

非束缚态空间亮孤子的传输稳定性*

王 超

(上海交通大学应用物理系, 上海 200240)

陈英礼 陈险峰 李 劬

(区域光纤通信网与新型光通信系统国家重点实验室,
上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

摘 要 从理论上研究了主克尔型介质中非束缚态空间亮孤子的传输行为。数值计算结果表明: 在主克尔型 $\chi^{(3)} + \chi^{(5)}$ 介质中可以传输非束缚态空间亮孤子。传输稳定性与其背景平面波的横向渐近传播常数 q 和 $\chi^{(3)}$, $\chi^{(5)}$ 系数有关, 非平凡位相因子在三、五阶效应竞争中的平衡作用, 是获得非束缚态空间亮孤子稳定传输的关键。

关键词 非束缚态空间亮孤子, 主克尔型 $\chi^{(3)} + \chi^{(5)}$ 介质, 非平凡位相因子。

1 引 言

空间光孤子在全光学非线性波导开关设计中的潜在应用, 促使人们对不同类型非线性介质中空间光孤子的传输行为进行深入研究。以往对自聚(散)焦介质中空间亮(暗)孤子传输特征的研究主要是针对单纯克尔型介质^[1, 2]。Buryak 对主克尔型介质中近位相匹配条件下二、三阶非线性效应的竞争机制做过研究^[3]。Lawrence 发现在特定波长附近, 随着光强的增大, 某种非纯克尔型介质原有的自聚焦特性消失, 转而表现出自散焦介质的特性^[4]。Kivshar 研究了主克尔型 $\chi^{(3)} + \chi^{(5)}$ 介质中非束缚态空间亮孤子的传输特性^[5]。本文在此基础上深入讨论这类介质中非束缚态空间亮孤子的传输稳定性, 以及自诱导波导结构与传输模式之间的关系。

2 理论推导

讨论无损耗主克尔型介质中非束缚态空间亮孤子的传输行为, 归一化非线性薛定谔方程(NLSE)取以下形式^[8]:

$$i\partial E/\partial z + (1/2)\partial^2 E/\partial x^2 + f(|E|^2)E = 0 \quad (1)$$

对于主克尔型 $\chi^{(3)} + \chi^{(5)}$ 介质, 非线性项 $f(|E|^2)$ 取为^[5]:

$$f(I) = -I + \alpha I^2 \quad (2)$$

式中 $I = |E|^2$ 。分析非束缚态空间亮孤子的传输行为特征, 即求解方程(1)渐近边界条件为

* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1997-10-03; 收到修改稿日期: 1998-01-31

$|x| \rightarrow \infty, I \rightarrow I_\infty \neq 0$ (注: 与空间暗孤子传输的边界条件相同) 的非束缚态行波解:

$$E(x, z) = F(x) \exp[-i\beta z + i\Phi(x)] \quad (3)$$

$$\text{其中 } F(x) = \begin{cases} \sqrt{I(x)} & |x| \geq 0 \quad q \neq 0 \\ \sqrt{I(x)} & x \geq 0 \\ -\sqrt{I(x)} & x < 0 \end{cases} \quad q = 0 \quad \frac{d\Phi(x)}{dx} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow q \quad (4)$$

分别为实场振幅和背景平面波横向渐近传播常数, β 为纵向传播常数, $\Phi(x)$ 为非平凡位相因子。将式(3)式代入(1)式得到

$$\frac{d}{dx}[F^2(d\Phi/dx)] = 0, \quad d^2F/dx^2 + \beta F - F(d\Phi/dx)^2 + f(F^2)F = 0 \quad (5)$$

对(5)式积分并同时考虑背景平面波横向渐近传播常数条件(4)式, 得到

$$d\Phi(x)/dx = qI_\infty/I(x) \quad (6)$$

当输入光强分布取以下形式:

$$I(x) = I_\infty - \frac{A^2}{1 - 8\alpha I_\infty/3 \pm \sqrt{(1 - 8\alpha I_\infty/3)^2 + 4\alpha A^2/3} \cosh(Ax)} \quad (7)$$

$$\text{其中 } A^2 = 2I_\infty(1 - 2\alpha I_\infty) - 4q^2,$$

“+”号对应于非束缚态空间亮孤子, “-”号对应于空间暗孤子时^[5], 即可得到初始实场振幅分布的具体表达式; 再对式(6)积分, 得到非束缚态空间亮孤子的非平凡位相因子:

