第 19 卷　第 4 期　　　　光　学　学　报　　　　Vol. 19, No. 4
1999 年 4 月　　　　ACTA OPTICA SINICA　　　　April, 1999

有限维希尔伯特空间 q-畸变谐振子偶相干态及其压缩和反聚束特性

朱从旭
(中南工业大学信息工程学院计算中心, 长沙 410083)

摘　要　从一般形式上构造了有限维希尔伯特(Hilbert)空间 q-畸变谐振子的偶相干态, 并讨论了其量子统计特性。发现有限维希尔伯特空间的偶 q-相干态与通常无限维空间的偶 q-相干态或偶相干态有明显不同的压缩和反聚束特性。前者的偶 q-相干态不仅出现正交压缩, 而且出现反聚束效应。

关键词　有限维希尔伯特空间,　偶 q-相干态,　压缩效应,　反聚束效应。

1　引　　言

近年来, Pegg-Barnett(PB) 量子相位理论倍受人们关注[1~3], 已被广泛应用于量子光学许多领域, 而有限维希尔伯特空间的谐振子在 P-B 理论中起着重要作用。Buzek 等人[4] 首次提出了有限维希尔伯特空间相干态问题, 并研究了一个二态福克(Fock) 空间相干态的压缩特性。朱久运等将普通奇偶相干态[5, 6]进行推广, 提出了有限维希尔伯特空间的偶奇相干态并研究了其压缩特性[7]。另一方面, 关于 q-畸变量子群的研究又是近年来许多学者关注的问题。王发伯等人首先提出研究无限维希尔伯特空间 q-畸变谐振子的偶奇相干态问题[8, 9]; 本文作者用数值计算方法仔细地研究了其非经典特性[10]。鉴于偶奇相干态在物理学尤其在量子光学中的重要性, 将任意维空间情形下的偶奇相干态与量子群联系起来考虑是一个很有意义的问题。本文通过构造有限维希尔伯特空间 q-畸变谐振子的偶相干态, 并研究其压缩和反聚束特性, 以期从更一般的意义上来揭示偶相干态的形式和不同的量子统计性质。

2　有限维希尔伯特空间的偶 q-相干态

考虑一个 $2s+1$ 维空间, $\Sigma_{2s+1} = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \cdots, |2s\rangle\}$, 其中 s 为任意正整数。在 Σ_{2s+1} 空间中 q-畸变谐振子的湮灭算符 a、产生算符 a^+ 以及粒子数算符 N 分别定义为:

$$a = \sum_{n=0}^{2s} \sqrt{[n]}\,|n-1\rangle\langle n|, \qquad a^+ = \sum_{n=0}^{2s-1} \sqrt{[n+1]}\,|n+1\rangle\langle n|, \qquad N = \sum_{n=0}^{2s} [n]\,|n\rangle\langle n| \quad (1)$$

其中 q-函数 $[n]$ 定义为: $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$, $(0 < q < 1)$, 而算符的对易关系及其对基矢的作用为:

收稿日期: 1997-10-03; 收到修改稿日期: 1998-05-19

$$aa^+ - qa^+ a = q^{-N} - [2s+1]|2s\rangle\langle 2s|, \qquad [N, a] = -a, \qquad [N, a^+] = a^+ \quad (2)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle, \quad a^+|2s\rangle = 0 \quad (3)$$

定义 $\sum_{2s+1}$ 空间的偶 q-相干态:

$$|z, s\rangle_q^e = N_q^e(z, s) \sum_{n=0}^{s} \frac{z^{2n}}{\sqrt{[2n]!}}|2n\rangle = \left(\sum_{n=0}^{s} \frac{(zz^*)^{2n}}{[2n]!}\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{s} \frac{z^{2n}}{\sqrt{[2n]!}}|2n\rangle \quad (4)$$

q 阶乘$[x]!$由$[x][x-1]\cdots[1]$给出, 并规定$[0]!=1$。为书写方便, 引入下列 q-畸变双曲函数:

$$\cosh_q(x, s) = \sum_{n=0}^{s} \frac{x^{2n}}{[2n]!}, \qquad \sinh_q(x, s) = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]!}$$

显然, 当 $s \to \infty$, $q \to 1$ 时, (4) 式的偶 q-相干态就过渡到通常的偶相干态。

3 有限维希尔伯特空间偶 q-相干态的压缩和反聚束特性

3.1 压缩特性

引进 $\sum_{2s+1}$ 空间的一对正交算符:

$$x_1 = (i/2)(a + a^+), \qquad x_2 = (1/2i)(a - a^+) \quad (6)$$

由对易算子导致如下测不准关系

$$_q\langle(\Delta x_1)^2\rangle_q \, _q\langle(\Delta x_2)^2\rangle_q \geqslant (1/4)|\, _q\langle[x_1, x_2]\rangle_q|^2 \quad (7)$$

