

布拉格型声光双稳系统对弱信号的放大作用研究

黄力群¹⁾ 简伟¹⁾ 王智¹⁾ 简水生¹⁾ 沈柯²⁾

1), 北方交通大学光波技术研究所, 北京 100044

2), 长春光学精密机械学院光学物理系, 长春 130022

摘 要 在分岔点附近, 通过对描述布拉格(Bragg)型声光双稳系统的差分-微分方程进行线性稳定性分析, 得到了系统对小信号放大时的共振频率, 给出了放大倍数的表达式。然后通过数值计算模拟出系统对小信号的放大过程, 结果与理论分析相符。

关键词 声光双稳系统, 弱信号放大, 分岔点, 分岔参数。

1 引 言

带延时反馈的光学双稳系统的分岔及混沌行为得到人们的广泛研究^[1, 2], 在靠近倍周期分岔点处任何非线性系统都能对频率靠近半基频的信号进行放大, 系统越靠近分岔点, 放大现象越明显^[3], Derighetti 等人还从实验上研究了倍周期激光器对弱信号的放大作用^[4], 在分岔点附近的这一性质可以使倍周期系统作为弱信号的探测器。

本文在分岔点附近, 通过对描述布拉格型声光双稳系统的差分-微分方程进行线性稳定性分析, 得到了系统对小信号放大时的共振频率, 给出了放大倍数的表达式。然后通过数值计算模拟出系统对小信号的放大过程。

2 布拉格型声光双稳系统对弱信号放大的理论分析

描述布拉格型声光双稳系统动态行为的差分-微分方程为^[5]:

$$\tau \frac{dX(t)}{dt} + X(t) = \pi \{ A - \lambda \sin^2 [X(t - \tau_0) - X_B] \} \quad (1)$$

式中 τ 为无延时系统的固有弛豫时间, λ 为分岔参数, 它与输入的激光光强有关; A 和 X_B 分别为放大器和驱动源的偏置, 都是常数; τ_0 为延迟时间, X 为与系统输出的激光光强有关的量。

设系统工作在周期 2 分岔点处, 则相应的方程为:

$$X^* = \pi [A - \sin^2 (X^* - X_B)] = f(X^*) \quad (2)$$

$$\left| \frac{df(X)}{dX} \right|_{X=X^*} = 2\pi\lambda \sin(X^* - X_B) \cos(X^* - X_B) = 1 \quad (3)$$

在外加小信号 $a \cos \omega t$ 的扰动下, 系统输出 $X(t)$ 附近有一小的 $u(t)$ 扰动, 此时描述系统的方程为:

$$\tau \frac{d[X(t) + u(t)]}{dt} + [X(t) + u(t)] = \pi \{ A - \lambda \sin^2 [X(t - \tau_D) + u(t - \tau_D) - X_B] \} + a \cos \omega t \quad (4)$$

因 $u(t - \tau_D)$ 远小于 $X(t)$, 对上式右方第二项作线性处理, 作时间标度变换 $t' \rightarrow t/\tau_D$, 并用(1)式与(3)式可得:

$$\epsilon u'(t') + u(t') + u(t' - 1) = a \cos \omega' t' \quad (5)$$

式中 $\epsilon = \tau/\tau_D$, $\omega' = \omega\tau_D$, 利用格林函数, (5)式的解为:

$$u(t) = \int_0^t G(t') a \cos(\omega' t') dt' \quad (6)$$

$$G(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{1 + \epsilon s + \exp(-s)} \right] \quad (7)$$

式中 L^{-1} 为拉普拉斯(Laplace)逆变换算子, 因 $\tau \ll \tau_D$, 所以 $\epsilon \ll 1$, 将 s 按展开至 2 阶, 可以得到(7)式中各极点为: $s_k = s_{0k} + \epsilon s_{1k} + \epsilon^2 s_{2k}$, 其中 $s_{0k} = \pm i(2k+1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$G(t) = \frac{\exp \{ [(1 - \epsilon + \epsilon^2) s_{0k} + (\epsilon^2 s_{0k}^2 / 2)] t \}}{(1 + \epsilon) + (\epsilon - \epsilon^2) s_{0k}} \quad (8)$$

