

同轴共轭透镜对斜入射平行光的聚焦衍射特性*

赵 斌 李 柱

(华中理工大学机械科学与工程学院仪器所, 武汉 430074)

摘 要 通过对同轴共轭透镜的基尔霍夫衍射的分析, 导出了合适的衍射图计算公式, 分析了斜入射时的衍射图特性, 给出了模拟计算和实验结果, 并探讨了在调整允差方面的应用.

关键词 衍射, 斜入射, 无衍射光.

同轴共轭透镜是目前常用的产生近似无衍射光的光学元件. 无衍射光是电磁波动方程的一组特解, 它是由全部与传播主轴成某一固定夹角的平面波成分迭加而成的^[1, 2]. 理想的无衍射光在物理上并不存在, 因为它所具有的能量不是有限的, 目前实验上都只是在一个有限的距离内实现无衍射现象. 但尽管如此, 有限的无衍射距离在现实中仍具有相当大的应用前景, 故研究近似无衍射光在实现过程中会出现的各种理论和技术问题就具有现实的意义^[3, 4]. 本文所讨论的问题就是实际同轴共轭透镜在使用中因为倾斜而对无衍射光束光斑质量所产生的影响, 这种影响的理论分析和计算对装调允差的确定及相应光学机械系统的设计都是有用的. 关于无衍射光扫描中的倾斜衍射现象, 文献中已有报道^[5], 但尚未见相应的理论分析.

1 衍射理论分析

设同轴共轭透镜(如图 1 所示)的锥角为 θ , 它对应的透过函数为

$$t(r) = \begin{cases} \exp[-ik(n-1)r\theta] & r < D/2 \\ 0 & r \geq D/2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 n 为材料的折射率, D 为透镜直径.

不失一般性, 可以设斜入射的平面波光线与纸面平行, 并与 z 轴成 η 角, 则入射波可写为

$$E_1 = \exp(ikx \sin \eta) = \exp(ikr \cos \varphi \sin \eta) \quad (2)$$

于是, 在同轴共轭透镜的出射面, 光场为

$$E_1' = E_1 t(r) = \exp(ikr \cos \varphi \sin \eta) \exp[-ik(n-1)r\theta] \quad (3)$$

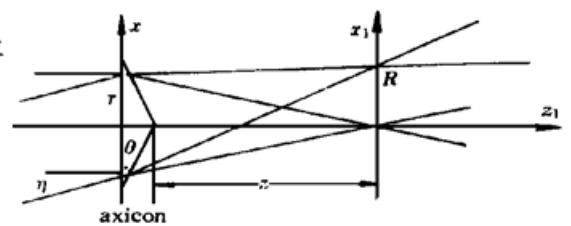


Fig. 1 Illustration of axicon focusing

* 国家自然科学基金资助项目(编号 59675080).

收稿日期: 1997-05-24; 收到修改稿日期: 1998-02-16

易于证明, 在 η 不大的情况下, 光场可作菲涅耳衍射近似, E'_i 的衍射结果为一中心移动了 $z \sin \eta$ 的贝塞尔函数分布. 而当 η 较大时, 实验显示此时的光场, 不能作菲涅耳衍射近似, 而必须直接应用基尔霍夫衍射公式, 并在光程展开中保留更多的项, 即用公式

$$E_z(R, \xi) = \frac{1}{iz\lambda} \iint_{\Sigma} E'_i \exp(ikL) d\sigma \quad (4)$$

来计算衍射分布, 其中 L 为

$$L = [z^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{1/2} = [z^2 + r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \xi)]^{1/2} \quad (5)$$

式中 (r, φ) 为同轴共轭透镜出射面上的极坐标, (R, ξ) 为 z 面的极坐标.

