

光波导的自洽场计算 ——扩散型平面波导

高伯龙 金世龙

(国防科技大学应用物理系, 长沙 410073)

摘 要 用差分方程法和直接积分法求扩散型平面光波导问题的解, 得到了有 10 位有效数字的传播常数。证明在此问题上, 差分方程法的简单计算比有限元法和其它方法更为优越。它是用自洽场法解通道光波导问题的数学基础之一。

关键词 扩散型平面波导, 传播常数, 有限元法。

1 引 言

集成光学在光纤通讯、光纤陀螺^[1, 2]等领域的地位日益重要, 尤其是 80 年代末出现质子交换退火技术^[3]后, 光波导的损耗大为降低, 且兼有优质偏振器的功能, 制作工艺简化, 成本大幅度下降, 用量猛增^[4]。人们对如何能准确计算光波导的性能的兴趣与日俱增, 因为它是优化高级光波导设计的基础。文献[5]中把计算方法分为近似解析法和数字法两大类, 共约 10 种。并特别推崇有限元法(FEM), 认为是威力大的、通用的精确方法, 且应用范围很广^[6], 用于光波导计算始于 80 年代中期^[7], 被一些人认为是标准的计算方法^[8]。本文作者仔细地研究了这种方法, 认为它的工作量大, 计算复杂, 结果又不很精确。用同样的参量, 不同的作者, 用一阶元^[5]或二阶元^[9]的结果存在着差异。经过较长时间的探索研究, 本文作者得到了自洽场法(SCFM)在计算光波导问题上比有限元法精确且简单得多的结论, 决定推荐此方法供实际使用。

2 平面波导

有关光波导的各种计算方法都从平面波导开始, 作为该计算方法精确性的一种衡量。本文介绍的方法更是以平面波导的计算方法作为通道波导的自洽场算法的基础之一。图 1 为单轴晶体制成的平面光波导, 它在广度 x 方向是均匀的。通常, 晶体用 LiNbO_3 , 波导的折射率分布由 Ti 注入扩散或质子交换退火扩散所制成。从麦克斯韦方程出发, 在波导的横向 (y) 折射率变化远较光波函数变化缓慢的简化假设下, 可得波函数 $\Psi(y, z, t)$ 所满足的方程式^[10, 11]

$$\Psi(y, z, t) = \Phi(y) \exp[i(\beta z - \omega t)] \quad (1)$$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + k_0^2 n^2(y) \right] \Phi(y) = \beta^2 \Phi(y) \quad (2)$$

式中

$$n^2(y) = \begin{cases} n_s^2 + 2n_s \Delta n_s(y), & y \geq 0; \\ n_c^2 = 1 & y < 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda, \quad (4)$$

其中, λ 为真空中的波长, ω 为圆频率, 光波沿 z 轴正向传播, β 为传播常数, $n(y)$ 为折射率沿横向 y 轴的分布, n_s 为基底的折射率, $\Delta n_s(y)$ 为注入的 Ti 扩散后或质子扩散后所产生的基底折射率的变化, n_c 为覆盖介质的折射率, 这里 $n_c = 1$ (空气)。 β^2 和 $\Phi(y)$ 是方括弧内算符在符合边界条件下的本征值和本征函数。

为了与文献[5]的结果比较, 本文的光波导取 LiNbO₃ 的 x 切 y 传。对 TE 模, Ψ 代表电场的 x 轴分量 E_x , $n_s = n_e$; 对 TM 模, Ψ 代表磁场的 x 分量 H_x , $n_s = n_o$ 。 n_e 、 n_o 为非常光(e光)、寻常光(o光)的折射率。

文献[5]用了三种形式的折射率分布

$$\left. \begin{aligned} \Delta n_s(y) &= \Delta n g(Y) \\ g(Y) &= \exp(-Y^2), \quad \exp(-Y), \quad 1 - \delta_{\text{erf}}(y) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $\delta_{\text{erf}}(y)$ 为误差函数, 无量纲坐标 Y 为

$$Y = y/D_y \quad (6)$$

D_y 被称为 y 方向的扩散深度。剖面函数 $g(Y)$ 分别取式中三种形式之一。文中还定义了两个无量纲的量, 一是“归一化频率” v , 另一是“归一化传播常数” B :

$$v = k_0 D_y \sqrt{2n_s \Delta n} \quad (7)$$

$$B = (n_{\text{eff}}^2 - n_c^2)/(2n_s \Delta n) \quad (8)$$

$$n_{\text{eff}} = \beta/k_0 \quad (9)$$

这里 n_{eff} 为“有效折射率”。文中计算 TE 模, 采用 $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$, $n_s = 2.177$, $\Delta n = 0.043$ 。若给定 v 值即给定了 D_y 的值。表 1 中后 5 列是该文用有限元法(FEM)的计算结果、Sharma 等人的

