

# 改进的多重网格法重建含遮拦物的干涉波前

姚 卫 吴东楼 王振东 贺安之

(南京理工大学应用物理系, 南京 210094)

**摘 要** 阐述了由单张干涉图求取相位主值图像及最小二乘相位恢复。推导出基于梯度拟合的泊松方程及其离散化形成后, 详细讨论了多重网格法对此方程求解的原理和过程。结合路径无关与路径相关算法的优点, 设计了自适应最优路径法作为多重网格法的预处理, 改进迭代的初始条件, 提高了重建精度, 同时大大加快了收敛速度。实验结果证明改进的多重网格法对含遮挡物的干涉图能获得很好的波前重建效果。

**关键词** 相位展开, 波前重建, 干涉层析术, 多重网格法, 流场。

## 1 引 言

在流场的三维干涉层析术中, 表征流场性质的折射率变化是通过干涉图来记录的。要重建流场的三维特性, 从干涉图中提取折射率变化在入射光方向上的投影是计算机层析技术的关键步骤。对于稳态场的干涉测试, 用相移法异步记录三或四张干涉图, 由之计算视场中各点的相位主值, 然后依据相位跃变  $2\pi$  (或  $-2\pi$ ), 对“包裹”的相位逐点作  $2n\pi$  的增减, 得到被恢复的变形波面<sup>[1~3]</sup>是近年来较为通用的干涉层析投影数据提取方法。然而, 对于瞬态场或较恶劣的测试环境, 无法保证准确的相移, 甚至连连续多张同一状态的干涉图也无法得到时, 就对由单张干涉图恢复变形波面提出了要求。

Takeda<sup>[4]</sup>、Macy<sup>[5]</sup>、Bone<sup>[6]</sup>等人在 80 年代及 90 年代初都在用傅里叶方法(FTM)提取干涉相位方面作出了相当的努力, 他们的工作证明由瞬态场的单张干涉图进行相位展开是完全可行的。

展开“包裹”的相位, 再现干涉波前, 准确提取波前变形量是干涉层析术中决定性的一步。相位展开技术常用的方法有路径无关和路径相关两种。路径无关法的特点是精度高、抗噪能力强, 但需消耗大量的计算时间和内存, 并且非常强调边界条件和初始条件的确定。路径无关方法的出发点是最小二乘相位估计, 即使已知的相位主值的梯度与估计波前梯度之方差达到最小。由这一约束可建立关于图像上各点的泊松(Poisson)方程。解这一大型超定方程采用多重网格法<sup>[8, 9]</sup>, 其主要目的在于解决传统的高斯-塞德(Gauss-Seidel)松弛迭代法求解泊松方程时, 对解的低频成分的丢失问题。它的根本思想是将在粗网格上求得的解的误差(解的高频成分)放到较细的网格上, 逐次进行高斯-塞德迭代, 把解的由低到高的分量在由粗到细的各层网格上求出并叠加。

对相位突变、遮挡物或边界条件的处理,采用加权的方法在各重网格中强制相应的约束条件,使这些条件不影响其他有效数据的迭代,有效地解决了含遮挡物的干涉波前重建。然而,此方法和其它路径无关的方法一样,需要大量的计算时间。

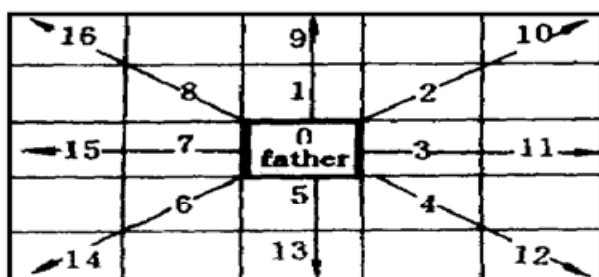
另一类相位展开方法称为路径相关方法。从干涉图经由傅里叶方法得到的相位主值分布图上,可以得到相位的梯度,真实相位的求取实际上就是对相位梯度的积分。然而实际得到的相位主值分布图,由于系统噪声、遮挡物、激波或频域欠采样、过采样等原因,会有许多误信息,即某些点在某些方向上一阶差分值的误差很大,积分路径通过该点后,此误差便传播到路径上以后的各点。这种误差积累效应严重时会使相位展开完全失败。所以,从某一相位基准点出发尽可能遍历所有像素点同时控制误差尽可能少地传播就构成了路径相关方法的基本思想。不难想象,无论采用什么准则,一定会有误差的积累,而且一般来说还会有一些数据被放弃,即积分路径在某些区域外发生环绕,而遗漏了区域内的数据未能处理。文中将给出这样的例子。所以,精度不高是这类方法的必然问题,它对精确的波前重建显然是不能满足要求的。

本文对多重网格法加以改进。用自适应最优路径法的结果作为多重网格法迭代的初值,充分结合两类算法的优点,提出一种快速、高精度的波前重建方法。通过再现含遮挡物的干涉波前,与经典方法比较,证明这种改进的多重网格方法在精度与速度方面都能达到满意的效果。

