lim_{C \rightarrow 0^+} x_s^{(0)} = -\sqrt{\beta'} = 0 \quad (39)$$

中支缩成了一个位于 $(x_s = 0, y = 0)$ 的点。根据(24)、(31)与(32)式, 得

$$\left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_{C=0, x_s=0} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{C=0, x_s=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right)_{C=0, x_s=0} = -12\beta < 0 \quad (40)$$

这个点也是一个拐点, 但属于亚(不稳)二类临界点, 它成为原来上下两个不稳支(虚线)的交接点(参见图1与图4)。 $C = 0$ 是图1所示 x_s - y 三稳曲线转变为单一双稳曲线的临界状态(如图4所示), 简言之, 此亚二类临界点($C = 0, x_s = 0$) 代表三稳性与单一双稳性(或一阶双稳性)之间的转变。

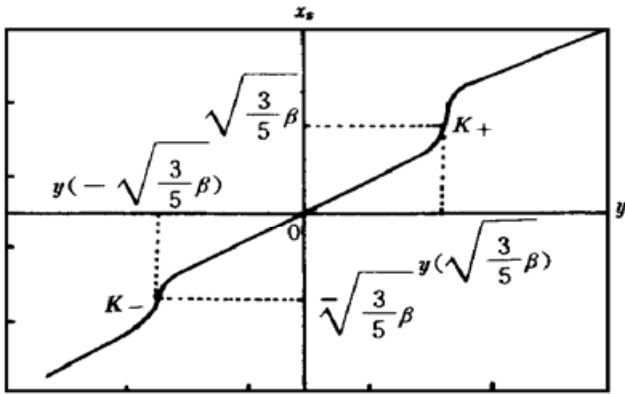


Fig. 3 The x_s vs y curve in the critical condition $(3\beta)^2 = 5C$ which shows the transition between two-step bistable loops and completely single-stable curve (complete mono-stability) corresponding to the critical (inflection) point K_+ or K_- of 2nd kind (stable). Cf. Fig. 2

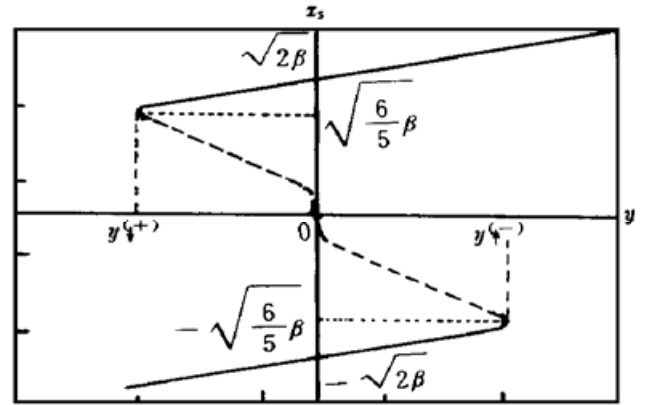


Fig. 4 The x_s vs y curve in the critical condition $C = 0$ with $\beta > 0$ — transition between tristability and bistability corresponding to the critical (inflection) point $(0, 0)$ of sub-2nd kind (unstable). The point $(0, 0)$ will become a critical one of 4th kind (stable) when $C = 0$ and $\beta = 0$. Cf. Fig. 1

当 $C \leq 0, \beta^2 > 0$, 总是存在一个类似于图4的单一双稳回线($C < 0$ 时原点 $x_s = 0, y = 0$ 不再作为临界点的拐点), 高支与低支在 x_s 轴的截点分别在 $\sqrt{\beta_+}, -\sqrt{\beta_+}$, 高支左侧与低支右侧的端(阈)点依次为 $x_s^{(+)} = \sqrt{\beta'_+}, x_s^{(-)} = -\sqrt{\beta'_+}$ 。 $|C|$ 与 β^2 的减少, 将使该双稳滞回线面积缩小, 在极限况下[对照(24)式与(19)式],

$$\lim_{\substack{C \rightarrow 0^- \\ \beta^2 \rightarrow 0}} x_s^{(+)} = x_s^{(-)} = \pm \sqrt{\beta'_+} = \pm \sqrt{\beta_+} = 0 \quad (41)$$