可以看出一系列本征频率为 $\omega'_k = (1 - \epsilon + \epsilon^2)(2k+1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), 与 ω'_k 相应的阻尼项为 $-\gamma_k = \epsilon^2 s_{0k}^2 / 2 = -(\epsilon^2 / 2)[(2k+1)\pi]^2$ 。以基模 $\omega_0 = (1 - \epsilon + \epsilon^2)\pi$ 为例, 在(1)式左方第一项的固有弛豫时间影响下, 其周期比无 τ 时周期 2 的振荡周期略增长了一个微量。系统工作在分岔点附近时, γ_k 意味着在微力作用下, 稳态的暂时偏离将会恢复到稳态。也可以看出各次高阶模与基模相比, γ_k 是以 $(2k+1)^2$ 的倍数快速增长。在外力 $a \cos \omega t$ 的作用下, 系统作多模振荡, 由于各高阶模阻尼因子很大, 在 $\omega' \approx \omega'_0$ 时, 可将高次模略去。将(8)式代入(6)式, 忽略暂态, 得到基模的共振频率为 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0}$, 积出共振时的响应如下:

$$u_0(t) = A_0 a \cos(\omega t + \phi_0) \quad (9)$$

$$\omega = \omega' / \tau_D = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0} / \tau_D \approx \pi / (\tau + \tau_D) \quad (10)$$

$$\phi_0 \approx \arctan \left[\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0} \epsilon \pi / (\omega_0 + \epsilon \pi \gamma_0)}{\omega_0} \right] \quad (11)$$

$$A_0 \approx \frac{[1 + 0.5(1 + 2\epsilon + 2\epsilon^2)]^2 + \epsilon^2 \pi^2}{0.5\epsilon^2 \pi^2 (1 + \epsilon) (1 + \epsilon^2 \pi^2)} \quad (12)$$

式中 ω 为声光双稳系统放大小信号的共振角频率。因 $\epsilon \ll 1$, (10)式忽略了 ϵ^2 项, ϕ_0 为响应信号的相位, A_0 就是小信号的放大倍数, 是与 ϵ 有关的量。上述特性使得声光双稳系统作小信号的放大器有很多优点: 1) 放大器的响应频率可由延迟时间 τ_D 来调节; 2) 放大倍数可以由延迟时间 τ_D 来调节, 当 $\epsilon \ll 1$ 时, 随着 ϵ 的减小, 放大倍数 A_0 将近似地以 $1/\epsilon^2$ 的速度迅速增长, 只要 ϵ 足够小, 可得到足够大的放大倍数; 3) 由于高次模的阻尼很大, 系统的频率响应也较好。

3 分岔点附近声光双稳系统对弱信号放大作用的数值计算

在长延时条件下由(1)式可得迭代周期为 τ_D 的迭代方程:

$$X_{n+1} = \pi[A - \lambda \sin^2(X_n - X_B)] \tag{9}$$

其中参数 A 的值取为 0.5 ，参数 X_B 的值取为 0.25π 。通过迭代方程就可计算出声光双稳系统的分岔图，如图 1 所示，第一个分岔点对应的 λ 值为 0.37 ，周期 2 解区间对应的 λ 值为 $0.37 \times \dots \sim 0.63$ ，由图 1 还可得到不同的 λ 值对应的不同 X 值，下面的任务就是以它们作为初值来计算输出光强 X 与时间 t 之间的关系。

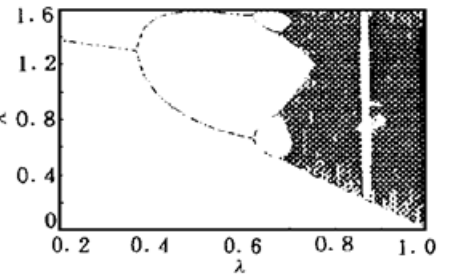


Fig. 1 Bifurcation figure

将弛豫时间 τ 取为 $0.5 \mu\text{s}$ ，而延迟时间取为 $5 \mu\text{s}$ ，根据 (10) 式可知，此时小信号的共振周期大约 T_0 为 $11 \mu\text{s}$ 。分岔参数 λ 的取值为 0.37 ，输出激光光强 X 的初值由图 1 可得到，此时声光双稳系统已临近分岔状态，用龙格库塔法解 (1) 式就能计算出输出光强 X_0 与时间 t 之间的关系，如图 2 所示。