## 2 初值的确定——自适应最优路径法

对最优路径的选取,类似神经网络的旅行商路程(TSP)问题, Judge<sup>[7, 12]</sup>等人提出“最小跨度树”(MST)的图论方法,证明是非常有效的。然而对最小跨度树中各弧的定义方法(即树中各枝的跨度或权重),却一直有许多提法,如条纹调制度最小、一阶相位差分最小、或条纹密度最小等等。Bone<sup>[6]</sup>在1991年提出以局部展开相位的二阶差分作为选择树的下一个生长点的评判标准,即以当前的父结点(已展开)各方向的二阶差分与某一固定阈值比较,大于设定值的认为此方向的下一像素含误差信息的可能性比较大,当前路径须绕过此点。Quiroga<sup>[13, 14]</sup>对固定阈值的二阶差分判据作了自适应性的改进,把阈值与当前“特生长”的父结点的局域特性联系起来。他将此点的8领域二阶差分由小到大排序,大于某个阈值的被舍弃不用,其余的排进待处理队列,同时记二阶差分序列的第三个值为新的阈值。这样就保证了那些最可能具有大噪声的点位于树的最小分枝上,使它们最后被积分展开或根本不积分,而等待最后对全图的插值、平滑处理,从而完成相位的解包。

本文把这种方法再加以改进,使之更适用于含遮挡物、含噪声的相位展开。在本文采用的自适应最优路径法中,考虑树的当前待生长父结点 $O$ 的16邻域,如图1所示,标记 $O$ 结点



为 $O$ 。沿图示的8个方向计算二阶差分:

$$\Delta(i) = 2\varphi(i) - \varphi(0) - \varphi(i+8) \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

$\varphi(i)$  为 $i$ 点的真实相位。因 $O$ 是已展开的像素,故

$$\varphi(0) = \psi(0) \quad (2)$$

$\psi(i)$  表示 $i$ 点的相位主值。而 $\varphi(i)$  则是从 $O$ 点起对该

Fig. 1 16 neighbors of current father node

方向的一阶偏导数的积分：

$$\varphi(i) = \varphi(0) + [\psi(i) - \psi(0)] \tag{3}$$

[...]表示取  $2\pi$  的模，即一阶差分的主值。将(2)式、(3)式代入(1)式，得：

$$\Delta(i) = [\psi(i) - \psi(0)] - [\psi(i+8) + \psi(i)], \quad i = 1, 2, \dots, 8 \tag{4}$$

这样，此 8 个方向的二阶差分就完全由该方向的两个像素和待生长点——父结点决定。

树的生长次序是由一个“生长队列”控制的，队列按先进先出原则调度各待生长点。将当前的父结点  $O(i_0, j_0)$  的 8 个  $\Delta(i)$  排序，标记出小于阈值  $T$  的  $k$  个兄弟子结点，并将其坐标依次进入待生长队列，同时分别记下他们的父结点坐标  $(i_0, j_0)$ 。二阶差分大于阈值的舍去。把 8 个二阶差分值划分为若干等级，比如相差大于 0.005 的归入下一等级，否则认为属于同一等级。取第三等级的值作为当前进入队列的点成为父结点生长时的阈值  $T(i_0, j_0)$ 。然后取出队列的第一个点  $p(i_1, j_1)$ ，按：

$$\varphi(p) = \varphi(O) + [\psi(p) - \psi(O)] \tag{5}$$

对  $p$  点作相位展开。它的生长方向的选择是这样进行的：取  $p(i_1, j_1)$  的 16 邻域作 8 方向二阶差分排序，阈值  $T(i_0, j_0)$  已由它的父结点  $(i_0, j_0)$  差分排序时确定了，故二阶差分小于  $T(i_0, j_0)$  的各兄弟子点依次进入生长队列，并记下它们的父点是  $(i_1, j_1)$ 。每次取出队列中的第一点，作相同的处理。另一个要注意的是，对于遮挡物、边界的相位都必须预先置 0，并通知处理程序，标记为已处理点。同时注意选择满足条件的子点时，已进入队列的点就不再参加生长队列的排队了。因此，需要 4 个数组来完成最优路径的选择 (具体算法见附录 1)：

- 1) 待生长队列，存放待生长点坐标(queue)。其下一位置 next 初值置 1。
- 2) 待生长队列中各点对应的父点坐标(father)。
- 3) 已处理或已进入队列的点标记(flag)。初始化置遮挡物、边界和起始基准点为 1，其余为 0。
- 4) 待生长队列中各点对应的阈值( $T$ )。起始基准点的  $T(i_0, j_0) = \pi/2$ 。