缩成一个点。还意味, 原来的高支与低支在原点 $(x_s = 0, y = 0)$ 相接成为完全的单稳支, 这个原点再次成为临界点(也是拐点), 代表双稳性与单稳性(多稳性的完全消失)之间的转变。不难看出[参见(31)~(33)式]该临界点 $K(C = 0, \beta = 0, x_s = 0)$ 为四类(稳定)临界点(三稳系统可能出现的最高级别的临界点), 因为

$$\left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_K = \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right)_K = \left(\frac{\partial^5 G}{\partial x^5}\right)_K = 0, \quad \left(\frac{\partial^6 G}{\partial x^6}\right)_K = 120 > 0 \quad (42)$$

5 四稳系统的临界点

对于四稳系统, (15) 式所示静态方程可写成

$$y = x_s^7 - Ax_s^5 + Bx_s^3 - Dx_s \quad (43)$$

$$\text{并令} \quad A = 2\beta + \delta, \quad B = C + 2\beta\delta, \quad D = C\delta \quad (44)$$

$y = 0$ 时 x_s 有 7 个根:

$$x_s = 0, \pm \sqrt{\delta}, \pm \sqrt{\beta_+}, \pm \sqrt{\beta_-}, (\beta_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - C}) \quad (45)$$

若 $\delta > 0, \beta > 0, C > 0$, 且 $\beta^2 > C$, 这 7 个根均为实数。当 δ 足够小, 不难证明, $x_s = \pm \sqrt{\delta}, \pm \sqrt{\beta_+}$, 4 个静态是稳定的, 而 $x_s = 0, \pm \sqrt{\beta_-}$ 是不稳的, 即在 $y = 0$ 附近存在四稳区。这样的四稳系统要发生比三稳系统更为多样的相变与临界现象, 例如, 由四稳区向三阶双稳性的转变, 三阶双稳向二阶双稳的转变等等(详见后面的表 2)。首先考察一下($y = 0, x_s = 0$) 构成的各类临界点。写下 $x_s = 0$ 时 G 的二阶以上导数:

$$(\partial^2 G / \partial x^2)_{x_s=0} = (dy/dx_6)_{x_s=0} = -C\delta \quad (46)$$

$$(\partial^3 G / \partial x^3)_{x_s=0} = 0, \quad (\partial^4 G / \partial x^4)_{x_s=0} = 3!(C + 2\beta\delta) \quad (47)$$

$$(\partial^5 G / \partial x^5)_{x_s=0} = 0, \quad (\partial^6 G / \partial x^6)_{x_s=0} = 5!(2\beta + \delta) \quad (48)$$

$$(\partial^7 G / \partial x^7)_{x_s=0} = 0, \quad (\partial^8 G / \partial x^8)_{x_s=0} = 7! > 0 \quad (49)$$

由(46)式可见, 只要 $\delta = 0$, 或 $C = 0$, 或兼有 $\delta = 0$ 与 $C = 0$ 时, $x_s = 0$ 均为临界点, 但分别对应不同类型的临界点与相变[参见(47)~(49)式]。兹列表(表 1)如下, 作一简要概括。

Table 1. Transitions of the tetrastable system in the first route to complete monostability

critical value of control parameters	kinds of critical point at ($y = 0, x_s = 0$)	transition between
1. $\delta = 0, (\beta > 0, C > 0, \beta^2 > C)$	2nd kind(stable)	tetrastability and tristability
2. $C = 0, (\delta = 0, \beta > 0)$	sub-4th kind(unstable)	tristability and bistability
3. $\beta = 0, (\delta = 0, C = 0)$	6th kind (stable)	bistability and monostability

走向多稳性完全消失的另一条道路所经历的临界点与相变, 由表 2 列出计算结果:

Table 2. Transition of the tetrastable system in the second route to complete monostability

critical value of control parameters	kind of the critical point at ($y = \dots, x_s = \dots$)	transition between
1. $\beta^2 = C, (\delta > 0)$	1st kind (unstable) at ($y = 0, x_s = \pm \sqrt{\beta}$)	tetrastable region and 3-step bistable loops
2. $\delta = 0, (\beta^2 < C < \frac{25}{21}\beta^2)$	2nd kind (stable) at ($y = 0, x_s = 0$)	3-step bistable loops and 2-step bistable loops
3. $C = \frac{25}{21}\beta^2, (\delta = 0)$	2nd kind (stable) at [$y = \pm (8/15)(5\beta/7)^{3/2}, x_s = \pm \sqrt{5\beta/7}$]	2-step bistable loops and complete monostability

