

最佳摄动量法在光学计算机层析图像重建逆问题中的应用*

高 峰 赵会娟 牛憨笨 张焕文

(中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

摘 要 阐述了时间分辨光学计算机层析(CT)图像重建逆问题的最佳摄动量法求解原理,给出了基于微扰变分原理的正向算子雅可比(Jacobi)矩阵快速计算公式,数值模拟实验证明了该方法在实际应用中的可行性。

关键词 光学计算机层析, 扩散模型, 逆问题, 雅可比矩阵。

1 引 言

阻碍光学计算机层析临床实现的关键因素是生物组织体对近红外光的强散射效应,为克服该效应所引起的成像困难,迄今已提出了多种光学计算机层析实现方案,大致可分为直接法和间接法两类。目前多数学者认为,由于传统的基于拉冬(Radon)变换的反投影图像重建算法在组织体近红外辐射成像中不再适用,以及早期到达光测量对光子探测器的灵敏度和信噪比指标要求过高等诸多因素的影响,使得发展以适用光学计算机层析数学模型及其逆问题求解算法为核心的间接成像方案应成为当前该领域重点关注的研究方向^[1-3]。间接法基于以下假设:给定对应于不同点激励源作用下成像组织体表面各点的传输光测量,在组织体内存在着与上述检测量相对应的、唯一的光学参数三维空间分布。由此,图像重建变成了求解特定光子传输模型参数的逆问题。本文基于光计算机层析间接成像方案的最优化数学模型及正向算子的一阶近似展开,阐述了光学计算机层析图像重建的最佳摄动量法原理及过程,给出了用于雅可比矩阵快速计算的微扰近似公式。数值模拟实验研究表明,该方法收敛速度快,重建精度高,具有实际的使用价值。

2 时间分辨光学计算机层析原理:数据类型及正模型的有限元法(FEM)求解

光学计算机层析的目标是根据组织体表面传输光测量值重建其内部光学参数的空间分布,其数据获取方式主要有稳态测量、时间分辨测量和频域测量三种,虽然用于上述三种测

* 国家自然科学基金和王宽诚教育基金资助课题。

收稿日期:1998-02-16; 收到修改稿日期:1998-05-04

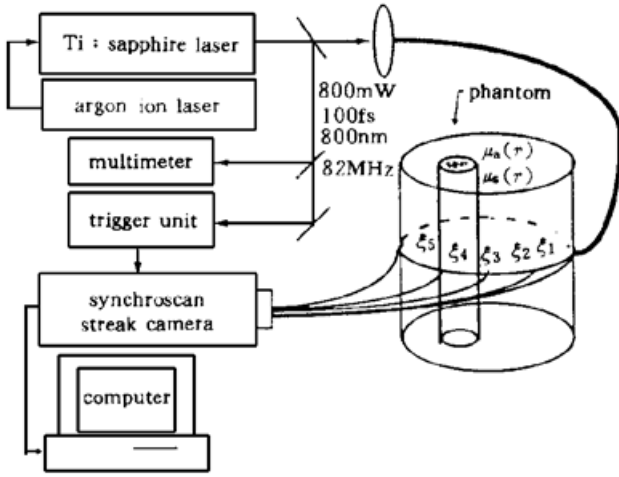


Fig. 1 Experimental setup for optical CT imaging system

量的系统大相径庭,但从理论上讲,它们之间相互紧密关联:稳态测量可视为时间分辨测量时域积分的特例;而时间分辨测量则通过傅里叶变换与频域测量相对应。本文仅需考虑时间分辨光学计算机层析系统,其原理如图 1 所示,Ar⁺激光器泵浦 Ti-Sapphire,所产生的近红外超短光脉冲通过传输光纤分别施加于组织体(或人工模拟组织体)表面不同点 $\zeta(s = 1, 2, \dots, S)$,在其内部产生对应的时变光子密度分布 $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, t)$,采用时间分辨检测器件(如条纹相机)可获得各点源作用下组织体表面各点 $\xi_j(j = 1, 2, \dots, J)$ 处的瞬态光流量 $\tilde{\Gamma}(\xi_j, \zeta_s, t)$,即获一组 $J \times S$ 个测量数据

$$\tilde{M}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}(\xi_1, \zeta_1, t), \tilde{\Gamma}(\xi_2, \zeta_1, t), \dots, \tilde{\Gamma}(\xi_J, \zeta_1, t) \\ \tilde{\Gamma}(\xi_1, \zeta_2, t), \tilde{\Gamma}(\xi_2, \zeta_2, t), \dots, \tilde{\Gamma}(\xi_J, \zeta_2, t) \\ \vdots \\ \tilde{\Gamma}(\xi_1, \zeta_S, t), \tilde{\Gamma}(\xi_2, \zeta_S, t), \dots, \tilde{\Gamma}(\xi_J, \zeta_S, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

