

用瞳函数控制减小离散成像系统中的 频谱混淆

张海涛 赵达尊

(北京理工大学光电工程系, 北京 100081)

摘 要 离散探测器由于欠抽样产生频谱混淆, 介绍分析了减少混淆的一种光学预滤波法: 设计光学成像系统的瞳函数以产生期望的光学传递函数, 使其对抽样数据进行有效的预滤波, 从而完全抑制混淆.

关键词 离散成像系统, 瞳函数, 频谱混淆, 光学传递函数.

1 引 言

使用离散成像系统获取图像信息, 引起像质下降的因素很多, 如不尽完善的光学成像系统, 以及由于探测器的有限抽样阵、探测器单元的有限尺寸和单元间弥散所引起的非理想抽样等. 本文着重讨论欠抽样带来的频谱混淆(以下简称混淆)问题. 如 CCD 列阵, 抽样间隔是固定的, 根据尼奎斯特抽样定理, 当被抽样图像含有超过二分之一抽样频率的空间频率时, 图像将产生周期谱交叠失真, 即混淆失真^[1]. 大多数自然景象都不是带限函数, 欠抽样引起的混淆总是客观存在的. 特别当观察那些用来作系统特征描述的周期性目标时, 由于混淆产生的摩尔条纹非常明显. 这在很多研究测试中都是不希望有的结果. 减少混淆用得最多的方案是微扫描方法: 将多帧经过亚像素位移的图像合成一幅图像^[2-3]. 但微扫描除了增加系统的复杂性外, 对物体的运动状况还有一定要求, 而且数据量也将成倍增长, 混淆还是不能完全消除. 本文提出了从光学角度减少混淆能量的一种方法: 通过光学系统滤除不能被分辨且对低频严重干扰的高频成分的方法, 即光学预滤波法. 非相干成像系统的光学传递函数是瞳函数的自相关函数. 控制系统的出瞳函数, 使光学传递函数成为与抽样频率等宽的低通函数, 且通带内的频率除零频外衰减系数相等, 即可望抑制混淆, 改善像质.

2 离散成像系统的理论分析

在描述光学预滤波之前, 先介绍离散成像系统的非理想抽样模型^[1]. 该模型考虑较为全面, 包括了光学成像过程、有限抽样阵、探测器单元固有宽度带来的展宽抽样脉冲以及感光区在抽样周期内的非完全充满. 即填充因子并非为 100% 等诸多因素. 作为系统性能参数的

混淆和分辨率误差的计算方法也作了明确规定.

2.1 非理想抽样模型

设物体 $o(x, y)$ 经光学系统成像后的图像为 $i(x, y)$. 假设光学系统是线性系统, $p(x, y)$ 为光学系统的点扩散函数, 则 $i(x, y) = o(x, y) \circledast p(x, y)$, 其中 \circledast 表示卷积. 连续图像函数 $i(x, y)$ 经离散探测器阵列抽样后, 成为离散图像函数 $i_s(x, y)$:

$$i_s(x, y) = \left[\frac{1}{w_x w_y} a\left(\frac{x}{w_x}, \frac{y}{w_y}\right) * o(x, y) \circledast p(x, y) \right] r\left(\frac{x}{X}, \frac{y}{Y}\right) \frac{1}{\Delta x \Delta y} \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y}\right) \quad (1)$$

其中 $a(\cdot)$ 为描述探测器单元(像元)形状的函数, w_x, w_y 分别代表 x, y 方向上的像素宽度, $\Delta x, \Delta y$ 分别是 x, y 方向上的像素距, 即抽样间隔, $r(\cdot)$ 表示探测器阵列的限制函数, X, Y 分别对应 x, y 方向阵列的大小.

