

# 基于快速傅里叶变换和汉克耳变换的 逆阿贝尔变换

江少恩 刘忠礼 唐道源 郑志坚

(中国工程物理研究院核物理与化学研究所, 高温高密度等离子体重点实验室, 成都 610003)

**摘 要** 激光等离子体实验中的轴对称的 X 光的体发射强度及光学全息干涉的测量, 需要采用逆阿贝尔( Abel) 变换。用快速傅里叶变换(FFT) 和汉克耳( Hankel) 变换的算法数值求解逆阿贝尔变换, 具有精度高、可在频域内滤波的特点。

**关键词** 阿贝尔变换, 快速傅里叶变换, 汉克耳变换。

## 1 引 言

对等离子体有关物理量进行空间分辨的研究, 可以给出描述等离子体物理过程发生的重要数据。只要等离子体具有轴对称和光性薄的性质, 利用阿贝尔逆变换便可以从测量得到的某种物理量沿测量方向积分, 可求出径向分布值<sup>[1-3]</sup>。

在激光等离子体实验中, 阿贝尔变换主要有两个方面的应用。首先, 通过二次曝光产生的全息干涉测量干涉条纹得到光学长度  $\Phi(x)$ , 在忽略折射的情况下<sup>[4]</sup>:

$$\Phi(x) = \int [n(r) - 1] dy \quad (1)$$

其中  $n$  为折射率, 而  $n = (1 - n_e/n_c)^{1/2}$ ,  $n_c = 1.113 \times 10^{21} \lambda^{-2} (\text{cm}^{-3})$ ,  $\lambda$  为全息干涉的激光波长, 以  $\mu\text{m}$  为单位。通过逆阿贝尔变换, 由  $\Phi(x)$  求得  $n(r)$ , 于是可求出电子密度  $n_e$ 。

其次, 通过所测量的轴对称的线积分 X 光  $I(x)$  反演出轴对称的体分布  $\epsilon(r)$ , 并进一步由轫致辐射公式<sup>[5, 6]</sup>

$$\epsilon(r, \lambda) = n^2 f(z, T_e) \exp(-h\nu/kT_e) \quad (2)$$

其中  $T_e$  为电子温度,  $\nu$  为 X 光的频率,  $\epsilon(r, \lambda)$  是光波长为  $\lambda$  的 X 光的体发射强度,  $Z$  为原子序数。利用不同滤膜产生两个不同波段的 X 光得到光强  $\epsilon(r, \lambda_1)$  和  $\epsilon(r, \lambda_2)$ , 由光强比

$$R(r) = \epsilon(r, \lambda_2)/\epsilon(r, \lambda_1) = \exp[(\nu_2 - \nu_1)/kT_e],$$

求出  $T_e$ , 并求得  $n_e$ 。

因此, 阿贝尔变换在激光等离子体实验中有重要的应用。为了处理全息干涉实验数据和测量等离子体 X 光辐射的体分布, 有必要对逆阿贝尔变换进行研究。本文提出一种新的方法来计算逆阿贝尔变换。此方法是两步过程。先对所测得的量  $\Phi(x)$  和  $I(x)$  作快速傅里叶变换

(FFT), 再作汉克耳变换。如果含有噪声, 对  $\Phi(x)$  和  $I(x)$  作快速傅里叶变换后, 进行维纳 (Wiener) 滤波, 再进行汉克耳变换。

### 2 阿贝尔变换及其逆变换

对沿轴对称分布的物理量的线积分而得到的投影称为阿贝尔变换, 反之, 由投影求解轴对称分布的物理量过程称之为逆阿贝尔变换。设  $\epsilon(r)$  为轴对称的源分布函数,  $I(x)$  为沿  $y$  方向测量得到的投影(见图 1):

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(r) dy \tag{3}$$

在这个积分中,  $x^2 + y^2 = r^2, y_0^2 = R^2 - x^2$ 。当半径大于  $R$  时  $\epsilon(r)$  可忽略不计, 并利用对称性的性质, 可得:

$$I(x) = 2 \int_x^R \frac{\epsilon(r) r dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \tag{4}$$

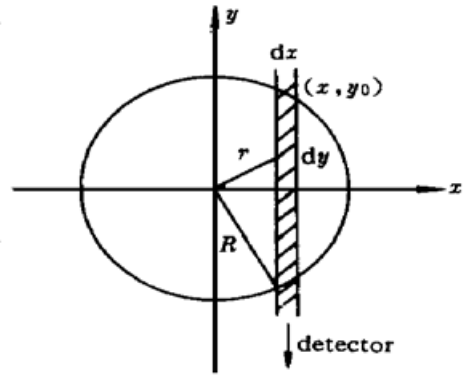


Fig. 1 The geometry of the variables

(4) 式便是著名的阿贝尔积分方程, 也就是阿贝尔变换。 $I(x)$

可由诊断设备测量而得, 它是  $\epsilon(r)$  的积分值,  $\epsilon(r)$  的求解为阿贝尔逆变换:

$$\epsilon(r) = - \frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{dI/dx dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \tag{5}$$