图 2 是一个模拟的树的生长过程，网格中的值  $x$  表示该点的相位主值是  $x\pi$ ，每个网格左上角的数字表示该点进入队列的次序。

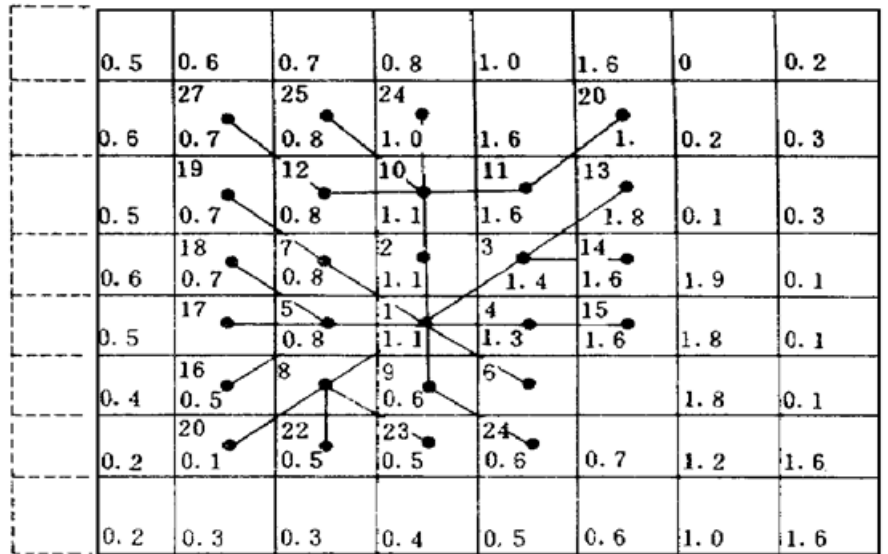


Fig. 2 A simulated minimum spanning tree and its growth. The integer on upper-left corner of every square indicates the sequence by which the point is put into the queue. The other numbers (called flooring number) in every square represent the principal phase value of the corresponding point

### 3 最小二乘相位展开——典型的路径无关方法

70 年代末 Fried、Hunt<sup>[10]</sup> 等人提出最小二乘(LMS)判据用于梯度拟合的相位展开法。90 年代初 Ghiglia 和 Romero 等人<sup>[11]</sup> 又对之作了改进。最小二乘的主要思想是求出相位主值  $\psi(x, y)$  在  $x$ 、 $y$  两方向的偏导数  $\partial\psi/\partial x$ 、 $\partial\psi/\partial y$ ，估计真实相位  $\varphi(x, y)$ ，使之在这两个方向的

斜率  $\partial\varphi/\partial x$ 、 $\partial\varphi/\partial y$  满足  $\Phi(\varphi) = [(\partial\psi/\partial x - \partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\psi/\partial y - \partial\varphi/\partial y)^2]$  最小。即要求  $d\Phi(\varphi)/d\varphi = 0$ 。很容易推得  $\varphi$  必须满足:

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 \tag{6}$$

这是一个泊松方程, 简记为  $\nabla^2\varphi = \nabla^2\psi$ 。下面的问题就是求解此方程。

在推导差分格式之前, 有必要考虑一下偏微分方程的边界条件。(6) 式可看作是有源二维热传导问题, 边界条件必须满足  $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r \in \text{边界}} \neq 0$ , 否则方程不可能有稳态解。所以在求解(6) 式时必须仔细规定合适的边界条件。这一点对下面将要导出的差分求解格式尤为重要, 不好的边界条件将导致  $\Phi(x, y)$  收敛到局部的而非全局的极小点, 甚至发散。

对于  $N \times N$  个像素的干涉图, 各点的相位主值已知为  $\psi_{ij}$ ,  $i, j = 0, \dots, N - 1$ , 其在  $x, y$  方向的偏微分用差分形式表示为:

$$\Delta_{ij}^x = \psi_{ij} - \psi_{i, j-1}, \quad \Delta_{ij}^y = \psi_{ij} - \psi_{i-1, j} \tag{7}$$

把它们增减  $2n\pi$ , 使之取值在  $(-\pi, \pi)$  之间, 可称为偏微分主值。为保证泊松方程解的唯一性, 必须在边界上定义:

$$\Delta_{i0}^x = -\Delta_{i1}^x, \quad \Delta_{0j}^y = -\Delta_{1j}^y, \quad \Delta_{iN}^x = -\Delta_{i, N-1}^x, \quad \Delta_{Nj}^y = -\Delta_{N-1, j}^y \tag{8}$$

(6) 式的离散表示为

$$\begin{aligned} (\varphi_{i, j-1} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i, j+1}) + (\varphi_{i-1, j} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i+1, j}) &= \rho_{ij} \\ \rho_{ij} &= \Delta_{i, j+1}^x - \Delta_{ij}^x + \Delta_{i+1, j}^y - \Delta_{ij}^y \end{aligned} \tag{9}$$

由(8) 式知边界条件为:

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i, \quad \varphi_{1, j} = \varphi_j, \quad \varphi_N = \varphi_{N-2}, \quad \varphi_N = \varphi_{N-2, j} \tag{10}$$

通常用高斯-塞德松弛迭代法解方程(9), 初始化  $\varphi_{ij} = 0$ ,  $i, j = 0, \dots, N$ , 然后按:

$$\varphi_{ij} = [(\varphi_{i, j+1} + \varphi_{i, j-1} + \varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j+1}) - \rho_{ij}]/4 \tag{11}$$