$$\Phi(x) = qx - \frac{2qA}{\sqrt{C_2^2 I_\infty^2 - (C_1 I_\infty - A^2)^2}} \arctan \left[\frac{C_2 I_\infty \exp(Ax) - (C_1 I_\infty - A^2)}{\sqrt{C_2^2 I_\infty^2 + (C_1 I_\infty - A^2)^2}} \right] + \text{const.} \quad (8)$$

$$\text{其中 } C_1 = 1 - 8\alpha I_\infty/3, \quad C_2 = \sqrt{(1 - 8\alpha I_\infty/3)^2 + 4\alpha A^2/3}$$

(8)式中线性项 qx 可看作是背景平面波的位相因子。综合式(7)式、(8)式以及(4)式得到针对演化方程(1)的尝试解作为数值模拟的初始条件。

必须指出, 方程(1)事实上可看作是描述纯克尔型介质中空间孤子演化过程的归一化非线性薛定谔方程含修正项 $\alpha I^2 E$ 的情形, 严格求解一般是不可能的, 通常采用将修正项看作微扰源的非线性方程微扰理论为依据的数值模拟方法, 显然要求当 $\alpha \rightarrow 0$ 以及 $I_\infty \rightarrow \text{常数}$ 或 $I_\infty \rightarrow 0$ 时, 作为数值模拟初始条件的尝试解逼近不含修正项的归一化非线性薛定谔方程解析解^[6, 7]。综合(7)式、(8)式及(4)式所得到的尝试解符合上述要求。其中体现孤子波幅的参数 A , 在讨论纯克尔型介质中的孤子演化过程时可以取任意正值^[8], 本文给出的修正形式 $A^2 = 2I_\infty - 4\alpha I_\infty^2 - 4q^2$, 表明体现非束缚态空间孤子波幅的参数不能任意取值, 必须由三、五阶系数和背景平面波渐近边界条件 I_∞ 及传播常数 q 共同决定, 以体现这些因素之间的互相制约在整个非局域非线性过程中对孤子波幅的影响; 这种互相制约关系也间接体现在起重要调制作用的非平凡位相因子上。修正因子 $C_1 = (\alpha_{\min} - \alpha I_\infty)/\alpha_{\min}$ 体现广阔背景平面波传播区间的自聚焦效应与 α_{\min} 之间的相对差异; $C_2 = \sqrt{C_1^2 + (\alpha/2\alpha_{\min})A^2}$ 为这种相对差异的平方(与归一化非线性薛定谔方程的修正项 $\alpha I^2 E$ 有关)与中央孤子波包能量集中区相对自聚焦效应的叠加。这两个因子对双曲正割型函数的振幅分布作了修正, 涵盖了本文讨论所涉及的所有重要参数, 并作为本节末为获得稳定收敛的数值模拟结果, 对有关参数确定理论取值域的依据。

在讨论纯克尔型介质中空间暗孤子的传输演化时, Skinner 提出了假定连续背景为静止的稳定性讨论标准前提^[2]。本文也采用此标准前提。作代换:

$$\tilde{E}(X, Z) = E(x, z) \exp(-iqx), \quad X = x + qz, \quad Z = z \quad (9)$$

非束缚态亮孤子即以 $V = -q$ 的速率相对于连续静止背景传播。变量代换以后的非平凡位相因子[简称 $\Phi(x)$ 因子, 下同]曲线如图 1 所示。(8) 式的积分常数可以由条件式 $\Phi(0) = 0$ 确定, 但非必要。

由(7) 式求得非束缚态空间亮孤子的输入光功率峰值 I_{\max} 与背景平面波无穷远处强度渐近值之间的关系式 $I_{\max} = I_{\infty} + (3/\alpha)(1 - 2\alpha I_{\infty})$, 仅当 $I_{\infty} < 1/2\alpha$ 时, 满足非束缚态亮孤子的存在条件 $I_{\max} > I_{\infty}$, 这也是获得稳定自位相调制的条件式。当背景平面波强度渐近值取 $I_{\infty} = 1.0$ 时, α 取值上限为 $\alpha_{\max} = 1/(2I_{\infty}) = 0.5$ 。根据 Korteweg-de Vries 方程(简称 KdV 方程)存在稳定行波解的小振幅近似条件^[9], 相应归一化非线性薛定谔方程式(1)的非线性项 $f(I)$ 体现自聚焦程度的系数必须满足 $\alpha > \alpha_{\min} = 3/8 = 0.375$ (本文的数值模拟过程中取 $\alpha = 0.4$)。由上述稳定自位相调制的条件式以及(7) 式, 得到非束缚态空间亮孤子的背景平面波横向渐近传播常数 q 的取值上限:

$$q < q_{\max} = \sqrt{I_{\infty}(1 - 2\alpha I_{\infty})/2} \Big|_{\alpha=0.4, I_{\infty}=1.0} = 0.316 \quad (10)$$

3 数值模拟结果和讨论

非束缚态空间亮孤子在主克尔型 $X^{(3)} + X^{(5)}$ 介质中传输, 由于三、五阶效应的竞争与光强分布变化有关, 自位相调制的不稳定性增大。与克尔型介质中束缚态亮孤子位相因子取常数的平凡情形不同, 如图 1 所示的 $\Phi(x)$ 因子的非平凡变化对非束缚态空间亮孤子传输过程中随光强变化的三、五阶效应之间的竞争起平衡作用。计算结果表明位相因子(8) 式的积分常数可以取任意值而不影响结论。方程(1) 的非线性项 $f(I)$ 所体现三、五阶效应与光强之间的关系, 本质上仍属于光致折变现象。本文讨论的非束缚态空间亮孤子的光强渐近边界条件与空间暗孤子相同, 但要求主克尔型 $X^{(3)} + X^{(5)}$ 介质在光强达到一定值时能产生足够强的五阶自聚焦效应。不同 q 值初始光强分布的自诱导波导结构所体现的三、五阶效应强弱对比, 对空间亮孤子的传输行为起决定性作用: 当 q 取较小值时, 整体自诱导渐变折射率分布呈倒 W 型波导结构, 其外延为对称爱泼斯坦型分布^[10], 对空间亮孤子光束有聚焦作用; 内侧为反平方律分布, 对光束起散焦作用。由于非束缚态空间亮孤子光束定义为光功率峰值附近能量相对集中的空间有限区域(简称“功率峰值区”, 下同), 传输行为取决于主克尔型 $X^{(3)} + X^{(5)}$ 介质对应于不同光强分布的三、五阶效应强弱对比变化, 与束缚态空间亮孤子光束的自衍射无关。

根据不同初始光强分布所对应的自诱导渐变折射率分布, 可以判断三、五阶效应强弱的变化趋势。当 q 值远离取值上限 $q_{\max} = 0.316$ ($\alpha = 0.4$) 时[如图 2(a) 所示], 初始光强分布峰值区域的大梯度变化使自诱导渐变折射率分布的外沿和内侧的陡度也随之增大, 加剧了三、五阶效应之间的竞争。从图 1 所示 $q = 0.1$ 时 $\Phi(x)$ 因子缓变曲线可以看出: 取较小 q 值的 $\Phi(x)$ 因子对三、五阶效应竞争的平衡作用较弱。在光场功率峰值区以外的传输空间里, $\Phi(x)$ 因子近似平凡的变化表明平衡作用减弱。可见三、五阶效应竞争和 $\Phi(x)$ 因子的平衡作用在整体非束缚态空间亮孤子的传输空间展开。这种倒 W 型自诱导波导结构内侧反平方律折射率

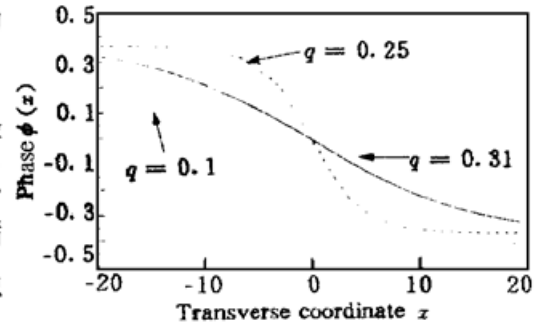


Fig. 1 The nontrivial phase variations of the unbounded bright spatial soliton with $\alpha = 0.4$; $q = 0.1, 0.25, 0.31$