### 3 由快速傅里叶变换和汉克耳变换求逆阿贝尔变换

实际上, 由于(5)式积分中的积分下限存在奇点, 并且投影的微分  $dI/dx$  将导致数据的噪声进一步恶化, 因此, 由测量的投影  $I(x)$  直接应用(5)式求逆阿贝尔变换是很困难的。为了求解(3)式, 人们避开奇点和投影的微分问题, 采用了一些数值方法。如 Barr 采用分段多项式近似求逆阿贝尔变换, 而 Bockasten 通过拟合三阶多项式求逆变换, 但是这两种方法的精度都不高。本文通过快速傅里叶变换和汉克耳变换方法即变换法求解逆阿贝尔变换, 其数学基础是将(4)式和(5)式转换成傅里叶变换和汉克耳变换形式。

由于  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , (4)式可写成:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\sqrt{x^2 + y^2}) dy \tag{6}$$

取(6)式的一维傅里叶变换, 得:

$$\mathcal{A}[I(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\sqrt{x^2 + y^2}) \exp(-i2\pi kx) dx dy \tag{7}$$

将直角坐标系变到极坐标系, 则上式成为:

$$\mathcal{A}[I(x)] = 2\pi \int_0^{\infty} r \epsilon(r) J_0(2\pi kr) dr \tag{8}$$

其中  $J_0(2\pi kr)$  是第一类零阶贝塞尔 (Bessel) 函数, (8)式右边的积分为  $\epsilon(r)$  的汉克耳变换, 上式的推导过程中用到贝塞尔函数的积分表达式。

因此, 由(8)式取  $\mathcal{A}[I(x)]$  的逆汉克耳变换, 就可以得到轴对称分布  $\epsilon(r)$  的值, 即

$$\epsilon(r) = 2\pi \int_0^{\infty} k J_0(2\pi kr) \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) \exp(-i2\pi kx) dx dk = H\{\mathcal{F}[I(x)]\} \tag{9}$$

上式中  $H\{\}$  代表汉克耳变换,  $\mathcal{F}$  表示傅里叶变换。

由(9)式可以看出,  $\epsilon(r)$  的求得即逆阿贝尔变换通过两次变换得到, 首先对  $I(x)$  进行傅里叶变换得到  $\mathcal{F}[I(x)]$ , 然后接着进行汉克耳变换得到  $H\{\mathcal{F}[I(x)]\}$ , 即为  $\epsilon(r)$ , 所以可以称(9)式所表示的算法为变换法。另外, 由(9)式知道, (9)式所表示的逆阿贝尔变换算法比用(5)式求逆阿贝尔变换更为优越。这是因为: 首先, 它避免因积分下限处奇点带来的困难; 其次, 在对  $I(x)$  进行傅里叶变换后, 直接在频域进行滤波从而降低噪声的影响; 最后, (9)式是一个两步过程, 第一步的傅里叶变换可利用快速傅里叶变换进行计算, 第二步的汉克耳变换也可以通过快速汉克耳变换(FHT)进行计算, 因此速度可以大大提高。综合上述几点, 由(9)式进行逆阿贝尔变换确实是一个较好的计算方法。下面结合一些实例进行说明。

### 4 数值计算结果及分析

选择两种有代表性的分布用变换法进行计算, 一种为高斯型分布:

$$\epsilon(r) = \exp(-\pi r^2) \tag{10}$$

另一种为双峰型分布:

$$\epsilon(r) = 1 + 4r^2 - 5r^4 \tag{11}$$

在计算中, 对高斯分布, 测量范围为  $0 \leq r \leq 2.5$ , 但为了减少或避免吉布斯(Gibbs)振荡, 计算范围扩展为  $0 \leq r \leq 5, 0 \leq x \leq 5$ 。取样点数为  $N = 256$ , 取样间隔为  $\Delta x = 10/N$ 。对双峰分布, 测量范围为  $0 \leq r \leq 1$ , 为了减少或避免吉布斯振荡, 计算范围扩展为  $0 \leq r \leq 2, 0 \leq x \leq 2$ 。取样点数为  $N = 128$ , 取样间隔为  $\Delta x = 4/N$ 。

计算时, 由(3)式或(4)式对两种分布[(10)和(11)式]用数值积分方法或解析积分方法而产生投影  $I(x)$ , 然后由(9)式计算出轴对称分布  $\epsilon(r)$ , 计算结果分别见图2和图3。图中曲线表示由(10)和(11)式直接计算的  $\epsilon(r)$ , 小圆表示由投影  $I(x)$  通过(9)式计算的结果  $\epsilon_1(r)$ 。由图可以看出, 计算结果与原分布相当一致。