逐次迭代至收敛。高斯-塞德松弛迭代法的收敛速度极慢, 本文只将它用作多重网格法的一个运算步骤。

### 4 多重网格方法

观察(11) 式, 不难发现高斯-塞德松弛迭代格式中有一个明显的局部平滑算子, 它提取了解的低频成分, 与  $\rho_{ij}$  相减后, 低频成分易丢失, 收敛慢, 甚至可能收敛到某个局部解或误解。多重网格法的主要思想是逐次将高斯-塞德迭代的解的误差(解的低频分量), 从细网格传递

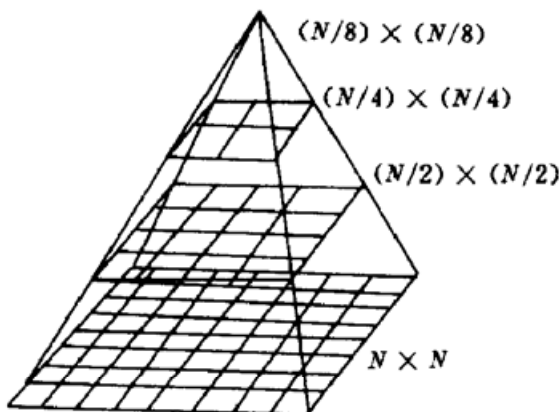


Fig. 3 Scheme of multigrid algorithm

到粗网格上, 自最粗网格开始求最低频的解, 把它延拓到下层较细的网格上, 作为下层求解时的初值; 在各层由粗到细的网络上求出解的由低到高的各种频率分量, 再合并成所求的解。由细网格上的问题逐次向上层较粗网格转移求解的过程, 称为“收缩”, 记为  $R$  算子; 而将粗网格上的解传递到下层细网格的过程, 称为“延拓”, 记为  $P$  算子。整个求解过程是在形如图 3 的金字塔形结构中进行循环迭代的。最简单的  $R$  算子是隔点采样, 即  $c_{ij} = f_{2i, 2j}$ , 其中  $f_{i, j}$  是  $N \times N$  细网格上的点,  $c_{ij}$  则定义在  $N/2 \times N/2$  的粗网格上。采用一个  $3 \times 3$  的模板对

细网格加权采样, 即  $R$ :

$$c_{ij} = \frac{1}{16}(f_{2i-1, 2j-1} + f_{2i-1, 2j+1} + f_{2i+1, 2j-1} + f_{2i+1, 2j+1}) + \frac{1}{8}(f_{2i, 2j-1} + f_{2i, 2j+1} + f_{2i-1, 2j} + f_{2i+1, 2j}) + \frac{1}{4}f_{2i, 2j} \quad (12)$$

$R$  算子可以看作是用模板

$$\begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{bmatrix}$$

对细网格上的点滤波后在隔点采样来实现由细向粗的收缩的。

用简单的双线性插值就可以完成由粗向细的延拓:

$$\left. \begin{aligned} f_{2i, 2j} &= c_{ij}, & f_{2i+1, 2j} &= (c_{ij} + c_{i+1, j})/2, & f_{2i, 2j+1} &= (c_{ij} + c_{i, j+1})/2, \\ f_{2i+1, 2j+1} &= (c_{ij} + c_{i+1, j} + c_{i, j+1} + c_{i+1, j+1})/4 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

实际的计算中,  $R$  算子是对各次估计解的残差操作的, 所以在各层网格上的高斯-塞德松弛也是对残差进行的, 这和对方程本身的松弛是等效的。把方程(9)写成  $A\varphi = \rho$ , 记  $e = \varphi - \varphi$ , 其中  $\varphi$  是对  $\varphi$  的近似, 有:

$$Ae = \rho - A\varphi \quad (14)$$

可见, 用 0 作为初值对  $Ae = r$  的松弛计算, 与以  $\varphi$  为初值对  $A\varphi = \rho$  的松弛是等效的, 其中  $r$  表示残差,  $r = \rho - A\varphi$ 。

从以上的原理分析, 可以给出多重网格法的实现步骤如下, 它是一个递归的自调用过程, 流程形如图 4 所示的 V 字结构, 称之为 MV 算法, 实施步骤见附录 2。图中  $R$  为收缩(restriction),  $P$  为延拓(prolongatin),  $G-S$  为高斯-塞德松弛迭代。

MV 算法中没有考虑边界效应和数据缺失、异常的问题。也就是实际干涉图的有限视场和遮挡物的问题。要把这些数据屏蔽起来, 采用加权为零的方法, 使它们不干扰其他数据的求解。设置加权矩阵  $\{\sigma_{ij} | \sigma_{ij} \in [0, 1]\}$ ,  $\{\tau_{ij} | \tau_{ij} \in [0, 1]\}$ ,  $i, j = 0, \dots, N$ 。定义

$$w_{ij}^x = \min(\sigma_{ij}^2, \sigma_{i, j-1}^2) w_{ij}^y = \min(\tau_{ij}^2, \tau_{i, j}^2) \quad (15)$$