由图 2 可看出 $X_0(t)$ 作衰减振荡，经过一段时间 $X_0(t)$ 的振幅逐渐衰减为零，图 2 中声光双稳系统在分岔点附近的振荡周期 T 为 $11 \mu\text{s}$ ，与小信号的共振周期近似相等。

然后在放大器的偏置上加入一个小信号 $I_0(t) = A_1 \sin(2\pi t/T_0 + \pi)$ ，此时描述声光双稳系统状态的差分方程变为：

$$\tau dX(t)/dt + X(t) = \pi\{A + A_1 \sin(2\pi t/T_0 + \pi) - \lambda \sin^2[X(t - \tau_D) - X_B]\} \tag{10}$$

式中 τ_D 、 τ 、 A 与 X_B 的取值不变，小信号的振幅 A_1 取值为 0.01 ，相位为 π ，频率 T_0 的取值为 $11 \mu\text{s}$ ，即小信号的频率等于声光双稳系统在分岔点的固有振荡周期，用龙格库塔法计算 (10) 式，可得到加小信号后的输出光强 X_1 与时间 t 的关系曲线，如图 3 所示。

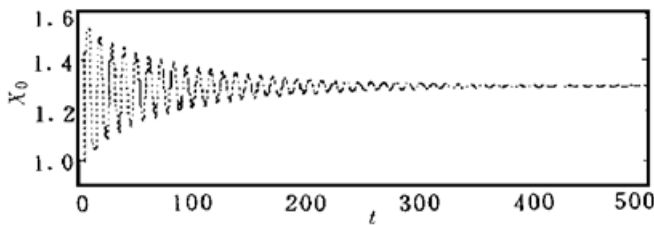


Fig. 2 Curve of X_0 and time without a small, signal $\lambda = 0.37, A = 0.5, X_B = \pi/4, \tau = 0.5 \mu\text{s}, \tau_D = 5 \mu\text{s}$

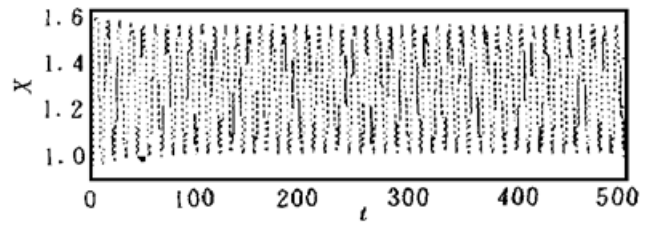


Fig. 3 Curve of X_1 and time with a small signal $\lambda = 0.37, A = 0.5, X_B = \pi/4, \tau = 0.5 \mu\text{s}, \tau_D = 5 \mu\text{s}$

为了看清小信号与声光双稳系统的耦合过程，以及更清楚地得到被放大的信号，将加小信号后系统的输出光强减去无小信号时的系统输出光强，即 $I_1(t) = X_1(t) - X_0(t)$ ，结果如图 4 所示。

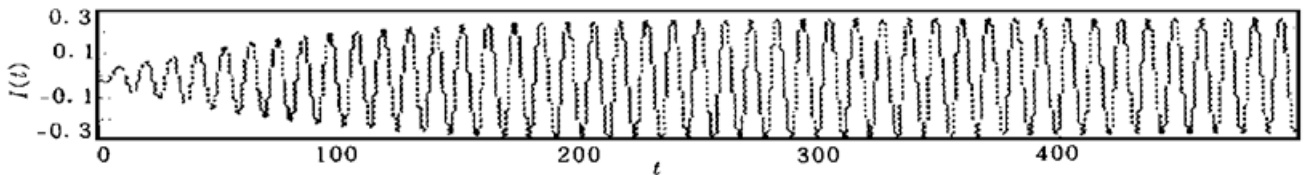


Fig. 4 Waveform of amplified signal, $f_0 = 1/[2(\tau_D + \tau)]$, magnification 26 is obtained