从上述时间分辨测量 $\tilde{M}(t)$ 中,可抽取一组特征量用于重建过程,其中较常用的有^[4]

1) 时间积分光

$$E = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(t) dt \quad (2)$$

2) n 阶时间矩

$$\langle t^n \rangle = [\int_0^{\infty} t^n \tilde{\Gamma}(t) dt] / E, \quad (n > 0) \quad (3)$$

其他可供选择特征量包括:时间中心矩、时间衰减斜率的对数及峰值强度等。然而,对于具体实现,数据类型的选择必须满足以下两个必要条件:1)对实验测量系统误差如光源的起伏具有鲁棒性(robust);2)可通过正向模型直接有效地计算。在上面给出的两种数据类型中,(3)式满足上述条件,因为它被积分光强归一化,从而独立于绝对强度测量;而积分光强 E 虽可由正向模型直接计算,但需要整个测量系统的绝对标定,实现起来较为困难。

目前描述光在强散射媒质中传播行为的最简洁有效的方法是扩散方程,它是大气传输理论和中子输运理论中广泛采用的辐射传输方程的 P_1 近似^[5]

$$\left. \begin{aligned} \{ \nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_a c \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, t) - \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, t)}{\partial t} &= - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t) \\ \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, t) \Big|_{r \in \infty} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, t)$ 为瞬态光子密度, $\mu_a, \kappa = c/3(\mu_a + \mu_s), \mu_s$ 分别为吸收、扩散和退化散射系数。上式假设源为位于组织体表面下的一个自由程处的弥散点源和齐次边界条件。根据拉氏变换,上述方程的复频域表示为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_{ac} - p \} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, p) &= - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \\ \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, p) \Big|_{r \in \partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, p) = L[\Phi_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, t)]$ 。上式两边对 p 求导可得

$$\left\{ \nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_{ac} - p \right\} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, p)}{\partial p} = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, p) \quad (6)$$

令(5)、(6)式中 $p = 0$, 并定义 $\Psi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \int_0^\infty t^n \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, t) dt$, 可得

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_{ac} \} \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) &= - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \\ \Psi^{(0)} \Big|_{r \in \partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\left\{ \nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_{ac} \} \Psi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = - \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \quad (7b)$$

(7)式的求解方法主要有解析法、有限差分法和有限元法(FEM)^[6, 7], 相比而言, 有限元法在处理复杂参数分布、几何结构和边界条件方面具有更大的适应性, 因而特别适于用本文所述的成像问题。将伽辽金(Galerkin)有限元法应用于上述方程, 可得下列矩阵方程

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}(\kappa, \mu_{ac}) \mathbf{h}^{(0)} &= \mathbf{Q} \\ \mathbf{K}(\kappa, \mu_{ac}) \mathbf{h}^{(1)} &= \mathbf{B} \mathbf{h}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{h}^{(n)}(\mathbf{r}_s) = [h_1^{(n)}(\mathbf{r}_s), h_2^{(n)}(\mathbf{r}_s), \dots, h_D^{(n)}(\mathbf{r}_s)]^T$ 、 $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [u_1(\mathbf{r}), \dots, u_D(\mathbf{r})]^T$ 分别为有限元剖分节点光子密度和形状函数, 即 $\Psi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \mathbf{u}^T(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}^{(n)}(\mathbf{r}_s)$; D 为总节点数, \mathbf{K} 和 \mathbf{B} 为 $D \times D$ 维矩阵, \mathbf{Q} 为 D 维列矢量, 其元素计算见文献[6, 7]。由菲克(Fick)定律, 可得组织体表面光流量的时间加权积分为

$$T^{(n)}(\xi_j, \zeta) = - \kappa(\xi_j) \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi^{(n)}(\xi_j, \zeta) \quad (9)$$

这里 \mathbf{n} 为表面测量点外法线方向单位矢量。

3 最佳摄动量法及光子密度函数的求解

根据上节所述, 光计算机层析图像重建逆问题可定义如下:

给定组织体表面光源分布 $\mathbf{q} = [q(\zeta, t), q(\zeta, t), \dots, q(\zeta, t)]$ 及与此对应的传输光测量值 \mathbf{M} , 基于一定光子传输模型 F , 求解组织体内的光学参数三维分布 $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = [\mu_a(\mathbf{r}), \mu_s'(\mathbf{r})]$ 。逆问题的数学表示为

$$\mathbf{p} F^{-1}(\mathbf{M}) \quad (10)$$

从数学角度, 上述图像重建过程表示为以下最优化问题的求解

$$\min_p \Psi(\mathbf{p}) = \| \tilde{\mathbf{M}}_v - \mathbf{F}_v(\mathbf{p}) \| \quad (11)$$