根据 $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2 - x^2/8$, 可得

$$L = z \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{[r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \xi)]}{z^2} - \frac{1}{8} \frac{[r^4 + R^4 + 4r^2R^2 \cos^2(\varphi - \xi) + 2r^2R^2 - 2(r^2 + R^2)(2rR) \cos(\varphi - \xi)]}{z^4} \right\} \quad (6)$$

由于入射线倾斜而造成的 z 面上衍射图的偏移, 衍射图中心的 R 往往较大, $(R/z)^2$ 项应保留; 而受透镜孔径的限制, $(r/z)^2$ 以上的项则往往可忽略, 于是可得

$$L = z + \frac{(r^2 + R^2)}{2z} - \frac{(R^4 + 2r^2R^2)}{8z^3} - \frac{rR}{z} \left(1 - \frac{r^2 + R^2}{2z^2}\right) \cos(\varphi - \xi) - \frac{r^2R^2}{2z^3} \cos^2(\varphi - \xi) \quad (7)$$

将 L 代入衍射积分(4)式得

$$E_z(R, \xi) = \frac{\exp[ik(z + R^2/2z - R^4/8z^3)]}{iz\lambda} \times \int_0^{D/2} \exp[ik(r^2/2z - r^2R^2/2z^3) - ik(n-1)r\theta] H(r, R, \xi) r dr \quad (8)$$

其中

$$H(r, R, \xi) = \int_0^{2\pi} \exp(ikr) f(\varphi) d\varphi \quad (9)$$

$$f(\varphi) = r \sin \eta \cos \varphi - \frac{rR}{z} \left(1 - \frac{r^2 + R^2}{2z^2}\right) \cos(\varphi - \xi) - \frac{r^2R^2}{4z^3} \cos(2\varphi - 2\xi) \quad (10)$$

由(8)式可见, 衍射图的形状主要由 $H(r, R, \xi)$ 决定. 为此, 要进一步分析 $H(r, R, \xi)$ 积分中的相位指数 $f(\varphi)$. 作变量代换 $\varphi - \xi = \varphi'$, 略去 $\frac{r^2 + R^2}{2z^2}$, 将(10)式整理变换成

$$f(\varphi) = -r[(R/z) \sin \eta \cos \xi] \cos \varphi' - r \sin \eta \sin \xi \sin \varphi' - (r^2R^2/4z^3) \cos(2\varphi) = - (r/2)R' \cos(\varphi' - \xi') - (r^2R^2/4z^3) \cos(2\varphi) \quad (11)$$

其中: $R' = \sqrt{(R - z \sin \eta \cos \xi)^2 + (z \sin \eta \sin \xi)^2}$,

$$\xi' = \arctan \left(\frac{z \sin \eta \sin \xi}{R - z \sin \eta \cos \xi} \right) \quad (12)$$

从图 2 可以更好地理解 R' 和 ξ' 的几何意义.

衍射图的中心对应 $R' = 0$, 即

$$R = z \sin \eta, \quad \xi = 0$$

于是, (9) 式可以写为

$$H(r, R, \xi) = \int_0^{2\pi} \exp [ikf(\varphi)] d\varphi = \int_0^{2\pi} \exp [- ik(r/z)R' \cos(\varphi - \xi') - ik(r^2R^2/4z^3) \cos(2\varphi)] d\varphi \quad (13)$$

由于本文实际研究的是衍射图案的中心区域, 包含不多的条纹数, 在这个区域 R' 是不大的, 它的数量级可以由 $\eta = 0$ 时的衍射中心斑大小来估计. 当 $\eta = 0$ 时, 有 $R' = R$, 衍射图中心对应 $R = 0$, 所以中心点附近的 R 亦很小, 因此 R^2 项可以略去, 这时(13)式化为

$$H(r, R, \xi) \approx \int_0^{2\pi} \exp [- ik(r/2)R \cos(\varphi - \xi')] d\varphi = 2\pi J_0(krR/z) \quad (14)$$