对(1)式两端同时进行傅里叶变换, 得到离散图像的空间频谱 $I_s(\xi, \eta)$:

$$I_s(\xi, \eta) = [A(w_x \xi, w_y \eta) O(\xi, \eta) P(\xi, \eta)] \circledast XYR(X\xi, Y\eta) \circledast \text{comb}(\Delta x \xi, \Delta y \eta) \quad (2)$$

其中大写字母代表(1)式相对应的小写字母所表示的函数的傅里叶变换后得到的频谱. 观察(2)式, 像素的形状、有限的阵列以及光学成像系统都可能减小像谱宽度, 高频部分衰减得更厉害. 由于同 comb 函数的卷积, 像谱将沿着频率轴 ξ, η 方向分别以 $1/\Delta x, 1/\Delta y$ 间隔周期重复排列, 若已被减少的像谱宽度仍大于抽样频率, 则各级频谱仍将相互交叠, 产生混淆.

2.2 混淆和模糊误差

$$\text{令} \quad I_{\text{pre}}(\xi, \eta) = A(w_x \xi, w_y \eta) O(\xi, \eta) \quad (3)$$

$I_{\text{pre}}(\cdot)$ 表示被像素形状调制的物体频谱. 忽略探测器有限阵列的影响, 将(3)式代入(2)式可得

$$I_s(\xi, \eta) = [I_{\text{pre}}(\xi, \eta) P(\xi, \eta)] \circledast \text{comb}(\Delta x \xi, \Delta y \eta) \quad (4)$$

在离散信号重建后的连续函数中, 混淆是像质恶化的最重要来源之一, 为了将其从实际的重建过程明确分离出来, 假设重建函数为理想的低通滤波函数 $H_R(\cdot)$:

$$H_R(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & |\xi| < \xi_s/2, |\eta| < \eta_s/2 \\ 0, & \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\xi_s = 1/\Delta x, \eta_s = 1/\Delta y$, 分别表示 x, y 方向上的抽样频率, 则重建滤波后的信号能量 E_R 为

$$E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |I_{\text{pre}}(\xi, \eta) P(\xi, \eta) H_R(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \int_{-\xi_s/2}^{\xi_s/2} \int_{-\eta_s/2}^{\eta_s/2} |I_{\text{pre}}(\xi, \eta) P(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \quad (6)$$

其中, $|I_{\text{pre}}(\xi, \eta) P(\xi, \eta)|^2$ 为离散抽样前像面功率谱密度. 混淆能量 E_a 为

$$E_a = \int_{-\xi_s/2}^{\xi_s/2} \int_{-\eta_s/2}^{\eta_s/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |I_{\text{pre}}(\xi - m\xi_s, \eta - n\eta_s) P(\xi - m\xi_s, \eta - n\eta_s)|^2 d\xi d\eta \quad (7)$$

Pratt^[4]对 E_a 的定义只考虑了零级谱邻近的一级谱的叠加影响, 此处修正为对所有谱级的叠加影响都予以考虑. 因为在实际情况中, 能使图像产生摩尔条纹的欠抽样过程, 常常包括二级甚至更高级谱的混淆作用, 所以有必要提出更普适的定义. 混淆能量与信号能量的比值即为混淆误差 ζ ^[4]:

$$\zeta_{\text{p}} = \frac{E_{\text{a}}}{E_{\text{R}}} \quad (8)$$

同样地, 可以定义图像“分辨率误差”. 分辨率下降的主要原因是抽样前成像过程各个环节的滤波作用. 若没有滤波影响, 重建后的理想信号能量 E_0 应为:

$$E_0 = \int_{-\xi^*/2}^{\xi^*/2} \int_{-\eta^*/2}^{\eta^*/2} |O(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \quad (9)$$

这里 $|O(\cdot)|^2$ 为原始物体的功率谱密度. 分辨率误差 ζ 可表示为

$$\zeta = \frac{E_0 - E_{\text{R}}}{E_0} \quad (10)$$

ζ_{p} 、 ζ 为离散成像系统的各环节的综合函数, 常用来作为系统的性能评价参数.

3 光学预滤波模型

设 $t(x, y)$ 为光学成像系统的瞳函数, 光学传递函数 $P(\xi, \eta)$ 就是瞳函数的归一化复自相关函数, 即

$$P(\xi, \eta) = c^{-1} [t(x, y) \otimes t^*(x, y)]^* \Big|_{x=\lambda D\xi, y=\lambda D\eta} \quad (11)$$

其中, $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |t(x, y)|^2 dx dy$, λ 为光波长, D 为出射光瞳面到像平面的距离.