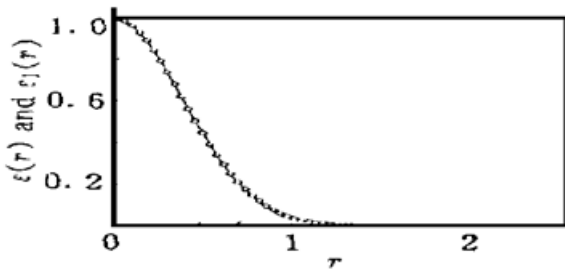


Fig. 2  $\epsilon(r)$  and  $\epsilon_1(r)$  vs  $r$ . —:  $\epsilon(r)$ , actual value;  $\circ$ :  $\epsilon_1(r)$ , calculated value

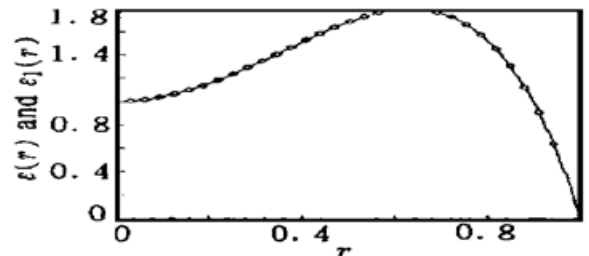


Fig. 3  $\epsilon(r)$  and  $\epsilon_1(r)$  vs  $r$ . —:  $\epsilon(r)$ , actual value;  $\circ$ :  $\epsilon_1(r)$ , calculated value

计算精度由标准误差  $e$  来衡量, 其表达式为:

$$e = \left\{ \sum_{i=1}^{N/2} [\epsilon_1(r_i) - \epsilon(r_i)]^2 / N \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^{N/2} [\Delta\epsilon(r_i)]^2 / N \right\}^{1/2} \tag{12}$$

上式中  $\epsilon_1(r)$  表示计算的结果,  $N$  为取样点的个数。  $e$  越小, 计算误差就越小, 当  $e = 0$  时,  $\epsilon_1(r) = \epsilon(r)$ , 即可以精确反演得到原分布。但实际上, 会存在一定的测量误差和噪声的影响, 即使不存在噪声和测量误差, 也存在计算误差, 只是大小不同而已。由(12)式可得到,

对高斯分布,  $e = 1.0 \times 10^{-5}$ , 对双峰分布,  $e = 1.2 \times 10^{-3}$ 。

为了研究噪声的影响, 特地在计算的投影中加一定的噪声:

$$g(x) = I(x) + n(x) \tag{13}$$

其中  $g(x)$  为含有噪声的投影,  $n(x)$  为噪声。当  $n = 0$  时, 不需要对  $I(x)$  在频域内进行滤波。当  $n \neq 0$  时, 采用维纳滤波器进行滤波, 维纳滤波器为<sup>[7]</sup>:

$$T(k) = \frac{\Phi_i(k)}{\Phi_i(k) + \Phi_n(k)} \tag{14}$$

式中  $\Phi_i(k)$ 、 $\Phi_n(k)$  分别为信号即投影  $I(x)$  和噪声的功率谱密度。它们是各自的自相关的傅里叶变换, 即:

$$\Phi_i(k) = \mathcal{F}\{R_{ii}(x)\}, \quad \Phi_n(k) = \mathcal{F}\{R_{nn}(x)\} \tag{15}$$

其中  $R_{ii}(x)$ 、 $R_{nn}(x)$  为自相关, 即为:

$$R_{ii}(x) = \int (x') I(x' + x) dx', \quad R_{nn}(x) = \int (x') n(x' + x) dx' \tag{16}$$

当  $n(x)$  为白噪声时,  $\Phi_n = \lambda$ , 代入(14)式可得到:

$$T(k) = \frac{\Phi_i(k)}{\Phi_i(k) + \lambda} \tag{17}$$

对于噪声问题, 仅对高斯型分布进行研究。取方差  $\sigma^2 = 0.001$  的高斯白噪声进行计算。信噪比  $S/N$  定义为:

$$S/N = 10 \log \left[ \frac{\sum_{k=1}^{N/2} I^2(x_k)}{\sum_{k=1}^{N/2} n^2(x_k)} \right] \tag{18}$$

由上式得到的信噪比为 21。由白噪声的关系式<sup>[8]</sup>:

$$\lambda = \Phi_n = \sigma^2 \Delta x \tag{19}$$

得到(17)式中的  $\lambda$ 。无噪声和含噪声的投影  $I(x)$  和  $g(x)$  见图 4。不用滤波由  $g(x)$  计算得到的结果见图 5, 得到  $e = 9.0 \times 10^{-3}$ 。采用(17)式的滤波方法, 得到的结果见图 6, 得到  $e = 4.0 \times 10^{-4}$ 。比较图 5 和 6, 可以看出, 经过滤波后, 反演精度确实大为提高。