其中 $\tilde{\mathbf{M}}_v$ 和 \mathbf{F}_v 分别为与 $\tilde{\mathbf{M}}(t)$ 和 \mathbf{F} 对应的测量特征值和正向特征量算子。为应用最小摄动量法, 首先将正向算子 \mathbf{F}_v 在 \mathbf{p} 处用泰勒(Taylor)级数展开

$$\mathbf{M}_v = \mathbf{F}_v(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) \approx \mathbf{F}_v(\mathbf{p}) + \mathbf{J}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (12)$$

上式中 $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ 为正向算子 \mathbf{F}_v 的一阶 Frechet 导数, 物理上称为光子密度函数, 在离散空间, \mathbf{J} 又称为雅可比矩阵。于是(11)成为下列矩阵迭代方程的求解

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{p}_k) + \alpha \mathbf{I}] \delta\mathbf{p}_k &= \mathbf{J}(\mathbf{p}_k)^T [\mathbf{M}_v - \mathbf{F}_v(\mathbf{p}_k)] \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{p}_k + \delta\mathbf{p}_k \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以上求解中考虑到 \mathbf{J} 矩阵的病态特征, 引进了正规化因子 α 用于获取稳定的数值解。

(13) 式的求解涉及 \mathbf{J} 矩阵的计算, 根据 Schweiger 和 Arridge 等的分析^[9], 按雅可比矩阵定义进行直接计算涉及 $S \times (1 + 2D)$ 次有限元法正问题求解及 $S \times 2D$ 次稀疏矩阵相乘, 因而效率很低, 为此作以下微扰处理以导出 Jacobi 矩阵的隐式计算公式。设(8)式有以下微扰:

$$\begin{aligned} \mu_a(\mathbf{r}) &\rightarrow \mu_a(\mathbf{r}) + \delta\mu_a(\mathbf{r}), & \kappa &= \kappa + \delta\kappa; \\ \Psi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) &\rightarrow \Psi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) + \delta\Psi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s), & n &= 0, 1 \end{aligned} \quad (14)$$

代入(8)式, 并考虑到 $\mu_s' \gg \mu_a$, 可得

$$\left. \begin{aligned} [\nabla \cdot (\kappa + \delta\kappa) \nabla - (\mu_a + \delta\mu_a)c][\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) + \delta\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)] &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \\ \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)|_{r \in \partial\Omega} &= 0 \\ [\nabla \cdot (\kappa + \delta\kappa) \nabla - (\mu_a + \delta\mu_a)c][\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) + \delta\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)] &= \\ &- [(\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) + \delta\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s))] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

展开上式并忽略高阶最小量 $O(\delta\mu_a)$ 并考虑到(7)式, 可得以下两组微扰方程

$$\begin{aligned} \delta\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\mu_a(\mathbf{r}') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' + \\ &\int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\kappa \nabla_{r'} \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \delta\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\delta\mu_a(\mathbf{r}') c \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_s) - \\ &\int_{\Omega} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \delta\mu_a(\mathbf{r}'') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}''] d\mathbf{r}' + \\ &\int_{\Omega} -G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \int_{\Omega} \nabla_{r''} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \delta\kappa(\mathbf{r}'') \nabla_{r''} \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}'' + \\ &\nabla_{r'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\kappa(\mathbf{r}') \nabla_{r'} \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (16b)$$

其中 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为方程(7)之格林(Green)函数。即

$$\left. \begin{aligned} [\nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_a c] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r \in \partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

上述格林函数具有互易性: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, 该特性可在具体计算中用以减少计算量。将 $\delta\mu_a$ 和 $d\kappa$ 用有限元展开, 即

$$\left. \begin{aligned} \delta\mu_a(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^D a_n u_n(\mathbf{r}) = \mathbf{a}^T \mathbf{u}(\mathbf{r}) \\ \delta\kappa(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^D k_n u_n(\mathbf{r}) = \mathbf{k}^T \mathbf{u}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_D]^T$, $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_D]^T$ 。于是, 可将方程(16a)和(16b)写为下列矩阵方程