观察(4)式, 一旦探测器固定, $I_{\text{pre}}(\cdot)$ 便可作为一个点抽样系统的连续输入函数, 而 $P(\cdot)$ 可以看作是抽样前的预滤波函数, $I_s(\cdot)$ 即是系统的离散输出函数. Brown^[5]详细推导了抽样数据的最佳预滤波函数 $Y(\xi, \eta)$: 图像在低噪声情形时, $Y(\xi, \eta)$ 为 rect 函数, 即

$$Y(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & |\xi| < \xi_s/2, |\eta| < \eta_s/2 \\ 0, & \end{cases} \quad (12)$$

但由简单的光瞳掩膜控制得到的光学传递函数 $P(\xi, \eta)$ 不可能等于 rect 函数. 下面给出证明:

假设 $P(\xi, \eta) = Y(\xi, \eta) = \text{rect} \left(\frac{\xi}{\xi_s}, \frac{\eta}{\eta_s} \right)$

则 $t(x, y) \otimes t(x, y) = c \text{rect} \left(\frac{x}{\xi_s \lambda D}, \frac{y}{\eta_s \lambda D} \right)$

对上式两端同时进行傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned} |T(\xi, \eta)|^2 &= c(\lambda D)^2 \xi_s \eta_s \text{sinc}(\xi_s \lambda D \xi, \eta_s \lambda D \eta) \\ T(\xi, \eta) &= \mathcal{F}\{t(x, y)\}, \end{aligned}$$

\mathcal{F} 表示傅里叶变换运算. 因为 $|T(\xi, \eta)|^2 \geq 0$, 而等式右端 $\text{sinc}(\cdot)$ 的分布有正有负, 且前面的常数均为正, 所以上式显然不成立, 命题得证.

虽然通过光学传递函数不可能实现对抽样数据理想的最佳 rect 形式滤波, 但可以取恰当的瞳函数 $t(x, y)$, 让 $P(\xi, \eta)$ 具有类似 rect 的一些性质: 通带内的值大致相等, 通带外的值锐减为零. 因为 $\text{sinc}(\cdot)$ 函数的最小值近似为 -0.217 , 所以可以让

$$|T(\xi, \eta)|^2 = c(\lambda D)^2 \xi_s \eta_s [\text{sinc}(\xi_s \lambda D \xi, \eta_s \lambda D \eta) + 0.217] \text{rect} \left(\frac{\xi_s \lambda D \xi}{U}, \frac{\eta_s \lambda D \eta}{V} \right) \quad (13)$$

式中 U 、 V 是瞳函数设计时的两个无量纲参量. U 、 $V > 0$, 它们的大小决定了 $|T(\cdot)|^2$ 包括的 sinc 函数的波瓣的多少, U 、 V 值越大, 包括的波瓣数越多, 反之越少. 忽略常系数, 下面是

瞳函数的一个最直观的解:

$$t(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sqrt{[\text{sinc}(\xi_s \lambda D \xi, \eta_s \lambda D \eta) + 0.217] \text{rect}(\xi_s \lambda D \xi / U, \eta_s \lambda D \eta / V)} \right\} \quad (14)$$

\mathcal{F}^{-1} 表示傅里叶反变换运算. 对理想成像系统, 忽略像差影响, 瞳函数即等于出瞳函数^[1]. 相应的光学传递函数(未归一化)为

$$P(\xi, \eta) = [\text{rect}(\frac{\xi}{\xi_s}, \frac{\eta}{\eta_s}) + 0.217 \xi_s \eta_s \delta(\xi, \eta)] \odot \text{sinc}(\frac{U\xi}{\xi_s}, \frac{V\eta}{\eta_s}) \quad (15)$$

$P(\cdot)$ 实质上与 $|T(\cdot)|^2$ 是傅里叶变换对, 当 U, V 越大, $|T(\cdot)|^2$ 的 sinc 波瓣数越多, $P(\cdot)$ 的窗口台阶的高度与中央峰值的比值 H 随着减小; 当 U, V 趋近无穷大时, $P(\xi, \eta) = \text{rect}(\xi/\xi_s, \eta/\eta_s) + 0.217 \xi_s \eta_s \delta(\xi, \eta)$, H 近于零, 只有均匀背景能量完全通过; 反之, U, V 越小, H 越大; 但当 $U, V < 4$ 时, $|T(\cdot)|^2$ 未包括高于正负一级的波瓣, $P(\cdot)$ 的台阶被较宽的 sinc 函数卷积光滑了. 其一维形状如图 1(b) 所示, 其中 $U = 3.84$, 图 1(a) 是对应的 $|T(\cdot)|^2$ 曲线.