式中, J_0 为第一类零阶贝塞尔函数. 尽管 k 是一个较大的数, 但它实际上仍是一个确定的、有限的数($\sim 10^4 \text{ mm}^{-1}$), 因此对于近轴点, 总是可以在 z 像面上确定一个足够小的 R , 使得当 r 在 $0 \sim D/2$ 的范围内时, krR/z 小于一个不大的数(例如 10), 则这时 $J_0(krR/z)$ 在 r 的积分范围内的振荡起伏次数是不多的(例如 4 次), 远小于积分式(8)中另一指数部分的振荡次数($\sim D\theta/\lambda$), 因此 $J_0(krR/z)$ 是缓变函数, 从而可以应用稳相法^[3, 4, 6]处理这个振荡型积分, 即积分可近似为

$$E_z(R, \xi) \approx \frac{\exp [ik(z + R^2/2z - R^4/8z^3)]}{iz\lambda} 2\pi J_0(kr_p R/z) r_p \sqrt{-\frac{\pi}{2(1/z - R^2/z^3)k}} \times \exp \left[-i\frac{\pi}{4} - ik \frac{(n-1)^2 \theta^2}{2(1/z - R^2/z^3)} \right] \approx \frac{\pi J_0(kr_p R/z) r_p \exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda z}} \exp \{ ik [z - \frac{(n-1)^2 \theta^2}{2} z] \} \quad (15)$$

其中稳相点为

$$r_p = \frac{(n-1)\theta}{(1/z - R^2/z^3)} \approx (n-1)z\theta \quad (16)$$

由(15)式可以得出衍射条纹是一系列同心环, 其间距约为

$$\Delta R \approx \pi z / kr_p = \pi / [k(n-1)\theta] \quad (17)$$

由于所研究的衍射图只包含中心区域不多的条纹, 它们主要集中于半径为数倍 ΔR 的范围内, 因此可以设定

$$R_{\max} \leq m \Delta R \quad (18)$$

其中 $m \approx 10$, 于是

$$krR/z < \pi m r / r_p \quad (19)$$

又由于所研究的衍射图不选择很靠近同轴共轭的顶点, 因此 z 不会很小, r_p 也不会很小(一般在 $0.1D/2 \sim 0.9D/2$ 范围), 于是(19)式右边的值就在 100 这个量级, 而 $J_0(krR/z)$ 在整个 r 的积分区域的振荡次数也就在几十次这一量级, 仍属缓变函数, 因此, 在数倍条纹宽度的范

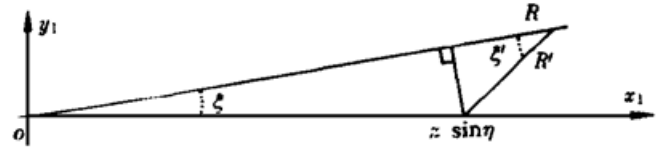


Fig. 2 Illustration of the meaning of R' and ξ'

围内,仍可以用稳相法来近似处理衍射积分.

对于 $\eta \neq 0$ 的情况,因为衍射图中心为

$$\xi = 0, \quad R = z \sin \eta$$

所以在中心附近有 $R \approx z \sin \eta$, R^2 不可忽略,但在新中心附近范围内 R' 却是不大的,若与 $\eta = 0$ 时类似, R' 也符合

$$krR'/z < \pi mr/r_p \quad (20)$$

其中 r_p 也按(16)式取值.同时 R 符合

$$kr^2R^2/4z^3 \approx (kr^2/4z) \sin^2 \eta < (kD^2/16z) \sin^2 \eta < \epsilon \quad (21)$$

ϵ 是一个不大的数(从数字模拟和实验可以看到, $\epsilon \approx 5$ 时,衍射图案的变化就已很显著了,故上式是易于满足的),则(13)式的 $H(r, R, \xi)$ 仍将是一个 r 的缓变函数,即在 $0 \sim D/2$ 内振荡次数不多,这一点易于通过具体选取几个 η, z 和 (R, ξ) 值,实际计算出 $H(r, R, \xi) \sim r$ 的曲线来验证,本文在此就不给出这种曲线了.