分布的变化幅度大于外沿对称爱泼斯坦型分布的幅度，表明初始的自诱导折射率分布对输入光场功率峰值区的散焦作用占优势。具有较大峰值 I_{max} 的输入光场功率峰值区经历了短距离急剧压缩后即坍塌[如图 3(a) 所示]，没有形成类似高阶束缚态空间亮孤子的传输。较小 q 值的背景平面波以较低速率散射能量，使功率峰值区的自诱导渐变折射率分布维持短暂自聚焦效应后即丧失，这是初期亮孤子光束经历短距离压缩的原因。

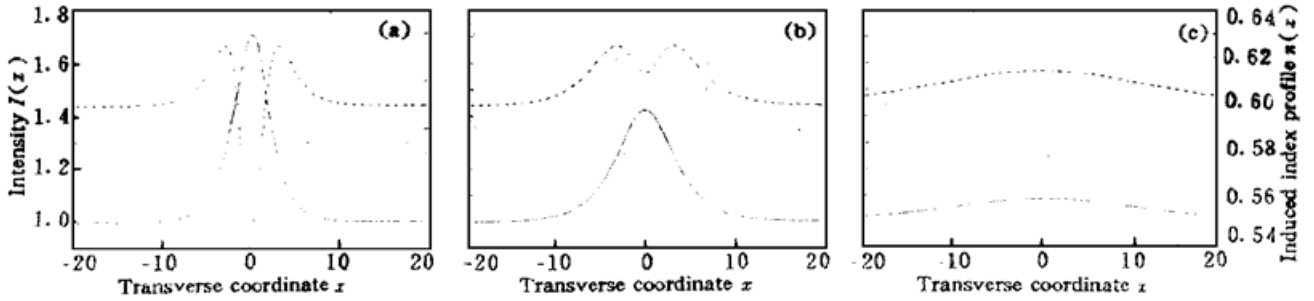


Fig. 2 Intensity of the unbounded bright spatial soliton and the self-induced index profile $n(x)$, $\alpha = 0.4$; (a) $q = 0.1$, (b) $q = 0.25$, (c) $q = 0.31$

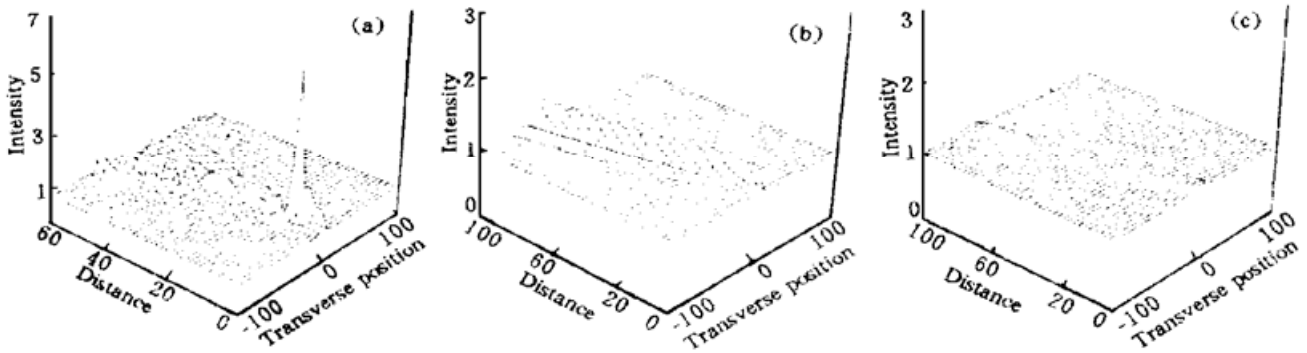


Fig. 3 Propagation of the unbounded bright spatial soliton with $\alpha = 0.4$; (a) $q = 0.1$, (b) $q = 0.25$, (c) $q = 0.31$