Table 1. Normalized propagation constant B for the TE₀ mode in diffused planar waveguides by different methods

$g(Y)$	v	$B/10^{-2}$						
		accurate	SDM	FEM	Sharma	CE	EHG	HG
$\exp(-Y^2)$	2	8.169171778	8.169	8.1	8.2	7.8	4.4	0.5
	3	27.50374995	27.504	27.2	27.5	27.0	26.3	21.6
	4	41.33298982	41.333	40.9	41.3	40.4	40.8	37.0
$\exp(-Y)$	2	10.49542770	10.495	10.4	10.5	10.0	8.7	6.6
	3	22.91885031	22.919	22.7	22.9	22.3	21.8	19.3
	4	32.11790265	32.118	31.8	32.1	31.6	31.3	28.9
$1 - \delta_{\text{erf}}(Y)$	3	6.765888973	6.766	6.7	6.8	6.4	4.1	1.5
	4	16.947904215	16.948	16.8	16.9	16.4	15.4	12.1

* $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$, $n_c = 1$, $n_s = 2.177$, $\Delta n = 0.043$

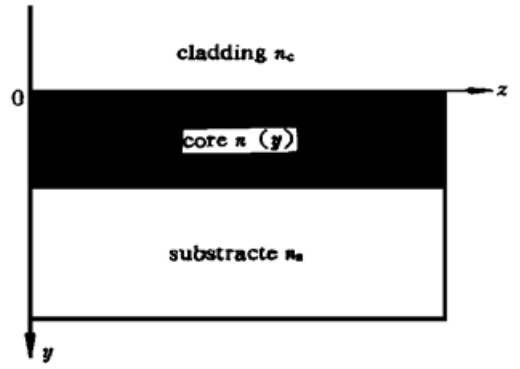


Fig. 1 Schematic structure of the planar waveguide

结果^[12]以及三种近似解析法的结果^[5, 12]。有限元法(FEM)取 800 个一阶元, 文献[5]的作者坚信其结果比 Sharma 等人的结果更准确。

平面波导是本征方程(2)式的解, 用不着自洽场概念, 但它是自洽场方法的基础, 自洽场方法的精度首先由它的精度来保证。因此, 必须对它作严密的讨论。

对于 $y < 0$ 区域, 从(3)式得到(2)式的解为

$$\left. \begin{aligned} \Phi(y) &= A \exp(KD_y Y) \\ K &= k_0 \sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_c^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

只要 $K > 0$, 它满足边界条件 $\Phi(y) \rightarrow 0$ (当 $y \rightarrow -\infty$ 时)。对于 $y \geq 0$ 区域, (2)式可写成

$$\frac{d^2 \Phi}{dY^2} = v^2 [B - g(Y)] \Phi \quad (2')$$

方程式的本征值为 $v^2 B$, 可用差分方程法或直接积分法求解。

取足够大的 Y_m 值, 把 Φ 的边界条件写成: Φ 和 $\frac{d\Phi}{dY}$ 在 $Y = 0$ 连续, Φ 在 $Y = Y_m$ 点为 0。将区间 $[0, Y_m]$ 作 N 等分, 各端点的坐标为

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= ih, \quad (i = 0, 1, \dots, N) \\ h &= Y_m/N \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

差分方程的标准作法是以差分代二级导数

$$(\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1})/h^2 \rightarrow \frac{d^2 \Phi}{dY^2}$$

代入(2')式后, 变成递推公式

$$\Phi_{i+1} = [2 + v^2(B - g_i)h^2]\Phi_i - \Phi_{i-1}, \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (12)$$