$$\left. \begin{aligned} \delta E(\xi_j, \zeta_j) &= \mathbf{J}_a^{(E)(j_s)} \mathbf{a} + \mathbf{J}_k^{(E)(j_s)} \mathbf{k} \\ \delta T(\xi_j, \zeta_j) &= \mathbf{J}_a^{(T)(j_s)} \mathbf{a} + \mathbf{J}_k^{(T)(j_s)} \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{J}_a^{(E)(js)} = \begin{bmatrix} - \int_{\Omega} E(\xi_j, \mathbf{r}') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \zeta) u_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ - \int_{\Omega} E(\xi_j, \mathbf{r}') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \zeta) u_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ - \int_{\Omega} E(\xi_j, \mathbf{r}') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \zeta) u_D(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$\mathbf{J}_k^{(E)(js)} = \begin{bmatrix} - \int_{\Omega} \nabla_r E(\xi_j, \mathbf{r}') \nabla_r \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \zeta) u_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ - \int_{\Omega} \nabla_r E(\xi_j, \mathbf{r}') \nabla_r \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \zeta) u_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ - \int_{\Omega} \nabla_r E(\xi_j, \mathbf{r}') \nabla_r \Psi^{(0)}(\mathbf{r}', \zeta) u_N(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{bmatrix} \quad (20b)$$

$$\mathbf{J}_a^{(T)(js)} = \begin{bmatrix} - \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') c \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \zeta) u_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d\mathbf{r}' u_1(\mathbf{r}'') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \zeta) d\mathbf{r}'' \\ - \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') c \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \zeta) u_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d\mathbf{r}' u_2(\mathbf{r}'') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \zeta) d\mathbf{r}'' \\ - \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') c \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \zeta) u_D(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d\mathbf{r}' u_D(\mathbf{r}'') c \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \zeta) d\mathbf{r}'' \end{bmatrix} \quad (20c)$$

$$\mathbf{J}_k^{(T)(js)} = \begin{bmatrix} - \int_{\Omega} \nabla_r E(\xi_j, \mathbf{r}') \cdot \nabla_r \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \zeta) u_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') \nabla_r G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d\mathbf{r}' u_1(\mathbf{r}'') \nabla_r \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \zeta) d\mathbf{r}'' \\ - \int_{\Omega} \nabla_r E(\xi_j, \mathbf{r}') \cdot \nabla_r \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \zeta) u_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') \nabla_r G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d\mathbf{r}' u_2(\mathbf{r}'') \nabla_r \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \zeta) d\mathbf{r}'' \\ - \int_{\Omega} \nabla_r E(\xi_j, \mathbf{r}') \cdot \nabla_r \Psi^{(1)}(\mathbf{r}', \zeta) u_D(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \dot{E}(\xi_j, \mathbf{r}') \nabla_r G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d\mathbf{r}' u_D(\mathbf{r}'') \nabla_r \Psi^{(0)}(\mathbf{r}'', \zeta) d\mathbf{r}'' \end{bmatrix} \quad (20d)$$

根据以上结论, 飞行时间 κ 的雅可比矩阵同样可由微扰原理导出

$$\delta \kappa(\xi_j, \zeta) = \frac{T(\xi_j, \zeta) + \delta T(\xi_j, \zeta)}{E(\xi_j, \zeta) + \delta E(\xi_j, \zeta)} - \frac{T(\xi_j, \zeta)}{E(\xi_j, \zeta)} \approx \frac{\delta T(\xi_j, \zeta)}{E(\xi_j, \zeta)} - \kappa(\xi_j, \zeta) \frac{\delta E(\xi_j, \zeta)}{E(\xi_j, \zeta)} \quad (21)$$

于是有

$$\mathbf{J}_v^{(\kappa)(js)} = \frac{\mathbf{J}_v^{(T)(js)}}{E(\xi_j, \zeta)} - \kappa(\xi_j, \zeta) \frac{\mathbf{J}_v^{(E)(js)}}{E(\xi_j, \zeta)} \quad (22)$$

其中 $v \in \{\alpha, \kappa\}$ 。与雅可比矩阵的直接计算公式相比, 上述隐式计算公式仅涉及一次正向问题有限元法求解和一次格林函数计算。在有限元法细剖分情形, \mathbf{J} 矩阵规模很大, $(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{I})$ 直接求逆数值上不稳定, 实际中常采用基于行矢量计算的代数重建技术(ART)^[8]

$$\delta \mathbf{p}_k^{(js+1)} = \delta \mathbf{p}_k^{(js)} + \lambda^{(js)} \frac{[b^{(js)} - \mathbf{J}_v^{(w)(js)} \cdot \delta \mathbf{p}_k^{(js-1)}]}{\|\mathbf{J}_v^{(w)(js)}\|^2} [\mathbf{J}_v^{(w)(js)}]^T \quad (23)$$

式中 $j = 1, \dots, J, s = 1, \dots, S, b^{(js)} = M_v(\xi_j, \zeta) - F_v(\xi_j, \zeta, \mathbf{p}_k), \delta \mathbf{p}_k^{(1)} = 0$ 。上述代数重建技术算法在实现上的巨大优势在于每次迭代仅需计算和存储 Jacobi 矩阵的一行，且避免了病态问题的直接处理。