$\sigma, \tau$  分别表示在  $x, y$  方向偏导数的加权。

(6) 式的离散形式为:

$$\begin{aligned} w_{i, j+1}^x(\mathcal{Q}_{j+1} - \mathcal{Q}_j) - w_{i, j}^x(\mathcal{Q}_j - \mathcal{Q}_{j-1}) + w_{i+1, j}^y(\mathcal{Q}_{i, j} - \mathcal{Q}_j) + w_{i, j}^y(\mathcal{Q}_j - \mathcal{Q}_{i-1, j}) &= \rho'_{ij} \\ \rho'_{ij} &= w_{i, j+1}^x \Delta_{i, j+1}^x - w_{i, j}^x \Delta_{i, j}^x + w_{i+1, j}^y \Delta_{i+1, j}^y + w_{i, j}^y \Delta_{i, j}^y \end{aligned} \quad (16)$$

高斯-塞德松弛迭代格式为:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j &= [(w_{i, j+1}^x \mathcal{Q}_{j+1} + w_{i, j}^x \mathcal{Q}_{j-1} + w_{i+1, j}^y \mathcal{Q}_{i+1, j} + w_{i, j}^y \mathcal{Q}_{i-1, j}) - \rho'_{ij}] / v_j \\ v_j &= w_{i, j+1}^x + w_{i, j}^x + w_{i+1, j}^y + w_{i, j}^y \end{aligned} \quad (17)$$

相应的  $R$  算子在  $x$  方向的滤波模板变成:

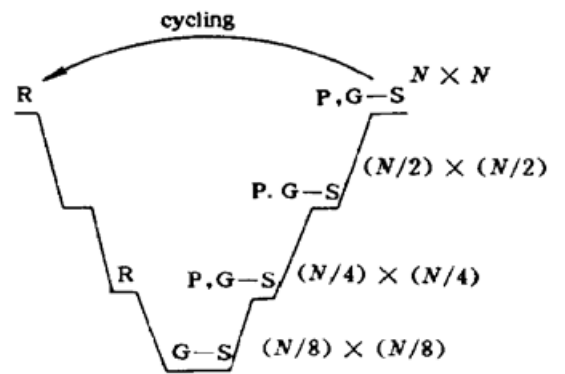


Fig. 4 Scheme of MV algorithm

$$\begin{bmatrix} \sigma_{i-1, j-1}/16 & \sigma_{i-1, j}/8 & \sigma_{i-1, j+1}/16 \\ \sigma_{i, j-1}/8 & \sigma_{i, j}/4 & \sigma_{i, j+1}/8 \\ \sigma_{i+1, j-1}/16 & \sigma_{i+1, j}/8 & \sigma_{i+1, j+1}/16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \perp \\ S_{ij} \end{matrix} \quad (18)$$

$S_{ij}$  是矩阵各元素的和。 $R$  算子在  $y$  方向的模板即将上式中的  $\sigma$  换成  $\tau$ 。

在加权的多重网各法中, 对加权矩阵  $\sigma, \tau$  也必须定义相应的“收缩”算子, 记作  $R'$ , 以确保零权值的信息同步向粗网格传递。它们的加权规则定义为:

$R'(\sigma_{2i, 2j})$ : 置上层粗网格上  $\frac{\partial}{\partial x}$  的加权为零, 如果在本层细网格上满足下列条件之一:

- 1)  $\sigma_{2i, 2j} = \sigma_{2i+1, 2j} = 0$  [如图 5(a)],
- 2)  $\sigma_{2i, 2j-1} = \sigma_{2i+1, 2j} = 0$  且  $\sigma_{i, j-1} \neq 0$  [如图 5(b)],
- 3)  $\sigma_{2i, 2j} = \sigma_{2i+1, 2j-1} = 0$  且  $\sigma_{i, j-1} \neq 0$  [如图 5(c)]。



Fig. 5 Weight restriction operation

不满足上述条件的, 按(18)式正常收缩。

$R'(\tau_{2i, 2j})$ : 置上层粗网格上  $\frac{\partial}{\partial y}$  的加权为零, 如果在本层细网格上满足下列条件之一:

- 1)  $\tau_{2i, 2j} = \tau_{2i+1, 2j} = 0$ ,
- 2)  $\tau_{2i-1, 2j} = \tau_{2i, 2j+1} = 0$  且  $\tau_{i-1, j} \neq 0$ ,
- 3)  $\tau_{2i, 2j} = \tau_{2i-1, 2j+1} = 0$  且  $\tau_{i-1, j} \neq 0$ 。

不满足上述条件的, 按(18)式正常收缩。下面就可以实现对含无效数据的相位主值分布在最小二乘意义下作相位展开。称以下算符为 WMV 算法:

$$\mathcal{Q} \leftarrow \text{WMV}(\mathcal{Q}, \Delta_N^x, \Delta_N^y, \sigma_N, \tau_N)$$