其中

$$\Phi_i = \Phi(Y_i), \quad g_i = g(Y_i) \quad (13)$$

边界条件现为

$$\Phi_0 = A = 1, \quad \Phi_1 = \Phi_0(1 + KD_y h), \quad \Phi_N = 0 \quad (14)$$

计算时把 A 取为 1(第二式来自 $\Phi(Y)$ 、 $\frac{d\Phi(Y)}{dY}$ 在 $Y = 0$ 连续)。

计算用迭代法。先取初始的 B 值, 由(8)式、(10)式算出 K , 从(14)式得到 Φ_0 和 Φ_1 , 然后由(12)式算出所有 Φ_i 。一次计算所得 $\Phi_N \neq 0$, 设计一种方法加以判断, 稍改变 B 后再作计算。迭代进行到 $|\Phi_N| < 10^{-11}$ 和相邻二次 B 值之差小于 10^{-11} 为止。整个计算所需迭代次数视所取 B 值与真值的差别而定, 只要不是差得太远, 一般为 10 次左右。一般终止时 $|\Phi_N|$ 和 $|\Delta B|$ 远小于 10^{-11} 。

直接积分法为将(2')式写成二个联立的一阶微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{dY} &= P \\ \frac{dP}{dY} &= v^2 [B - g(Y)] \Phi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将(15)式对 $[Y_i, Y_{i+1}]$ 区段积分, 得

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{i+1} &= \Phi_i + [(P_i + P_{i+1})/2]h \\ P_{i+1} &= P_i + [v^2(B - g_i)(\Phi_i + \Phi_{i+1})/2]h \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\Phi_i = \Phi(Y_i), \quad P_i = P(Y_i), \quad g_i = g[(Y_i + Y_{i+1})/2] \quad (17)$$

(16)式可重新写成递推公式组合

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{i+1} &= \{ \Phi [1 + v^2(B - g_i)h^2/4] + Ph \} / \{ 1 - v^2(B - g_i)h^2/4 \} \\ P_{i+1} &= P_i + [v^2(B - g_i)h/2] (\Phi + \Phi_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

边界条件现为

$$\Phi_0 = 1, \quad P_0 = KD_y, \quad \Phi_N = 0 \quad (19)$$

用泰勒展开, 可证明递推公式(12)式的误差为 $O(h^4)$, 而递推公式(18)式的误差为 $O(h^3)$, 因而本征值 B 的误差皆为 $O(h^2)$ 。可用 Aitken 外推法^[13]求得 B 的准确值。在 Y_m 固定的条件下, 若依次取 $N = 2^n N_0$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), 对应每个 n 值算出 B 值记为 B_n , 则可证明外推到 $N \rightarrow \infty$ 的极限值 B_∞ 为

$$B_\infty = B_{n+2} - \frac{(B_{n+2} - B_{n+1})^2}{B_{n+2} - 2B_{n+1} + B_n} \quad (20)$$

例如, $g(Y) = \exp(-Y^2)$, $v = 2$ 。计算证明在 h 一定时, 当 $Y_m \geq 30$, 在 10^{-11} 精度内, B 值与 Y_m 无关, 因而 $Y_m = 30$ 已足够大了。取 $Y_m = 30$, $N_0 = 1500$, 用差分方程法和直接积分法计算的结果见表 2 和表 3。

Table 2. Results of difference equation method

n	$B_n/10^{-2}$	$B_\infty/10^{-2}$	$(B_n - B)/10^{-11}$	$[(B_0 - B)/2^{2n}]/10^{-11}$
0	8.169884202		712424	712424
1	8.169349604		177826	178106
2	8.169215848	8.169171215	44070	44527
3	8.169182925	8.169172175	11147	11131
4	8.169174565	8.169171120	2787	2783
5	8.169172476	8.169171780	698	696
6	8.169171953	8.169171778	175	174
7	8.169171823	8.169171780	45	44
8	8.169171789	8.169171777	11	11