4 图像重建的数值模拟及分析

虽然光学计算机层析本质上是三维成像问题，但本文的目的是提出算法并证明其有效性，为了计算方便，这里仅以二维圆形组织体为例对光学参数分布图像的独立重建进行数值模拟。图 2 所示为所采用有限元法三角元剖分网格。其中圆形组织体半径 $R = 25 \text{ mm}$ ，有限元法剖分圆环数 $N = 15$ ，同时取激励源数和测量点数为 $S = J = 15$ ，在此剖分密度下的有限元法单元数为 $6 \times N \times N = 1350$ ，最高边界网点数为 $6 \times N = 90$ ，成像可达到的最高空间分辨大约为 $25/15 = 1.7 \text{ mm}$ ，接近一般临床应用中 1 mm 的空间分辨要求。该组织体的背景光学参数取为新生儿脑组织的典型值^[10]： $\mu_a = 0.025 \text{ mm}^{-1}, \mu_s = 2 \text{ mm}^{-1}$ ，并假设该值为先验知识而取为迭代初始值。

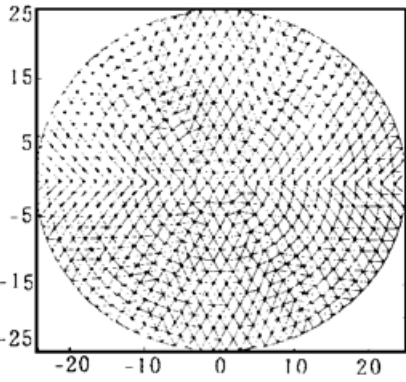


Fig. 2 Geometry for a circular FEM mesh

图 3 中背景组织体包含了两个同灰度和同大小圆形吸收型不均匀性： $R^{(1)} = R^{(2)} = 7 \text{ mm}, \mu_a^{(1)} = \mu_a^{(2)} = 0.1 \text{ mm}^{-1}, \mu_s = 2 \text{ mm}^{-1}$ ，其中心分别位于 $(0 \text{ mm}, 12.5 \text{ mm})$ 和 $(0 \text{ mm}, -12.5 \text{ mm})$ 处，重建采用的数据类型为积分光强 E 和平均飞行时间 $\langle \hat{\kappa} \rangle$ ；另外从误差随迭代的变化趋势可看出，用最佳摄动量法进行图像重建的收敛速度较快，一般经 10 次迭代即可基本达到收敛。为进一步测试算法的有效性，图 4 和图 5 给出了基于 E 和 $\langle \hat{\kappa} \rangle$ 的复杂图像重建结果，其中图 5 中背景组织体含有三个同灰度但不同大小的圆形吸收性不均匀性 ($R^{(1)} = 9 \text{ mm}, R^{(2)} = 5 \text{ mm}$ 和 $R^{(3)} = 7 \text{ mm}, \mu_a^{(1)} = \mu_a^{(2)} = \mu_a^{(3)} = 0.1 \text{ mm}^{-1}, \mu_s = 2 \text{ mm}^{-1}$)，中心分别位于 $(0 \text{ mm}, 12.5 \text{ mm})、(-12.5 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$ 和 $(0 \text{ mm}, -12.5 \text{ mm})$ 处。