- 1) 以初值  $\mathcal{Q}$  对方程(18)作两次高斯-塞德松弛迭代。
- 2) 如果  $N \times N$  是最粗的网格, 转 9)。
- 3)  $\Delta_{N/2}^x \leftarrow R_w(\Delta_N^x - D^x \mathcal{Q}), \Delta_{N/2}^y \leftarrow R_w(\Delta_N^y - D^y \mathcal{Q})$ 。
- 4) 边界条件校正:  $\Delta_{N/2}^x$  矩阵的第一列置为第二列的相反数,  $\Delta_{N/2}^y$  矩阵的第一行置为第二行的相反数。
- 5)  $\sigma_{N/2} \leftarrow R'(\sigma_N), \tau_{N/2} \leftarrow R'(\tau_N)$ 。
- 6)  $\mathcal{Q}_{N/2} \leftarrow 0$ 。
- 7)  $\mathcal{Q}_{N/2} \leftarrow \text{WMV}(\mathcal{Q}_{N/2}, \Delta_{N/2}^x, \Delta_{N/2}^y, \sigma_{N/2}, \tau_{N/2})$ 。
- 8)  $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} + P(\mathcal{Q}_{N/2})$ 。
- 9) 以初值  $\mathcal{Q}$  对方程(17)作两次高斯-塞德松弛迭代。

实际上为了加速收敛, 使用如图 6 的循环迭代结构, 称之 WMG 算法, 它的伪代码如下:

$$\mathcal{Q} \leftarrow \text{WMG}(\mathcal{Q}, \Delta_N^x, \Delta_N^y, \sigma_N, \tau_N)$$

- 1) 如果  $N \times N$  是最粗的网格, 转 8)。
- 2)  $\Delta_{N/2}^x \leftarrow R_w(\Delta_N^x - D^x \mathcal{Q}), \Delta_{N/2}^y \leftarrow R_w(\Delta_N^y - D^y \mathcal{Q})$ 。
- 3) 边界条件校正:  $\Delta_{N/2}^x$  矩阵的第一列置为第二列的相反数,  $\Delta_{N/2}^y$  矩阵的第一行置为第二行的

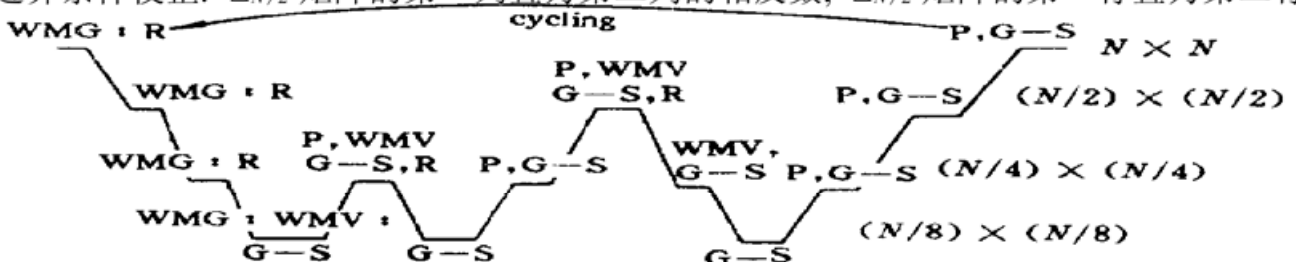


Fig. 6 Scheme of a practical multigrid algorithm

相反数。4)  $\sigma_{N/2} \leftarrow R'(\sigma_N)$ ,  $\tau_{N/2} \leftarrow R'(\tau_N)$ 。5)  $\mathcal{Q}_{N/2} \leftarrow 0$ 。6)  $\mathcal{Q}_{N/2} \leftarrow \text{WMG}(\mathcal{Q}_{N/2}, \Delta_{N/2}^x, \Delta_{N/2}^y, \sigma_{N/2}, \tau_{N/2})$ 。7)  $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} + P(\mathcal{Q}_{N/2})$ 。8)  $\mathcal{Q} \leftarrow \text{WMV}(\mathcal{Q}, \Delta_N^x, \Delta_N^y, \sigma_N, \tau_N)$ 。

## 5 改进的加权多重网格法

加权的多重网格方法基于波前梯度的最小二乘拟合, 是一种迭代的逼近方法, 精度高但速度慢。多重网格法用迭代的方法逐步逼近求解:

$$\partial^2 \mathcal{Q} / \partial x^2 + \partial^2 \mathcal{Q} / \partial y^2 = \partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 \quad (19)$$

实际上有:

$$\left. \begin{aligned} d\mathcal{Q}/dt &= \partial^2 \mathcal{Q} / \partial x^2 + \partial^2 \mathcal{Q} / \partial y^2 - (\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2) \\ \partial \mathcal{Q} / \partial r \Big|_{r \in \text{边界}} &= C(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

成为一个诺埃曼(Neumann)边界条件的泊松方程由动态到稳态的求解过程, 所以除了边界约束外, 初始条件是影响收敛速度和求解精度的重要因素。实验证明, 以主值  $\Psi$  或 0 为迭代初值, 收敛速度是很缓慢的, 计算时间相对于路径相关方法要长数十倍。