$B = 8.169171778 \times 10^{-2}$

Table 3. Results of direct integration method

n	$B_n/10^{-2}$	$B_\infty/10^{-2}$	$(B_n - B)/10^{-11}$	$[(B_0 - B_n)/2^{2n}]/10^{-11}$
0	8.165975340		- 3196438	- 3196438
1	8.168372152		- 799626	- 799110
2	8.168971735	8.169171765	- 200043	- 199777
3	8.169121768	8.169171840	- 50010	- 49944
4	8.169159276	8.169171779	- 12511	- 12486
5	8.169168653	8.169171779	- 3125	- 3122
6	8.169170998	8.169171780	- 780	- 780
7	8.169171584	8.169171779	- 194	- 195
8	8.169171730	8.169171778	- 48	- 49

$B = 8.169171778 \times 10^{-2}$

由表 2 和表 3 可知: 1) 两种不同方法的最终 B 值相同, 可以相互验证含 10 位有效数字的 B 值的准确性; 2) 计算误差 $B_n - B$ 较好地符合 $O(h^2)$ (即正比于 h^2) 的论断; 3) 在同样 Y_m 和 h 值的条件下, 差分方程法比直接积分法精度高。

因此, 本文选定差分方程法。在上例中, 当取 $Y_m = 10$, $N = 1000$, $h = 0.01$, 可算得 $B = 8.168611029 \times 10^{-2} \approx 8.169 \times 10^{-2}$, 4 位有效数字皆与准确值相同, 在实际中已足够精确。

用 IBM 586 PC 计算机作上述计算, 计算时间只需 0.02 秒。而文献[5]在 Sun Sparc2 工作站计算用 8 秒。

表 1 中第 3 列为按表 2、表 3 的相同方法求得。第 4 列是用简单差分方程法的计算结果。

对简单差分方程法, 在两种 $\nu = 2$ 的情形以及 $g(Y) = 1 - \delta_{\text{cut}}(Y)$ 、 $\nu = 3$ 的情形, B 的值较小, 计算时取 $Y_m = 10$, $N = 1000$, $h = 0.01$; 在其余 B 值较大的情形, 皆取 $Y_m = 7$, $N = 700$, $h = 0.01$ 。对于 B 小的情形, 光波导对光模的约束能力弱, 波函数的展宽较大, 故需较大的 Y_m 值才能保证 B 的有效数字准确性。图 2 是 $g(Y) = \exp(-Y^2)$, $\nu = 2$ 的光强分布。图 3 是 $\nu = 4$ 的光强分布。前者的半宽度是后者的两倍多。因此, 后者用 $Y_m = 4$ 也已经可以了。为了与 $\nu = 3$ 等其它情形同步, 统一取 $Y_m = 7$ 。

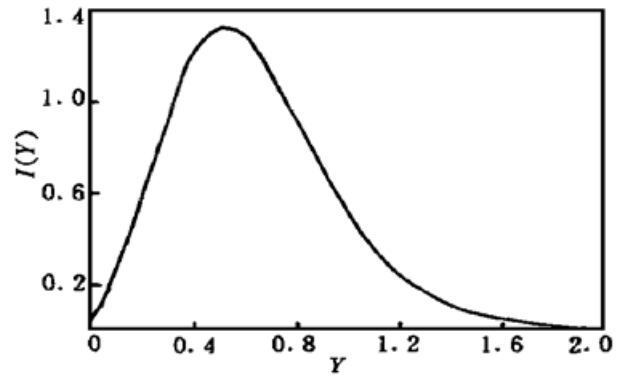
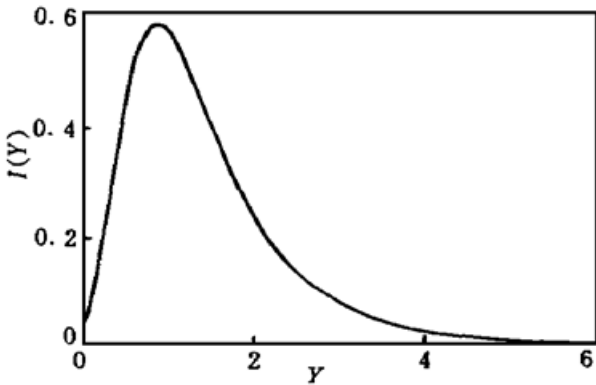


Fig. 2 Normalized field intensity distribution of TEO mode $Y = y/D_y$, $g(Y) = \exp(-Y^2)$, $\nu = 2$

Fig. 3 Normalized field intensity distribution of TEO mode $Y = y/D_y$, $g(Y) = \exp(-Y^2)$, $\nu = 4$