结 论 1) 通过三稳与四稳系统比较, 揭示了光学多稳系统中相变与临界现象的多样性, 多稳性级次愈高, 则愈复杂, 并涉及到多种状态参量——运行条件的多方面因素。将多稳系统付诸应用, 这是应该充分考虑到的问题。多稳性的相变也可能有其直接的利用价值。

2) 光学多稳系统中临现象的多样性, 促使作者考虑对非平衡相变临界点进行适当的分

类。人们将远离平衡相变与平衡相变作类比，就有了‘类一级相变’与‘类二级相变’这种术语。这事实上也是将平衡相变热力学中 Ehrenfest 相变分类法延用于非平衡相变。作者感到任何非平衡相变(包括光双稳性的所谓一级相变)都是和临界现象或临界点密切相关的。本文按用以判别临界点稳定性的准热力学势导数的级次，区分出奇、偶次临界点，奇次类恒不稳，偶次类可为稳定的情况；偶次类分出一个亚类，也代表不稳的情况。简言之，以临界点稳定性为标志，区分不同类型的非平衡相变。

朗道在他的著名相变理论中，曾预言‘第二类相变(线)的临界点’^[8](类似这样的临界点非平衡系统中也存在^[11, 12])完全有必要将它与第一类相变线的临界点(即第二类相变点)区分开来，按本文临界点的分类法，前者属于四类，后者则为二类。

参 考 文 献

- [1] Smith P W, Turner E H, Maloney P J. Electrooptic nonlinear Fabry-Prot devices. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1978, **QE-14**(3) : 207~ 213
- [2] Miller D A B, Smith S D, Seaton C T. Optical bistability in semiconductor. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1981, **QE-17**(3) : 312~ 317
- [3] 吴福根, 欧 发. 光学三稳性临界点的二级相变特征. 量子电子学报, 1997, **14**(5) : 400~ 404
- [4] Reichl L E. 统计物理现代教程, 北京: 北京大学出版社, 1983. 上册, § 4.3
- [5] 于 泳. 连续相变和重正化群. 统计物理学进展, 北京: 科学出版社, 1981. 76
- [6] Ma S K(马上庚). *Modern Theory of Critical Phenomena*. New York: W. A. Benjamin, 1976
- [7] Haken H. *Advanced Synergetics*. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 187
- [8] Landau L D, Lifshitz E M. *Statistical Physics*. Uxford: Pergamon Press, 1985. ch. 14
- [9] 欧 发. 光学耗散系统的准热力学模型及其在光学双稳性相变上的应用. 物理学报, 1992, **41**(8) : 1222~ 1233
- [10] Gibbs N M. *Optical Bistability: Controlling Light with Light*. Orlando: Academic Press, 1985. § 1.2, § 3.7
- [11] 欧 发, 吴福根. 存在双稳性的激光系统中的临界现象. 量子电子学报, 1996, **2**(1) : 53~ 63
- [12] 欧 发, 吴福根. 自催化反应的临界现象. 化学物理学报, 1996, **9**(5) : 423~ 428

Phase Transitions in the Multi-Stability Optical Systems and the Classification of Critical Points

Ou Fa

(Department of Applied Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Wu Fugen He Minggao

(Department of Mathematics and Physics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

(Received 20 March 1998; revised 8 June 1998)

Abstract Referring to the principle of Landau's theory on phase transitions, the varied transitions and critical phenomena in multi-stable optical systems are discussed. It is demonstrated that the higher the order of the multi-stability, the more variety of transitions, and shown also that the multi-stable system possesses different routes to complete mono-stability. A classification scheme of critical points corresponding to some transitions or bifurcation is made according to the stability criterion. This classification is useful to the study of critical phenomena, especially in non-equilibrium systems including the multi-stable systems.

Key words optical multi-stability, critical point, phase transition.