作为改进的多重网格法, 为了融合两类相位展开算法的优点, 把自适应路径法的展开结果用作多重网格法的初值, 不仅精度得到进一步改善, 而且更为显著的是大大加速了迭代的收敛。实验结果表明, 对于无遮挡物的情况, 给定相同的收敛判据, 改进的多重网格法所需的计算时间少于原方法的十分之一。下面将用含遮挡物的干涉波前重建作为实验例证。非常明显, 改进的多重网格法能达到比原方法更好的重建精度, 计算时间缩短了 75%。

## 6 实验及结果分析

图 7(a) 是模拟单峰温度场并在  $x$  方向有均匀温度梯度的干涉图。它的灰度分布是:

$$g(x, y) = 127.5 + 127.5 \times \cos \left\{ \left[ x + \frac{x_{\max}}{2} \exp \left( \frac{-(y - y_{\max}/3)^2}{y_{\max}/6} \right) \right] \frac{2\pi}{x_{\max}/4} \right\} \quad (21)$$

式中  $x_{\max}$ 、 $y_{\max}$  分别表示  $x$  和  $y$  坐标的最大值。图中含不规则遮挡物。图 7(b) 是傅里叶方法求出的相位主值分布。

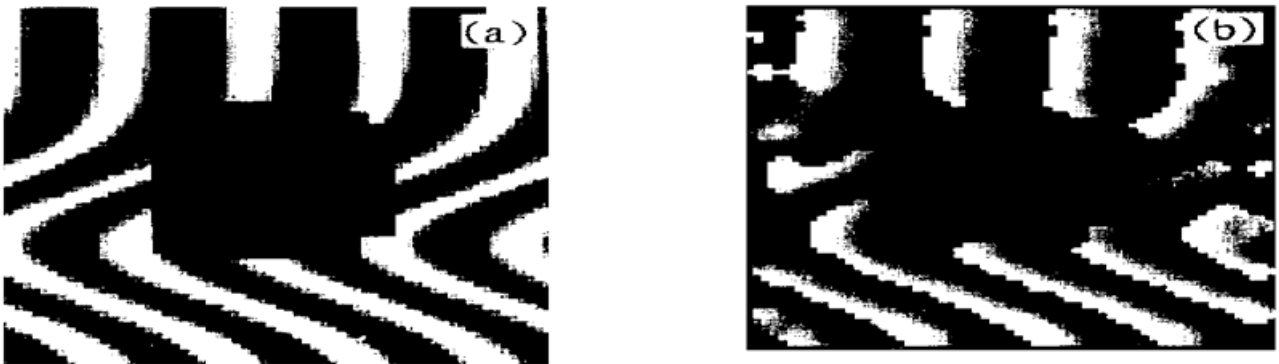


Fig. 7 A simulated blockage-containing interferogram (a) and its wrapped phase map obtained by FTM (b)

图 8(a) 是用自适应最优路径法相位展开时, 最小跨度树所遗漏的点(用深色表示)。图 8(b) 是自适应最优路径法相位展开的波前。可以看到, 在边界和遮挡物附近波前不光滑, 误差较大。

图 9 是加权多重网格法重建的波前。图 10 给出用改进的多重网格法的波前重建结果。明显地, 图 10 的精度高于图 9, 更显著的是改进的方法的计算时间只有原零初值或主值初始

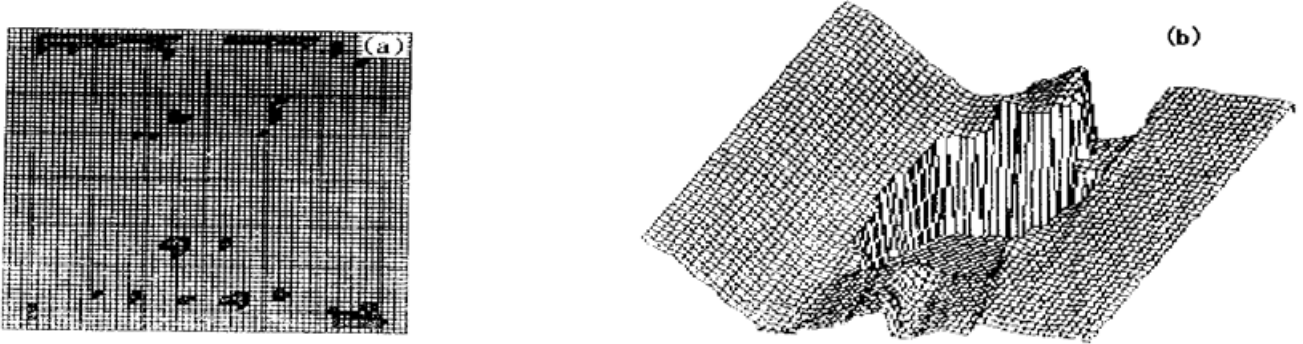


Fig. 8 (a) Some areas are surrounded and not integrated by integral path, which are marked by dark color, (b) Retrieved wave-front by adaptive optimum path method