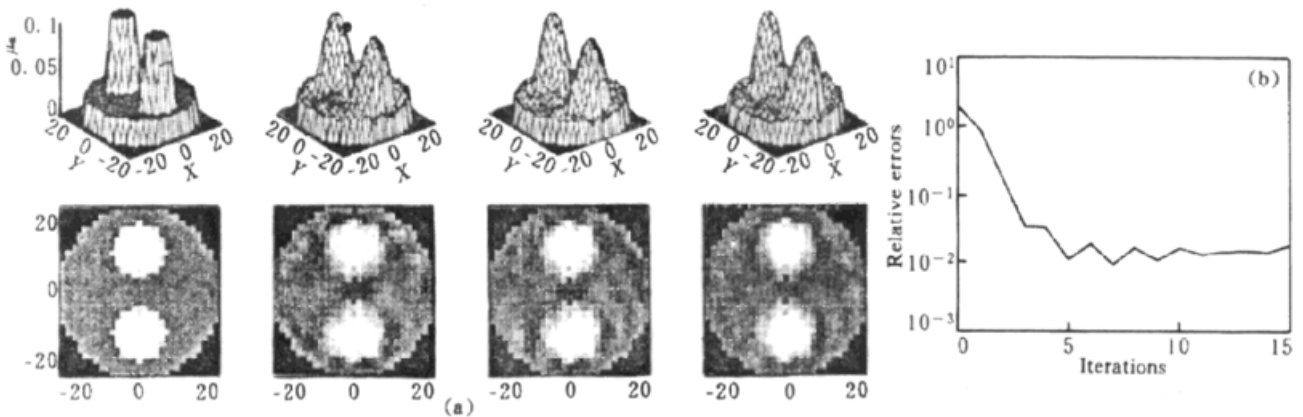


Fig. 3 (a) μ_a image reconstruction of circular object with two embedded absorptive inhomogeneities, from E and $\langle \hat{\kappa} \rangle$. Columns from left to right: target, after 5, 10, 15 iterations; (b) The relative error norms as a function of iterative number

图 6 的背景组织体则含有两个相同大小和灰度的圆形散射性不均匀性 ($R^{(1)} = R^{(2)} = R^{(3)} = 7 \text{ mm}, \mu_a = 0.025 \text{ mm}^{-1}, \mu_s^{(1)} = \mu_s^{(2)} = \mu_s^{(3)} = 8 \text{ mm}^{-1}$)，中心位置同图 3。从图像重建结果看，该方法是有效可行的。

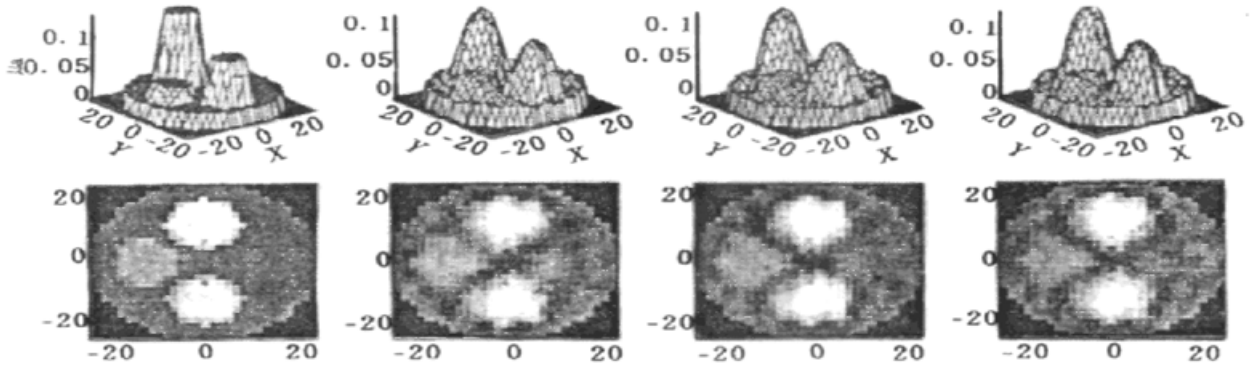


Fig. 4 μ_a image reconstruction of circular object with three embedded absorptive inhomogeneities of same sizes but different grayscales, from E and κ . Columns from left to right: target, after 5, 10, 15 iterations

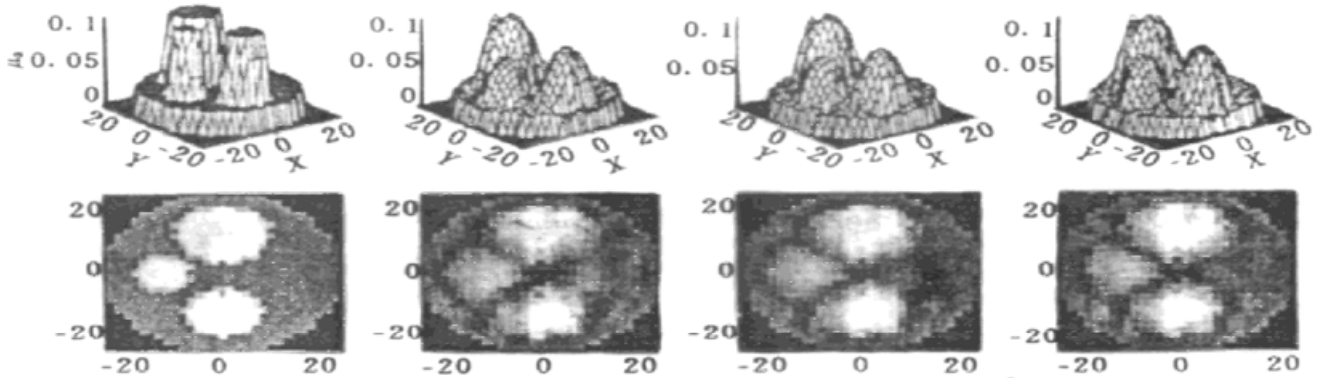


Fig. 5 μ_a image reconstruction of circular object with three embedded absorptive inhomogeneities of same grayscales but different sizes, from E and κ . Columns from left to right: target, after 5, 10, 15 iterations