当所取 q 值极为靠近理论取值上限 I_{max} 时[如图 2(c) 所示]，输入光强分布使整体自诱导渐变折射率呈缓变的对称爱泼斯坦型分布，光场功率峰值区自聚焦效应的优势得以保持。形成非束缚态空间亮孤子光束长距离稳定传输[如图 3(c) 所示]的原因，不能解释为孤子光束自衍射和自聚焦维持平衡的结果。对比图 1 所示 $q = 0.31$ 时 $\Phi(x)$ 因子拟线性变化曲线和 $q = 0.1$ 的 $\Phi(x)$ 因子变化曲线可以看出：功率峰值区以外自散焦占优势的背景平面波传输空间， $\Phi(x)$ 因子的平衡作用增强，具有较大横向渐近传播常数的背景平面波以足够速率散射能量，抑制了功率峰值区的自聚焦对孤子光束的压缩，两种效应平衡时即形成非束缚态空间亮孤子的稳定传输。根据波导模式理论，这种稳定传输可以看作是自诱导波导结构的基模场尾部趋于零的速率($q = 0.31$)与辐射模散射能量的速率[(10) 式所定义的 q_{max}] 准连续的稳态传输模式。

$q = 0.25$ 的准稳定传输[如图 3(b) 所示]显示出三、五阶效应的竞争与 $\Phi(x)$ 因子平衡作用在较长纵向传播距离上的周期性效果。图 2(b) 所示的倒 W 型自诱导渐变折射率分布外沿及内侧具有相近的梯度和变化跨度，可见功率峰值区三、五阶效应的竞争初期不显示任何一种优势。峰值区以外的传输空间里， $\Phi(x)$ 因子的平衡作用不显著[参见图 1 中 $q = 0.25$ 的 $\Phi(x)$ 曲线]。随着背景平面波散射能量，功率峰值区的高度缓慢下降，使倒 W 型自诱导波导结构

内侧折射率的变化幅度略微缩小, 相应减弱了峰值区自散焦效应, 光子光束经历有限程度的短暂压缩后, 背景平面波能量散射导致功率峰值区的高度回落(或光束宽度恢复)。进一步计算结果表明: 空间光子光束在相当长的纵向传播距离上持续显示这种周期性平衡效果, 并伴随有光子分裂现象。类似于高阶束缚态空间亮光子自衍射与自聚焦周期性平衡显示出光子光束的压缩和分裂现象, $q = 0.25$ 情形可以看作高阶非束缚态空间亮孤子的传输行为, 只是由于运动背景平面波能量散射, 光子光束经历有限程度的短暂压缩后即恢复。与高阶束缚态亮光子自聚焦、自衍射优势周期性显示造成的等波幅光子分裂, 在相当长纵向传播距离上, $q = 0.25$ 非束缚态空间亮孤子的准稳定传输保持了峰值区的主峰高度远大于左侧分裂光子的波幅, 同步缓慢回落直至轮廓消失。这是由光功率峰值区尾部趋于零的速率($q = 0.25$) 与体现能量散射速率的背景平面波横向渐近传播常数取值上限 q_{\max} 之间存在较明显差异造成的。

背景平面波光强无穷远处渐近值取 $I_{\infty} = 1.0$ 时, 在 (q, α) 可取值范围内作进一步计算的结果表明: 主克尔型 $\chi^{(3)} + \chi^{(5)}$ 介质中非束缚态空间亮光子稳定和准稳定传输的 (q, α) 区间很小; 尤其在代表自聚焦系数的 α 值选定后, 这类空间亮光子稳定和准稳定传输的 q 取值域远小于其理论取值域[参见表 1 及式(10)], 这是由于所取 q 值远离其理论取值上限时, ϕ 因子严重退化(体现在其中央拟线性梯度变化区间压缩), 导致非平凡位相因子对输入非束缚态空间亮光子波包的调制作用大为减弱, 使其不能形成稳定传输, 在取 $q = 0$ 奇异点情形时这种位相因子调制作用的弱化表现得尤其突出。而背景平面波的横向渐近传播常数极为靠近相应取值上限 q_{\max} 时, 传输稳定性最强的结果(参见表 1), 验证了用上述模式理论解释稳定传输原因所作的结论。综上所述, 在这类介质中实现非束缚态空间亮光子稳定传输的条件非常苛刻, 非平凡位相因子对于平衡三、五阶效应, 以及对输入非束缚态空间亮光子波包在整个非局域非线性过程中作有效调制而形成稳定传输起决定性作用。

Table 1. Summary of simulation

$\alpha \backslash q$	0.35	0.34	0.33	0.32	0.31	0.30	0.29	0.28	0.27	0.26	0.25	0.24	0.23
0.4	×	×	×	×	○	○	○	√	√	√	√	×	×
0.38	×	○	○	○	√	√	√	×	×	×	×	×	×
0.42	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	√
$\alpha \backslash q$	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.17	0.16	0.15	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10
0.4	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
0.38	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
0.42	√	√	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

○: stable; √: existing; ×: nonexisting.