应指出, B 值越大, 波函数的展宽越小, 由于可使用较小 Y_m , 对同样的 h 值, 计算的点数 N 少了, 这样不但计算时间少, 并且计算的累积误差也小了。反之则大。曾经计算过阈值点附近的情形, 例如, $g(Y) = \exp(-Y^2)$, $\nu = 1.437$, 用 $Y_m = 500$ 。用差分方程法, $N = 25000 \times 2^n$, 可算到 $n = 5$, 对于 $n \geq 6$, 则出现不规则的误差, 最后只能得 7 位有效数字。而直接积分法则没有此问题, 得 $B = 6.078313875 \times 10^{-6}$ 。这是因为差分方程法(12) 式有较大的计算机累积误差, 而直接积分法(16) 式则几乎没有。因此, 直接积分法在阈值附近优于差分方程法。不过, 截止点通常可通过外推法求得, 用不着算那么小的 B 值, 差分方程法是足够准确的。

结 论 1) 用差分方程法, 取 $h = 0.01$ 和适当的 Y_m 值, 可得到 4 位有效数字的归一化传播常数 B 的数值, 远优于其它方法的结果, 且计算时间短。2) 文献[5]虽用了 800 个一阶元, 编程序和计算工作量大, 但第 2~ 3 位有效数字即已不准确。3) Sharma 用变分法所给出结果, 全部 2~ 3 位数字都是准确的。4) 表中所列三种近似解析方法误差大, 离阈值越近, 即 B 越小, 误差越大。

本文作者还计算了其它可对比的例子, 结论也是同样。有限元法的准确性是相对于近似解析法来说的, 它比不上 Sharma 的变分法, 更比不上本文用差分方程法求解的结果。用更麻烦的二阶元^[9]并不能使情况有改善^[5]。进一步发展为多阶元即对每个元作近似解析解, 使计算大为复杂化, 所以只能用减少元的数量的办法来补救计算机内存和机时大的问题, 其精度亦不可能比使用一阶元的有限元法有明显改善。这样, 用差分方程法, 按(12) 式递推, 迭代

求解, 可以简单地但足够准确地求一维(2)式的解, 得出符合边界条件的本征值和本征函数。

3 补充讨论

本文计算平面光波导的精度那么高, 主要由于递推公式(12)式或(18)式直接简洁, 能允许在 $[0, Y_m]$ 内的分段数 N 很大, 因而误差 $O(h^2)$ 很小; 还可用 Aitken 外推法把 $O(h^2)$ 误差去除。

迭代时改变 B 的方法有多种, 最简单的是线性判断法, 另外有更复杂的非线性判断法。本文作者在编程序时用的是线性判断法。

第一循环分两步。第一步是取定初始的 B 值, 记为 B_1 , 把 B_1 和(14)式代入(12)式算得 $\{\Phi_i\}$, ($i = 0, 1, \dots, N$), 取 Φ_N 记为 Φ_{N1} 。第二步, 令 $B = B'_1 = B_1 + \Delta B$, ΔB 取 0.001, 把 $B = B'_1$ 和(14)式代入(12)式再算, 得 Φ_N 记为 Φ'_{N1} 。由此可得 $\frac{\partial B}{\partial \Phi_N} \approx \Delta B / (\Phi'_{N1} - \Phi_{N1})$ 。线性判断法是取

$$B_2 = B_1 + [\Delta B / (\Phi'_{N1} - \Phi_{N1})](O - \Phi_{N1}) \quad (21)$$

然后开始第二循环、以后第三循环、……一直下去。

令 B_j 、 Φ_{Nj} 为第 j 个循环所使用的 B 值、所求得的 Φ_N ($j \geq 2$), 则取第 $j+1$ 循环的 B 值为 B_{j+1}

$$B_{j+1} = B_{j-1} + [(B_j - B_{j-1}) / (\Phi_{Nj} - \Phi_{N,j-1})](O - \Phi_{N,j-1}) \quad (22)$$