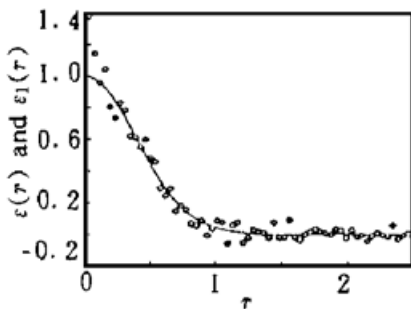


Fig. 4  $I(x)$  and  $g(x)$  vs  $x$ . —:  $I(x)$ ;  $\circ$ :  $g(x) = I(x) + n(x)$

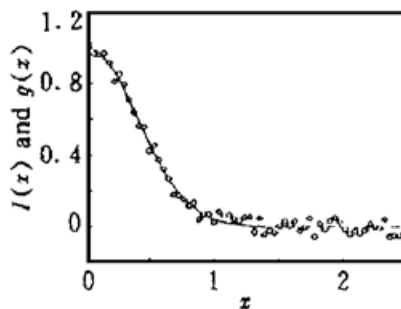


Fig. 5  $\epsilon(r)$  and  $\epsilon_1(r)$  vs  $r$ . —:  $\epsilon(r)$ , actual value;  $\circ$ :  $\epsilon_1(r)$ , calculated value

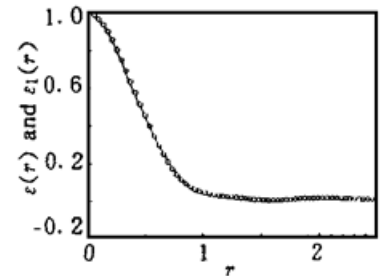


Fig. 6  $\epsilon(r)$  and  $\epsilon_1(r)$  vs  $r$ . —:  $\epsilon(r)$ , actual value;  $\circ$ :  $\epsilon_1(r)$ , calculated value

## 5 结论和讨论

本文采用一种新的方法计算逆阿贝尔变换, 即通过两次积分变换(快速傅里叶变换和汉克耳变换)对轴对称的投影进行反演, 由于利用快速傅里叶变换和快速汉克耳变换, 使计算

速度大大提高;另一方面,在频域下用维纳滤波器进行最优滤波从而抑制噪声,提高了精度。因此,变换方法对于轴对称分布的重建即逆阿贝尔变换来说是一种实用而有效的数值计算方法。

### 参 考 文 献

- [1] Bockasten K. Transformation of observed radiances into radial distribution of the emission of a plasma. *J. Opt. Soc. Am.*, 1961, **51**(9) : 943~ 947
- [2] Barr W. Method for computing the radial distribution of emitters in a cylindrical source. *J. Opt. Soc. Am.*, 1962, **52**(8) : 885~ 888
- [3] 朱士尧. 等离子体诊断中的 Abel 逆变换. *核聚变与等离子体物理*, 1987, **7**(2) : 102~ 107
- [4] Sweeney D, Attwood D, Coleman L. Interferometric probing of laser produced plasmas. *Appl. Opt.*, 1976, **15**(5) : 1126~ 1128
- [5] Eidmann K, Key M, Sigel K. X-ray emission for laser-irradiated plane solid targets. *J. Appl. Phys.*, 1976, **47**(6) : 2402~ 2414
- [6] Nakai S, Shinohara S, Katayama M *et al.*. Development of X-ray emission computed tomography. *Rev. Sci. Instrum.*, 1990, **61**(10) : 2783~ 2785
- [7] 帕普里斯著,毛培德译. 信号分析,北京:科学出版社,1981. 375
- [8] 斯特恩斯著,高顺泉,江慰德,叶金官等译. 数字信号分析,北京:人民邮电出版社,1983. 353

## Inverted Abel Transform Based on FFT and Hankel Transform

Jiang Shaoen    Liu Zhongli    Tang Daoyuan    Zheng Zhijian

(*High Temperature and High Density Plasma Physics Laboratory, Institute of Nuclear Physics and Chemistry, China Academy of Engineering Physics, Chengdu 610003*)

(Received 19 January 1998)

**Abstract** The inverted Abel transform is necessary for computing the X-ray emission radial distribution and optical holographic interferometric data. A new algorithm to calculate the inverse Abel transform is introduced, which performs fast Fourier transform (FFT) first and then Hankel transform. This algorithm offer higher accuracy and it can be filtered in frequency space.

**Key words** Abel transform, fast Fourier transform (FFT), Hankel transform.