因此, $\eta \neq 0$ 时衍射图中心区域的计算仍可以用稳相法近似处理,则

$$\begin{aligned} E_z(R, \xi) &\approx \frac{\exp [ik(z + R^2/2z - R^4/8z^3)]}{iz\lambda} H(r_p, R, \xi) r_p \sqrt{-\frac{\pi}{2(1/z - R^2/z^3)k}} \times \\ &\exp [-i\pi/4 - ik(n-1)^2\theta^2/2(1/z - R^2/z^3)] = \\ &\frac{H(r_p, R, \xi) r_p \exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\lambda z}} \times \\ &\exp \{ ik[z + R^2/2z - R^4/8z^3 - (n-1)^2\theta^2z/2 - (n-1)^2\theta^2R^2/2z] \} \quad (22) \end{aligned}$$

其中稳相点仍由(16)式确定.由于本文研究的是同轴共轭透镜的近似无衍射区的衍射图,所以 $z < D/[2(n-1)\theta]$, r_p 不会超过 $D/2$.从(22)式可以看出,倾斜衍射图的性质主要由 $H(r_p, R, \xi)$ 决定.

下面来讨论一下 $H(r_p, R, \xi)$ 的几点性质.

1) 在(13)式中,因为在衍射图的中心区域有 $R \approx z \sin \eta$,在中心区域,当 R 和 ξ 变化时, R' 的相对变化较大,而 R 的相对变化很小,可以认为近似不变,故可以用 $z \sin \eta$ 代替相位指数中第二项的 R ,即 R 的变化只体现为相位指数中第一项中 R' 的变化,同时代入

$$r = r_p = (n-1)z\theta,$$

得

$$H(r_p, R, \xi) \approx \int_0^{2\pi} \exp [-ik(n-1)\theta R' \cos(\varphi - \xi') - ikz(n-1)^2\theta^2 \sin^2 \eta/4 \cos(2\varphi)] d\varphi \quad (23)$$

可以看出:相位指数的前一项与 z 和 η 都无关,它对应正常的无衍射项;而第二项则随着 z 和 $\sin^2 \eta$ 而增大.随 $\sin^2 \eta$ 增大是明显的,也是易于理解的;而随 z 增大却导致一个现象,即:对于同一个倾斜量 η ,在不同的 z 处,看到的衍射图案是不同的. z 越小,图案越小,且越简单; z 越大,图案越大,且越复杂.

2) 将(13)式的积分分解为 $(0 \sim \pi/2)$ 、 $(\pi/2, \pi)$ 、 $(\pi, 3\pi/2)$ 、 $(3\pi/2, 2\pi)$ 四个区间的积分,再经过合适的积分变量代换可得

$$H(r_p, R, \xi) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos [(kr_p R'/z) \cos(\varphi - \xi')] \exp [-ik(r_p^2 R^2/4z^3) \cos 2\varphi] d\varphi +$$

$$2 \int_0^{\pi/2} \cos [(kr_p R'/z) \sin (\varphi' - \xi')] \exp [- ik(r_p^2 R^2/4z^3) \cos 2\varphi'] d\varphi' \quad (24)$$

另外, 从图 2 中可以看出, 坐标 (R, ξ) 和参数 (R', ξ') 是一一对应的, 故可以将 $H(r_p, R, \xi)$ 写成 $H(r_p, R', \xi')$. 由于在衍射图的中心附近, ξ' 和 R' 相对变化很大, 而 R 相对变化不大, 在 R 不变的近似下, 利用(24)式易于证明

$$\begin{aligned} H(r_p, R', -\xi') &= H(r_p, R', \xi'), \\ H(r_p, R', \xi' + \pi) &= H(r_p, R', \xi'), \\ H(r_p, R', \xi' \pm \pi/2) &= H^*(r_p, R', \xi'), \\ H(r_p, R', \pi/4 - \xi') &= H^*(r_p, R', \pi/4 + \xi'), \\ H(r_p, R', 3\pi/4 - \xi') &= H^*(r_p, R', 3\pi/4 + \xi') \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $*$ 表示复共轭.

由此可见, $H(r_p, R', \xi')$ 对称于 $\xi' = 0$ 线, 即对称于主平面 xoz , 且 $\pm \pi/4$ 线和 $\pi/2$ 也都是对称线. ξ' 角每隔约 $\pi/2$ 强度就重复一次. 在下面的模拟计算和实验中可以看到衍射图案的这些对称性特点.