$x_i(i=1$ 或 $2)$ 分量存在压缩的条件为:

$$_q\langle(\Delta x_i)^2\rangle_q < (1/2)|\, _q\langle[x_1, x_2]\rangle_q|, \qquad (i = 1 \text{ 或 } 2) \quad (8)$$

由前面诸式, 经计算得出:

$$\langle(\Delta x_1)^2\rangle_q^e = \frac{1}{4\cosh_q(zz^*, s)}\{(1+q)zz^* \sinh_q(zz^*, s) + \cosh_q(q^{-1}zz^*, s) + (z^2 + z^{*2})\cosh_q(zz^*, s-1) - [2s+1](zz^*)^{2s}/[2s]!\} \quad (9)$$

$$\langle(\Delta x_2)^2\rangle_q^e = \frac{1}{4\cosh_q(zz^*, s)}\{qzz^* \sinh_q(zz^*, s-1) + zz^* \sinh_q(zz^*, s) + \cosh_q(q^{-1}zz^*, s-1) - (z^2 + z^{*2})\cosh_q(zz^*, s-1)\} \quad (10)$$

$$\langle[x_1, x_2]\rangle_q^e = \frac{i}{2\cosh_q(zz^*, s)}\{(q-1)zz^* \sinh_q(zz^*, s) + \cosh_q(q^{-1}zz^*, s) - [2s+1](zz^*)^{2s}/[2s]!\} \quad (11)$$

从(9)式、(10)式和(11)式可知, 当 $s \to \infty$ 时, 上述三式均分别退化为通常偶 q-相干态的结果[9]; 当 $q \to 1$ 时, 以上结果与有限维希尔伯特空间偶相干态的结果相同[7]; 而当 $s \to \infty$, $q \to 1$ 时, 以上结果就过渡到通常的偶相干态情况[5, 6]。

下面具体讨论 $s=1$ 和 $s \to \infty$ 两种特殊情况下上述偶 q-相干态 x_1 分量的压缩特性(x_2 分量的讨论方法与之相同), 讨论中取 $z = r\exp(i\theta)$ 复数形式。

1) 当 $s=1$ 时

$$\langle(\Delta x_1)^2\rangle_q^e - \frac{1}{2}|\langle[x_1, x_2]\rangle_q^e| = \frac{1}{4}\frac{[2]}{[2]+r^4}(r^4 + 2r^2\cos 2\theta + 1 - |1 - r^4|) \quad (12)$$

此时 x_1 出现压缩的条件是 $r^2 < 1$ 且 $\cos 2\theta < -r^2$; 或 $r^2 > 1$ 且 $\cos 2\theta < -1/r^2$。当 $\theta = 0$, 或 $\theta = \pi/2$ 时, 有:

$$\langle(\Delta x_1)^2\rangle_q^e\langle(\Delta x_2)^2\rangle_q^e = \frac{1}{4}\left|\langle[x_1, x_2]\rangle_q^e\right|^2 = \frac{1}{16}\left\{\frac{[2]}{[2]+r^4}(1-r^4)\right\}^2 \tag{13}$$

当 $\theta = 0$ 或 $\pi/2$ 时, $s = 1$ 的有限维空间下的偶 q-相干态为最小不确定态。

2) 当 $s \to \infty$ 时

$$\lim_{s\to\infty}\left(\langle(\Delta x_1)^2\rangle_q^e - \frac{1}{2}\left|\langle[x_1, x_2]\rangle\right|\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{\cosh_q(q^{-1}r^2)}{\cosh_q(r^2)} + f(q, r) + 2r^2\cos 2\theta\right] \tag{14}$$

其中,
$$f(q, r) = (q+1)r^2\tanh_q(r^2) - \left|(q-1)r^2\tanh_q(r^2) + \frac{\cosh_q(q^{-1}r^2)}{\cosh_q(r^2)}\right| \tag{15}$$

所以 x_1 出现压缩的条件为

$$\left.\begin{aligned} &qr^2\sinh_q(r^2) + \cosh_q(q^{-1}r^2) > r^2\sinh_q(r^2) \\ &\cos 2\theta < -\tanh_q(r^2); \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

进一步考察, 当 $s \to \infty$, 且 $q \to 1$ 时, 则 x_1 出现压缩的条件退化为:

$$\cos 2\theta < -\tanh(r^2) \tag{17}$$

这就是通常偶相干态出现压缩的条件。

由此可见, 有限维希尔伯特空间的偶 q-相干态与通常的偶 q-相干态有不同的压缩条件。

3.2 反聚束特性

引进有限维希尔伯特空间偶 q-相干态的二阶 q-相干函数 $g_{qe}^{(2)}(0)$:

$$g_{qe}^{(2)}(0) = \langle a^{+2}a^2\rangle_q^e/\left|\langle a^+ a\rangle_q^e\right|^2 \tag{18}$$