从图 4 可以看出小信号逐渐与声光双稳系统耦合，并逐渐被放大，这个暂态过程大约只需 12 个左右的振荡周期，然后便达到稳定值。此时小信号的放大倍数大约为 26 倍，与 (12) 式相符合。

当小信号的频率 T_0 取值为 $2\tau_D$ 时，它的频率就与声光双稳系统的固有频率有一个微小的

差值,按上述步骤可计算出此时的 $I_1(t)$,如图 5 所示。

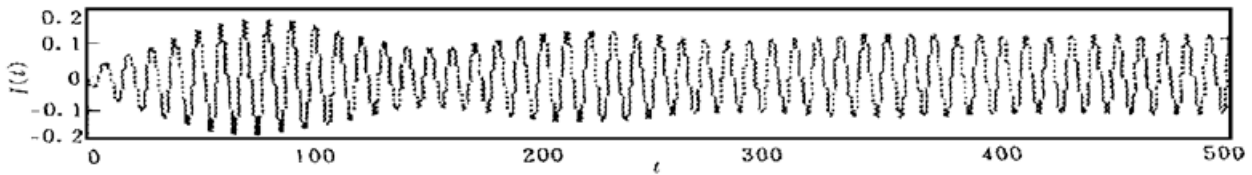


Fig. 5 Waveform of amplified signal, $f_0 = 1/(2\tau_0)$, magnification 10 is obtained

从图 5 可以看出 $I_1(t)$ 先是具有拍的特征曲线,但随时间逐渐消失,最后振幅趋于稳定,这个暂态过程大约需要 40 个振荡周期的时间, $I_1(t)$ 的频率仍然为 $(1/2)\tau_0$,当 $I_1(t)$ 的振幅最后达到稳定值时,加到声光双稳系统上的小信号被放大了 10 倍。

结 论 从理论上研究了布拉格型声光双稳系统对弱信号的放大作用,在分岔点附近,通过对描述布拉格型声光双稳系统的差分-微分方程进行线性稳定性分析,得到了系统对小信号放大时的共振频率,并给出了放大倍数的表达式。

然后,通过计算布拉格型声光双稳系统的分岔图,确定了分岔点所对应的分岔参数值,并得到了求解微分方程所需要的初值。在此基础上用 RUNGKT 法计算了差分-微分方程,结果表明声光双稳系统在分岔点附近对弱信号有放大作用,数值计算结果与理论分析相符。

参 考 文 献

- [1] Hunt E R. Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: The diode resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67** (15): 1953~ 1955
- [2] Lima R, Pettini M. Suppression of chaos by resonant parametric perturbations. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(2): 726~ 733
- [3] Wiesenfeld K, Korpel A, Mark J *et al.*. Small-signals amplification by nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**(1): 13~ 22
- [4] Derighetti B, Ablowitz R, Curtis A *et al.*. Small-singnals amplification by NMR laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**(17): 1746~ 1753
- [5] Vallee R, Delisle C, Chrostowski J. Noise versus chaos in acousto-optic bistability. *Phys. Rev. (A)*, 1984, **30** (1): 336~ 342

Study on Small-Signal Amplification by an Acousto-optic Bistable System Operating in the Bragg Region

Huang Liqun¹⁾ Jian Wei¹⁾ Wang Zhi¹⁾
Jian Shuisheng¹⁾ Shen Ke²⁾

- (1), Institute of Lightwave Technology, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)
(2), Department of Optical Physics, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Changchun 130022
(Received 14 July 1997; revised 24 March 1998)

Abstract Near the bifurcation point, the linear stability of difference-differential equation which describes acousto-optic bistable systems is analyzed, the expression of resonance frequency and amplification multiple are given. The amplification process of small signal is simulated by numerical calculation, the simulation result is consistent with theoretical analysis.

Key words acousto-optic bistable system, small-signals amplification, bifurcation point, bifurcation parameter.