3) 令 $R = z \sin \eta$, $\xi = 0$, 则 $R' = 0$, 代入(13)式可得倾斜衍射图中心强度随 η 的变化规律

$$\begin{aligned} H(r_p, z \sin \eta, 0) &= 2\pi J_0(kr_p^2 R^2/4z^3) = \\ &= 2\pi J_0[kz(n-1)^2 \theta^2 \sin^2 \eta/4] \end{aligned} \quad (26)$$

4) 在离倾斜衍射图中心较远的外围区域, R' 相对大大增加了, 而 R 的相对变化却仍然不大, 这时有

$$kr_p R'/z \gg kr_p^2 R^2/4z^3 \approx kr_p^2 \sin^2 \eta/4z,$$

则

$$H(r_p, R, \xi) \approx 2\pi J_0(kr_p R'/z) \quad (27)$$

可见衍射图案的外围仍近似为贝塞尔分布, 即等距同心圆环, 这与实验也是相符的.

2 数值模拟计算和实验

利用计算机对下面的积分进行了计算和绘图:

$$E(x, y) = \int_0^{2\pi} \exp [- iM \cos (\varphi' - \xi') - iN \cos 2\varphi'] d\varphi' \quad (28)$$

其中

$$M = k(n-1)\theta R', \quad N = kz(n-1)^2 \theta^2 \sin^2 \eta/4 \quad (29)$$

R' 在以 $(z \sin \eta, 0)$ 为中心的一矩形内取值, 即

$$X \sim [-X_0, X_0];$$

$$Y \sim [-Y_0, Y_0];$$

$$R' = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2},$$

而

$$\xi' = \arctan (Y/X).$$

计算中一些参数的取值为

$$\theta = 0.01, \quad n = 1.5, \quad k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(0.6328 \times 10^{-3})$$

值得一提的是， θ 值的大小影响衍射图的条纹间距，但不管 θ 、 z 和 η 的值如何，只要 N 值相同，则衍射图的特征就是相同的，故图 3 中按 N 值的大小给出衍射图计算结果。

几种典型的倾斜衍射图实验结果示于图 4。实验参数为：同轴共轭透镜的直径 $D = 40$ mm，折射率 $n = 1.5$ ，锥角 $\theta \approx 6 \times 10^{-3}$ ；观察面至同轴共轭透镜的距离 $z \approx 3000$ mm。图中按测量值 η 和对应的计算值 N 排列。

由理论计算和实验的对比可以看出，在倾斜衍射图的中心区域，本文所给出的计算方法基本上是与实际相符的。

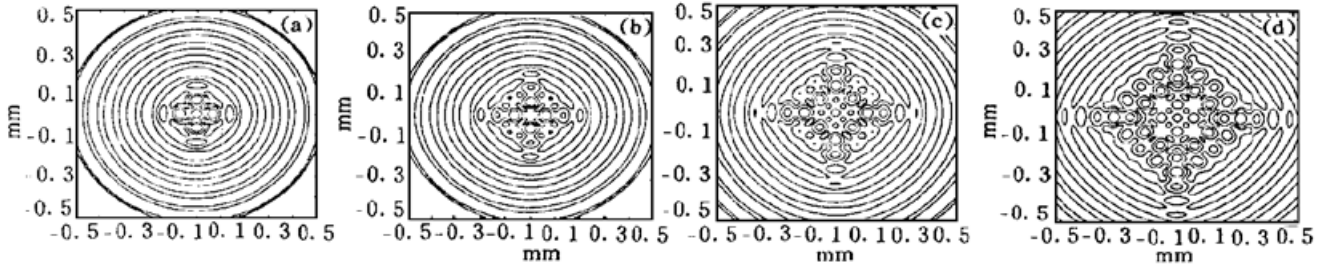


Fig. 3 Numerical simulation of diffraction pattern. (a) $N = 1.3963$, (b) $N = 2.0944$, (c) $N = 3.1417$, (d) $N = 4.7125$