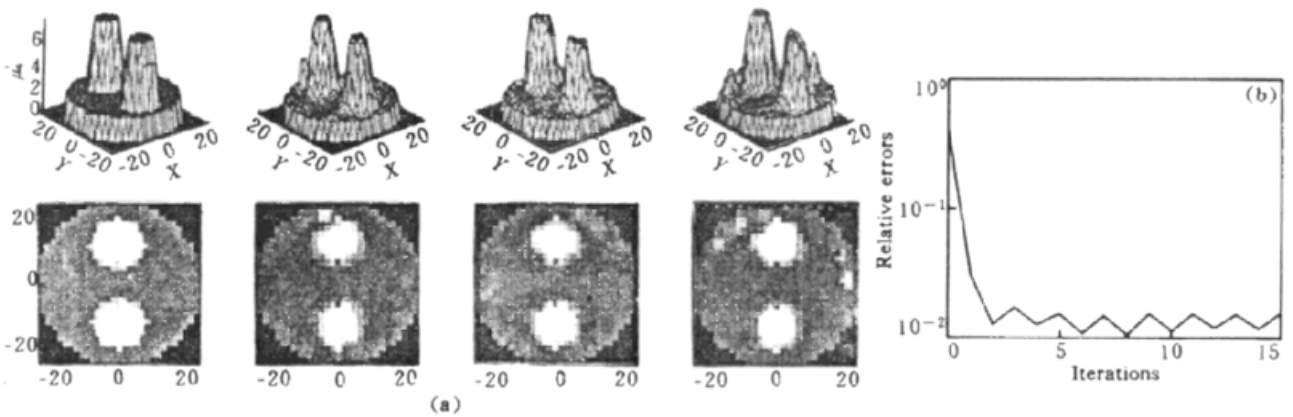


Fig. 6 (a) μ_s image reconstruction of circular object with two embedded scattering inhomogeneities, from E and κ . Columns from left to right: target, after 5, 10, 15 iterations; (b) The relative error norms as a function of iterative number

图 7 和图 8 中考查比较了不同数据类型及其组合对重建结果的影响和效果, 很显然, 同时采用两种数据类型可使重建结果大为改善, 然而, 如前所述绝对积分光强 E 在实际中常常是不可取的, 它对仪器灵敏度及信噪比要求极高, 因此采用相对测量可得平均飞行时间 κ 的图像重建结果在光学计算机层析实现中显得尤为重要, 从本文计算实例看, 采用 κ 的重建结果优于采用 E 的重建结果。上述计算实例均在主频 233 MHz、内存 32MB 的 Pentium II 个人计算机上实现, 对 15 轮迭代, 吸收系数和散射系数重建分别需要约 5 分钟和 12 分钟。

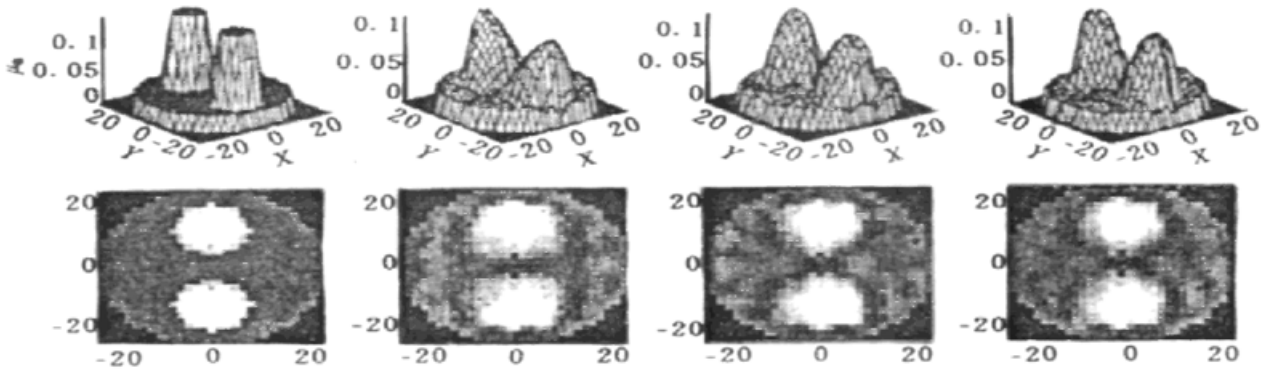


Fig. 7 μ_a image reconstruction of circular object with two embedded absorptive inhomogeneities of same grayscales and sizes, from different data types: Columns from left to right: target, from E , Δ and the both