Fig. 1 (a) Squared modulus of spatial-frequency spectrum of pupil function with $U < 4$, (b) Normalized optical transfer function with $U < 4$

本文需要的瞳函数及其光学传递函数是在 $U, V > 4$ 的条件下选取的, 不同的 U, V , 决定不同的 H 值大小, 它们的一维关系曲线如图 2 所示.

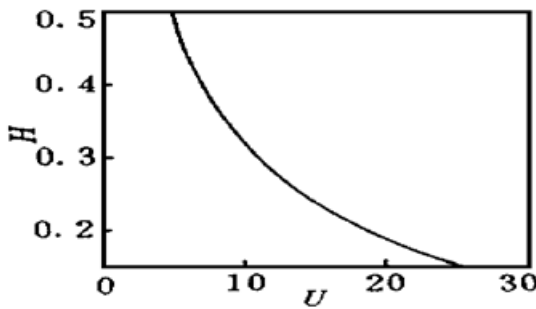


Fig. 2 H as a function of U ($U > 4$)

当 $U = 15.36$ 时, 瞳函数及其频谱模的平方和归一化光学传递函数的一维情形如图 3 所示.

观察图 3(c), 除近似零频的频率外, $P(\cdot)$ 通带内的各频率衰减系数相等, 且通带外的频率全部滤除. 这样, $P(\cdot)$ 较之理想的 rect 滤波, 多了一个亮背景, 虽然总的分辨率会下降, 但除背景外的各频率成分之间的对比度却不变.

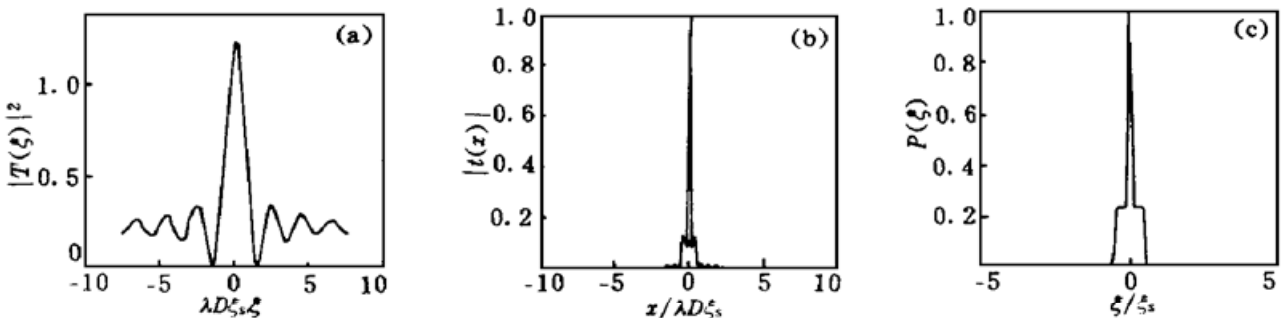


Fig. 3 ($U > 4$) (a) Modulus of pupil function, (b) Squared modulus of spatial-frequency spectrum of pupil function, (c) Normalized optical transfer function