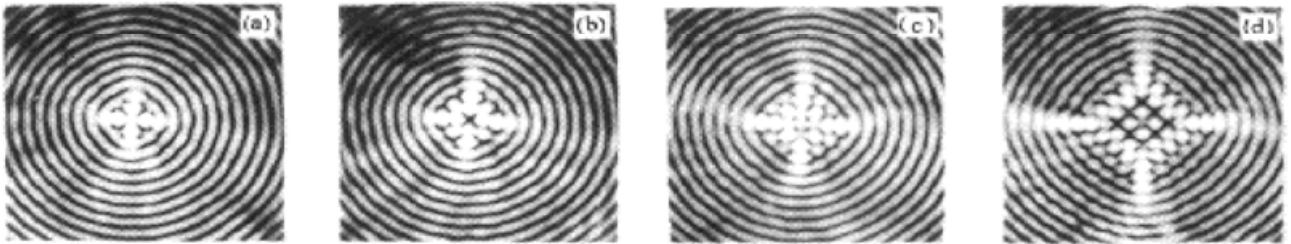


Fig. 4 Experimental result of diffraction in different oblique angle. (a) $\eta \approx 8^\circ$, $N \approx 1.3$, (b) $\eta \approx 11^\circ$, $N \approx 2.4$, (c) $\eta \approx 13^\circ$, $N \approx 3.3$, (d) $\eta \approx 16^\circ$, $N \approx 5.0$

3 在装调允差方面的应用

通过前面的分析可知，如果同轴共轭透镜在装调中发生倾斜，则当距离较大时，无衍射光的图案就要发生较大的变化，这是人们所不希望的，于是就提出这样一个实际问题，即在某一确定的应用条件下，同轴共轭透镜的调整允差如何确定，而这又会影响相应的调整机构的精度要求。

从前面的模拟计算中可以看出，当 η 角从“0”逐步增大时，衍射图案中心的强度亦逐步下降，并在降至“0”后又不断衰减起伏。作为一种判断的依据，本文提出将中心点强度第一次下降为零时所对应的角度 η 确定为调整允差的一个参考值。从(26)式可得第一个零点为

$$kz(n - 1)^2 \theta^2 \sin^2 \eta / 4 = 2.405$$

即以

$$\sin \eta \leq 3.102 / [(n - 1)\theta \sqrt{kz}]$$

作为调整精度要求的参考值。当然在实际应用中，中心点下降到零时已不能工作，故实际调整允差应根据具体情况取上式的若干分之一为宜。

结 论 同轴共轭透镜的倾斜会造成衍射图案的变化, 倾斜角越大, 传播距离越远, 衍射图案的变化就越显著. 这种变化可以用基尔霍夫衍射公式来计算, 并可导出调整精度要求计算公式.

参 考 文 献

- [1] Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I: The scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **4**(4) : 651~ 654
- [2] Durnin J, Miceli J J, Jr. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(15) : 1499~ 1501
- [3] Herman R M, Wiggus T A. Production and uses of diffractionless beams. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1991, **8**(6) : 932~ 942
- [4] Lu Baida, Huang Wenlong, Zhang Bin. Fraunhofer Diffraction of a Bessel beam focused by an aperture lens. *Opt. Commun.*, 1995, **119**(1) : 6~ 12
- [5] Rieko Arimoto, Caesar Saloma, Takuo Tanaka. Imaging properties of axicon in a scanning optical system. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(31) : 6653~ 6657
- [6] M. 玻恩, E. 沃耳夫. 光学原理. 北京: 科学出版社, 1981. 1002

The Focus Diffraction Property of Axicon Illuminated by Inclined Plane Wave

Zhao Bin Li Zhu

(*Institute of Instrumentation School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074*)

(Received 24 May 1997; revised 6 February 1998)

Abstract When the axicon is tilted, the incident plane wave focused by it does not form a Bessel distribution diffraction pattern again. The Kirchhoff diffraction formula is needed to analyze the diffraction result. Some higher term concerning with the tilted angle in the expansion of phase exponent should be retained. After conducting, an integral about φ can be obtained. The integral result fitted with the real diffraction pattern very well. Numerical simulation and experimental result agree with each other. The diffraction pattern formula can be used to estimate the adjustment permissible error of axicon in application.

Key words diffraction, tilted incident, nondiffraction.