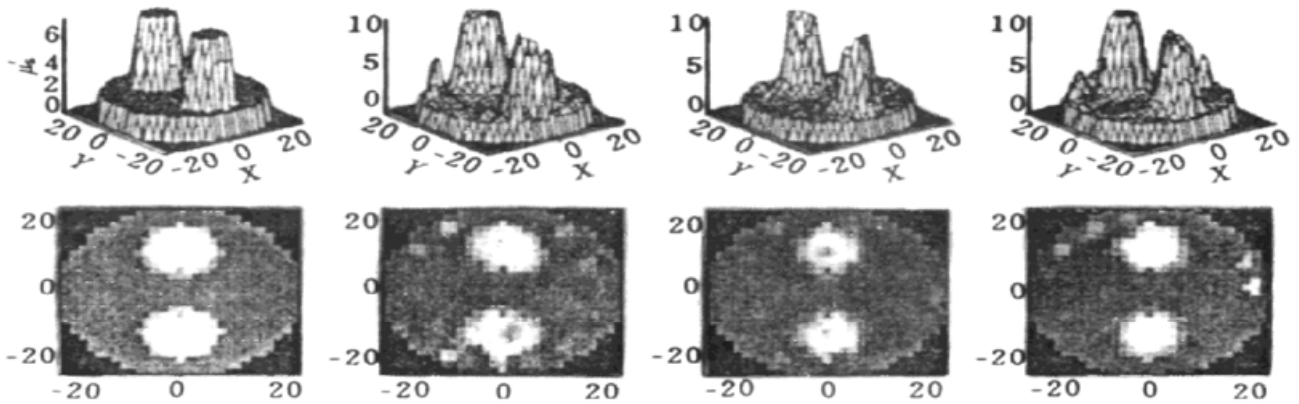


Fig. 8 μ_s image reconstruction of circular object with two embedded scattering inhomogeneities of same grayscales and sizes, from different data types: Columns from left to right: target, from E , Δ and the both

虽然光学计算机层析三维问题从原理上讲可作为二维问题的直接推广,但由于问题规模在数量级上的增加,其技术实现上必须充分考虑内存占用和计算时间上的可行性,这有待于计算机技术和计算理论特别是并行计算技术方面的提高和发展。

感谢英国 University College London 的 D. T. Delpy 教授, S. R. Arridge 博士的帮助。

参 考 文 献

- [1] Hebden J C, Arridge S R, Delpy D T. Optical imaging in medicine: I. Experimental techniques. *Phys. Med. Biol.*, 1997, **42**(5) : 825~ 840
- [2] Arridge S R, Hebden J C. Optical imaging in medicine: II. Modelling and reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 1997, **42**(5) : 841~ 853
- [3] Gao F, Niu H, Zhao H. A study on numerical simulation of image reconstruction in optical computer tomography. *Bioimaging*, 1997, **5**(2) : 51~ 57
- [4] Schweiger M, Arridge S R, Delpy D T. Application of the finite element method for the forward and inverse models in optical tomography. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 1993, **3**(2) : 263~ 283
- [5] Ishimaru A. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. New York: Academic Press, 1978. 175~ 188
- [6] Arridge S R, Schweiger M, Hiraoka M *et al.*. A finite element approach for modeling photon transport in tissue. *Med. Phys.*, 1993, **20**(2) : 299~ 309
- [7] 高峰, 牛慈笨. 光学 CT 正向问题 FEM 求解的研究. *光学学报*, 1997, **17**(3) : 101~ 106

- [8] Netterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. New York: Wiley, 1986. 114~ 126
- [9] Arridge S R, Scjweiger M. Photon-measurement density functions. Part2: Finite-element-method calculations. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(34) : 8026~ 8037
- [10] van der Zee P, Essenpreis M, Delpy D T *et al.*. Accurate determination of the optical properties of biological tissue using Monte-Carlo inversion technique, *Proc. International Conference on Atmospheric, Volume and Surface Scattering and Propagation*, Italy, 1991. 125~ 128

Optimized Perturbation Method for Image Reconstruction in Optical Computerized Tomography

Gao Feng Zhao Huijuan Niu Hanben Zhang Huanwen

(*Xian Institute of Optics and Precision Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Xian 710068*)

(Received 16 February 1998; revised 4 May 1998)

Abstract The principle of optimized perturbation method for the image reconstruction in optical computerized tomography is addressed, and a fast computational algorithm for the Jacobi matrix based on the perturbational functional on the forward model is given. The numerical simulations show that the proposed approach leads to the accurate results with reasonable computational time.

Key words optical computerized tomography, diffusion equation, inverse problem, Jacobi matrix.