4 计算机模拟结果

为了定量证明光学预滤波的效果, 在计算机上模拟了这个过程. 图 4(a) 代表原始辐条目标图像, 由 256×256 个像素(pixel) 组成, 图像中心的圆斑是显示器引起的混淆, 图 4(b) 为其对应的频谱振幅分布, 频率单位 $\Delta\xi(\Delta\eta) = 1/256$ (pixel⁻¹). 设 $\xi_s(\eta_s) = 1/3.2$ (pixel⁻¹), 即 x 、 y 方向的抽样周期均为 3.2 个像素, 重建矩阵大小为 80×80 . 图 5 表示抽样前经衍射受限光学系统成像后的图像, 其光学传递函数用 $\text{tri}(\frac{\xi}{6.4\xi_s}, \frac{\eta}{6.4\eta_s})^{11}$ 函数模拟, 忽略像元积分和有限抽样阵的影响, 图 5(a) 为重建前的频谱交叠情形, 在重建的零级频谱范围内, 混入了包括 2 级谱在内的其他级谱的值, 混淆很明显, 这从重建后的图像图 5(b) 可以观察得到. 图 6(a) 为衍射受限光学系统加上 Brown 提出的理论最佳预滤波后所得的图像, 图 6(b) 为加上本文设计的光学预滤波后的效果. 表 1 是上述三种情形的混淆和分辨率误差比较.

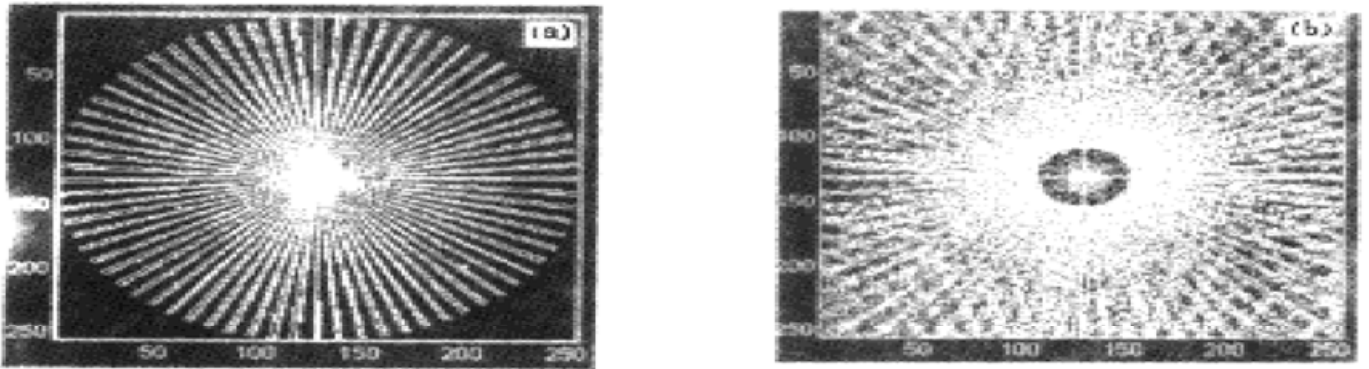


Fig. 4 (a) Spoke target with an array of 256×256 , (b) Modulus of spatial-frequency spectrum of target (a)

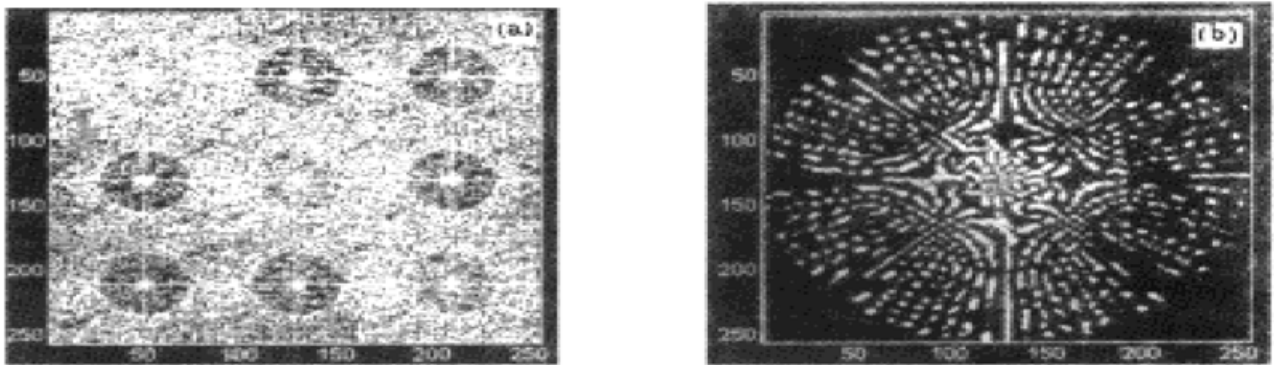


Fig. 5 (a) Aliased spectra of the target before reconstruction filtering, (b) Reconstructed image without prefiltering