所求得的 Φ_N 为 $\Phi_{N,j+1}$ 。当下列两式同时满足时令循环中断:

$$|B_{j+1} - B_j| < 10^{-11}, \quad |\Phi_{N,j+1}| < 10^{-11} \quad (23)$$

最后一循环的 B ($= B_{j+1}$)、 $\{\Phi_i\}$ 、($j = 0, \dots, N$) 便是所需要的结果。注意到此时 Φ_0 取为 1, 波函数未归一化, $\{|\Phi_i|\}$ 的极大值远大于 1, 故归一化后的 $|\Phi_N|$ 远小于 10^{-11} 。实际计算时发现, 循环结束时(23)式左端的数值一般远小于 10^{-11} , 原因可能是收敛很快, 第 j 循环时 $|B_j - B_{j-1}|$ 、 $|\Phi_{N,j}|$ 未能同时小于 10^{-11} , 再进行一循环则已远小于它了。

线性判断法已可有宽广的收敛范围。例如, 表 1 中 $g(Y) = \exp(-Y^2)$ 和 $\nu = 2$ 的情形, 正确的 B 值约为 0.082, 当第一循环中起始的 B 值取 0.03 到 4.3, 皆可收敛到正确的结果, 起始 B 值取 0.05 到 0.2 则迭代所需的循环数小于等于 10。因此, 不需用更复杂的非线性判断法。

衷心感谢冯莹副教授提供的技术资料 and 为本文作图。

参 考 文 献

- [1] Laznicka O, Freier L, Gilmore J *et al.*. IFOG technology achievement at draper laboratory. *Proc. SPIE, Fiber Optic and Laser Sensors XII*, 1994, **2292**: 177~ 191
- [2] Auch W. Progress in fiber-optic gyro development and application. *Proc. SPIE, Fiber Optic and Laser Sensors XI*, 1993, **2070**: 104~ 112
- [3] Suchoski P G, Findkly T K, Leonberger F J. Stable low-loss proton-exchanged LiNbO₃ waveguide devices with no electro-optic degradation. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(11): 1050~ 1052
- [4] Ohno A, Usui R, Suzuki K *et al.*. Intermediat and moderate grade fiber optic gyroscope for industrial applications. *Proc. SPIE, Fiber Optic and Laser Sensors XII*, 1994, **2292**: 166~ 176

- [5] Katstrikou F A, Rahman B M A, Thomas K *et al.*. Finite element analysis of diffused anisotropic optical waveguides. *J. Light Wave Technol.*, 1996, **14**(5) : 780~ 786
- [6] 况蕙荪, 蒋伯诚, 张树发. 计算物理引论, 长沙: 湖南科学技术出版社印, 1987. 278~ 304
- [7] Rahman B M A, Davies J B. Finite-element analysis of optical and microwave problems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1984, **MTT-32**(1) : 20~ 28
- [8] Strake E, Bava G P, Montrosset I. Guided modes of Ti:LiNbO₃ channel waveguides: A novel quasi-analytical technique in comparison with the scalar finite-element method. *J. Light Wave Technol.*, 1988, **6**(6) : 1126~ 1134
- [9] Koshiha M. *Optical Waveguide Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1992.
- [10] Suhara T, Handa Y, Nishihara H *et al.*. Analysis of passive channel waveguides and directional couplers with graded-index profile. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(9) : 807~ 815
- [11] Bersiner L, Hempelmann U, Strake E. Numerical analysis of passive integrated optical polarization splitters: comparison of finite-element method and beam-propagation method results. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, **8**(2) : 422~ 433
- [12] Sharma A, Bindal P. Analysis of diffused planar and channel waveguides. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1993, **29**(1) : 150~ 153
- [13] Rahman B M A, Davies J B. Vector-H finite element solution of GaAs/GaAlAs ribwaveguides. *IEEE Proc.*, 1985, **132**(6) : 349~ 353

Self Consistent Field Calculation of Light Waveguide - Diffused Planar Optical Waveguide

Gao Bolong Jin Shilong

(Department of Applied Physics, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

(Received 1 December 1997; revised 4 May 1998)

Abstract The diffused planar light waveguide problem is solved by using the difference equation method and the direct integration method, and propagation constants with 10 significant figures are obtained. It is proved that a simple difference equation calculation in this problem is superior to the finite element method and the others. It is one of the mathematical foundations of self consistent field method to solve the channel waveguide problem.

Key words diffused planar waveguide, propagation constant, finite element method.