作者还注意到 $q = 0$ 的奇异点情形。尽管 q_{\max} 由 α 、 I_{∞} 共同决定, q 的下限值理论上可以取为 0, 式(4) 从形式上给出这种情形下初始实场振幅分布的表达式。但这将导致 $\phi(x)$ 退化为平凡因子及 $I_{\infty} = 0$ 的适应于束缚态空间亮孤子的位相因子和边界条件。这种平凡位相因子显然与式(4) 给出的初始实场振幅分布($q = 0$ 时) 的表达式矛盾, 可见该形式上的初始实振幅表达式不适用于非束缚态空间亮光子 $q = 0$ 的奇异点情形。但是, 针对同类介质并采用上述奇异点情形下的初始实场振幅表达式, 对空间暗光子传输的模拟却得到很有意义的结果。

结 论 本文从理论上深入讨论了主克尔型 $\chi^{(3)} + \chi^{(5)}$ 介质中非束缚态空间亮孤子的传输稳定性。数值模拟结果表明: 这类空间亮孤子的稳定传输, 是三、五阶效应竞争在非平凡位相因子作用下取得平衡的结果。这类亮孤子的准稳定传输可看作高阶孤子的传输行为, 但光子

光束分裂和周期性压缩的特征及原因都与束缚态空间亮孤子完全不同。稳定及准稳定传输的 (q, α) 可取值区间很小, 要求所取的输入光场横向渐近传播常数尽可能接近理论最大值 q_{\max} (当 I_{∞} , α 值确定后), 以获得自诱导波导结构基模光场尾部趋于零的速率与辐射模横向传播常数准连续的最稳定传输模式。

参 考 文 献

- [1] Aitchison J S, Silberberg Y, Weiner A M *et al.*. Spatial optical solitons in planar glass waveguides. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, **8**(6) ·1290~ 1297
- [2] Skinner S R, Allan G R, Andersen D R *et al.*. Dark spatial soliton propagation in bulk ZnSe. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1991, **27**(9) ·2211~ 2219
- [3] Buryak A V, Kivshar Y S, Trillo S. Optical solitons supported by competing nonlinearities. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(19) ·1961~ 1963
- [4] Lawrence B L, Cha M, Torruellas W E *et al.*. Measurement of the complex nonlinear refractive index of single crystal p-toluence sulfonate at 1064 nm. *Appl. Phys. Lett.*, 1994, **64**(21) ·2773~ 2775
- [5] Kivshar Y S, Afansjev V V, Snyder A W. Dark-like bright solitons. *Opt. Commun.*, 1996, **126**(4~ 6) ·348~ 356
- [6] 黄念宁. 孤子理论和微扰方法. 上海: 上海科技教育出版社, 1996. 186~ 232
- [7] 艾仑伯格 G 著. 孤立子——物理学家的数学方法. 刘之景译. 北京: 科学出版社, 1989. 96~ 100
- [8] Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 1972, **34**(1) ·62~ 69
- [9] 郭柏灵, 庞小峰. 孤立子. 北京: 科学出版社, 1987. 7, 144
- [10] Adams M J. *An Introduction to Optical Waveguides*. New York: John Wiley & Sons, 1981. 132

Propagation of the Unbounded Bright Spatial Soliton

Wang Chao

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240)

Chen Yingli Chen Xianfeng Li Qu

(National Key Laboratory on Local Area Fiber-Optic Communication Networks
and Advanced Optical Communication Systems,

Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

(Received 3 October 1997; revised 31 January 1998)

Abstract Propagation of the unbounded bright spatial soliton in non-Kerr type media is studied. Numerical calculation results show that propagation of the unbounded bright spatial soliton can take place in the so-called cubic-quintic nonlinear medium. The stability of propagation depends on the values of the asymptotic wave number of the background plane wave q , and of $\chi^{(3)}$, $\chi^{(5)}$, where the nontrivial phase variation also plays an important role.

Key words unbounded bright spatial soliton, cubic-quintic nonlinear medium, nontrivial phase variation.