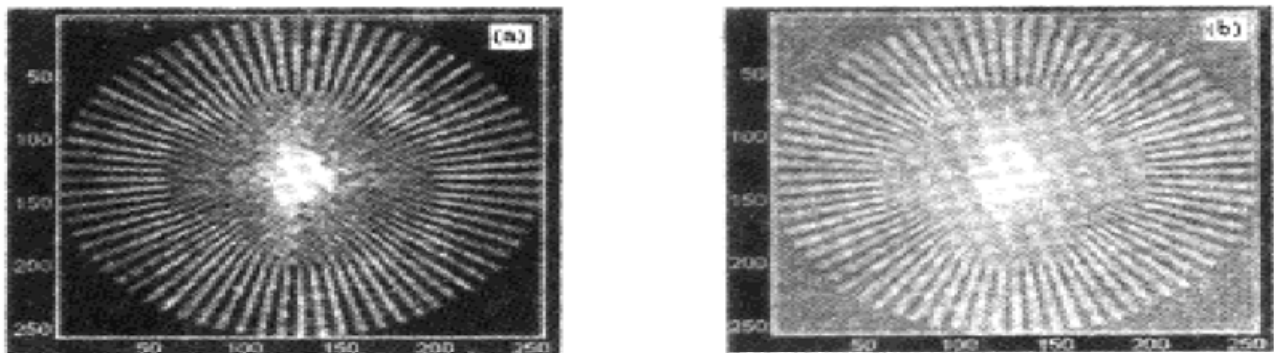


Fig. 6 (a) Reconstructed image with ideal optimum prefiltering, (b) Reconstructed image with optical prefiltering

Table 1. Comparison on aliasing errors and resiliution errors

	aliasing error ζ (%)	resolution error ζ (%)
diffraction limited optical system	55.2	1.0
ideal optimum prefiltering	0	1.0
optical prefiltering	0	43.8

从以上图表可以看出, 预滤波后, 虽然分辨率误差提高了, 但混淆误差完全避免了。

结 论 大多数离散成像系统, 抽样间隔是固定的, 由于欠抽样, 会使图像产生频谱交叠失真。这时并非使成像光学系统的分辨率愈高愈好, 而是要调整系统的带宽, 使之和固定的抽样间隔匹配。在混淆严重破坏像质时, 采用光学预滤波法, 舍弃高频部分从而减小或消除混淆, 不失为一种有效简便的方法。虽然此方法将降低光能利用率, 但对足够明亮的物体, 可望有实用价值。

参 考 文 献

- [1] 加斯基尔 J D. 线性光学·傅里叶光学·光学. 封开印译. 北京: 人民教育出版社, 1981. 270~ 289
- [2] Watson E A, Muse R A, Blommel F P. Aliasing and blurring in microscanned imagery. *Proc SPIE*, 1992, **1689**: 242~ 250
- [3] Friedenber A. Microscan in infrared staring systems. *Opt. Engng.*, 1997, **36**(6): 1745~ 1749
- [4] Pratt W K. *Digital image processing*. New York: A Willey-Interscience Pub., 1991. 267~ 285
- [5] Brown W K. Optimum prefiltering of sampled data. *IRE Trans. Inf. Theory*, 1961, **IT-7**(4): 269~ 270

Aliasing Reduction in Discrete Imaging Systems Using Pupil Function Controlling

Zhang Haitao Zhao Dazun

(Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

(Received 18 November 1997; revised 18 March 1998)

Abstract Aliasing will occur when sampling a scene containing spatial frequencies exceeding half of the sampling frequency. An optical method, referred as optical prefiltering, for reducing aliased signal energy in discrete imaging systems is proposed and discussed. Pupil function for producing the expected prefiltering effect is deduced. Simulation results are presented to illustrate the effectiveness of optical prefiltering method.

Key words discrete imaging system, pupil function, aliasing, optical transfer function.