通过计算, 得

$$g_{qe}^{(2)}(0) = [\cosh_q(zz^*, s)\cosh_q(zz^*, s-1)]/\sinh_q^2(zz^*, s) \tag{19}$$

若 $g_{qe}^{(2)}(0) < 1$, 则称这种态存在反聚束效应。

下面就 $s \to \infty$ 和 $s = 1$ 两种特殊情况, 对上述偶 q-相干态的反聚束特性作进一步考察。

1) 当 $s \to \infty$ 时, 此时(19)式退化为:

$$g_{qe}^{(2)}(0) = c\tanh_q^2(r^2) \tag{20}$$

即出现反聚束效应的条件为: $c\tanh_q(r^2) < 1$。对偶 q-相干态($q < 1$ 时), 在一定 r^2 值范围内这个条件可得到满足, 即可出现反聚束效应[10]。而对通常的偶相干态, 由于 $c\tanh(r^2) > 1$, 所以不存在反聚束效应。

2) 当 $s = 1$ 时, 此时(19)式变为:

$$g_{qe}^{(2)}(0) = 1/r^4 + 1/[2] \tag{21}$$

于是, 出现反聚束效应的条件为: $r^2 > \sqrt{[2]/([2]-1)}$; 若 $q = 1$, 此条件为: $r^2 > \sqrt{2}$。即, 对于 $s = 1$ 的有限维空间, 偶 q-相干态($q < 1$) 和偶相干态($q = 1$) 均可出现反聚束效应; 只是二者出现反聚束效应所对应的 r^2 起始值不同。这些特性是与通常无限维空间情景截然不同的。

结　论　本文提出的有限维希尔伯特空间的偶 q-相干态是偶相干态的一种广义形式。通常的偶相干态是本文这种态在 $s \to \infty$ 时的特殊情况; 文献[7] 提出的偶 q-相干态是本文这种态在 $q \to 1$ 时的特殊情况; 对任意维希尔伯特空间偶 q-相干态量子统计特性的研究表明, 有限维希尔伯特空间的偶 q-相干态与通常的偶 q-相干态或偶相干态有截然不同的压缩特性和反聚束特性; 对有限维希尔伯特空间情形, 值得注意的是, 无论是偶 q-相干态($q < 1$) 还是偶相干

态($q=1$) 均有可能出现反聚束效应。用类似的方法, 也可研究有限维希尔伯特空间的奇 q-相干态。

参 考 文 献

[1] Pegg D T, Barnett S M. Unitary phase operator in quantum mechanics. *Euro. Phys. Lett.*, 1988, **6**(6): 483~487

[2] Barnett S M, Pegg D T. On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod Opt*, 1989, **36**(1): 7~19

[3] Pegg D T, Barnett S M. Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39**(4): 1665~1675

[4] Buzek V, Wilson-Gordon A D, Knight P L *et al.*. Coherent states in a finite-dimensional basis: Their phase properties and relationship to coherent states of light. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **45**(11): 8079~8094

[5] Hillery M. Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **36**(8): 3796~3802

[6] Xia Y J, Guo G C. Nonclassical properties of even and odd coherent states. *Phys. Lett.* (*A*), 1989, **136**(6): 281~283

[7] Zhu Jiu-Yun, Kuang Le-Man. Even and odd coherent states of a harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space and their squeezing properties. *Phys. Lett.* (*A*), 1994, **193**(3): 227~234

[8] Wang F B, Kuang L M. Even and odd q-coherent states representations of the quantum Heisenberg-Weyl algebra. *Phys. Lett.* (*A*), 1992, **169**(4): 225~228

[9] Wang F B, Kuang L M. Even and odd q-coherent states and their optical statistics properties. *J. Phys.* (*A*), 1993, **26**(2): 293~300

[10] 朱从旭, 王发伯, 匡乐满. 关于奇偶 q-相干态的非经典特性. 物理学报, 1994, **43**(8): 1262~1267

Even Coherent States of a Finite-Dimensional Hilbert Space q-Deformation Harmonic Oscillator and Their Squeezing and Antibunching Properties

Zhu Congxu

(*Computer Center, College of Information Engineering, Central South University of Technology, Changsha* 410083)

(Received 3 October 1997; revised 19 May 1998)

Abstract In a general way, even q-coherent states in a finite-dimensional Hilbert space (FDHS) case are constructed explicitly. Some quantum statistical properties are discussed. It is found that squeezing and antibunching properties of even q-coherent states in a FDHS case are different from those of usual even q-coherent states. No matter the q-deformation exhibits or not, the former all exhibits not only quadrature squeezing but also antibunching effect.

Key words FDHS, even q-coherent states, squeezing effect, antibunching effect.