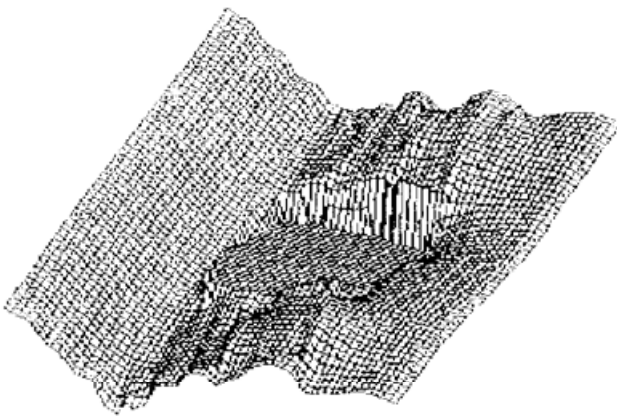


Fig. 9 Retrieved wave-front by weighted multigrid algorithm

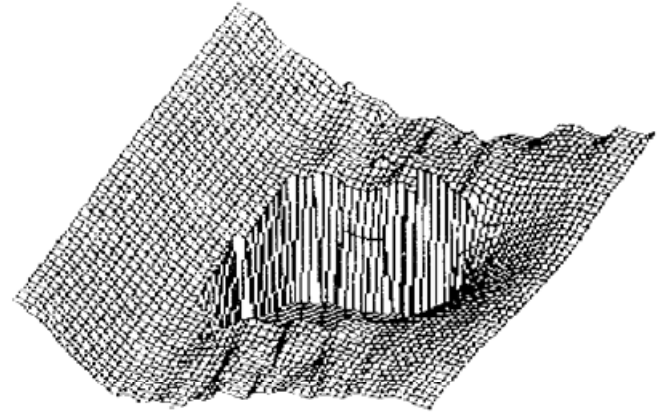


Fig. 10 Retrieved wave-front by improved multigrid algorithm

化的多重网格法的四分之一。

对如图图 7(b) 128×128 像素的含遮挡物干涉图波前重建的四种方法的比较见表 1。

Table 1. Comparison between the four algorithms for wave-front retrieval from interferogram containing opaque object

	convergence	RMS error of reconstruction	machine time
adaptive optimum path		13.0%	3.5 s
unweighted multigrid	bad		
weighted multigrid	good	6.0%	7 min (32 iterations)
modified weighted multigrid	good	0.8%	2 min(8 iterations)



Fig. 11 Interferogram of a temperature field of a two-column radiator



图 11(a) 是肋板散热器热流场在平行肋板方向的复杂流场干涉图(256 pixels  $\times$  256 pixels),

图 11(b) 是用傅里叶方法得到的干涉相位主值分布。图 12 给出用本文所述改进的多重网格法恢复的场致变形波前, 在 586 100 MHz 的 PC 机上, 计算时间约为 125 s。

**结 论** 由单张干涉图重建含遮挡物的干涉波前, 在经傅里叶方法得到的相位主值分布图上不可避免地存在大量的噪声。本文提出的改进的多重网格法, 用自适应最优路径法的结果作为迭代的初始条件, 充分结合路径无关、路径相关两类算法的优点, 能够在保证高精度恢复干涉波面的前提下, 大大提高重建速度。实验证明, 改进的效果是非常显著的。

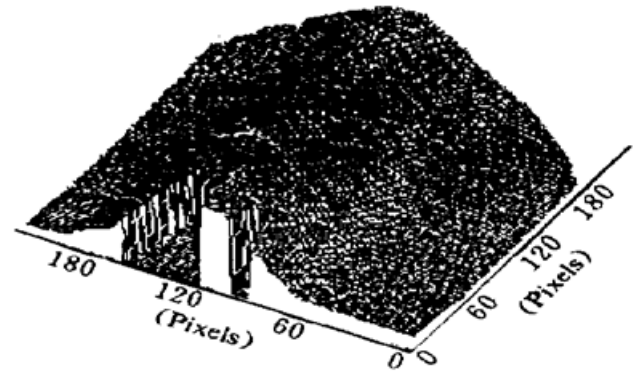


Fig. 12 Retrieved field-caused deformed wavefront of the temperature field above

能够在保证高精度恢复干涉波面的前提下, 大大提高重建速度。实验证明, 改进的效果是非常显著的。

## 参 考 文 献

- [1] B. Breuckmann, W. Thieme. Computer-aided analysis of holography interferograms using the phase-shifting method. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(14) : 2145~ 2149
- [2] G. T. Reid. Automatic fringe pattern analysis—a review. *Opt. and Laser in Engng.*, 1986, **7**(7) : 37~ 68
- [3] D. Dirksen, X. Su, D. Vukicevic *et al.*. Optimized phase shifting and use of fringe modulation function for high resolution phase evaluation. *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Workshop on Automatic Processing of Fringe Patterns*, Berlin, Akademik, Verlag, 1993. 72~ 77
- [4] M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi. Fourier transform method for fringe-pattern analysis for computer-based tomography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **72**(1) : 156~ 160
- [5] W. Macy. Two-dimensional fringe-pattern analysis. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(23) : 3898~ 3901
- [6] D. J. Bone. Fourier fringe analysis: The two-dimensional phase unwrapping problem. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(25) : 3627~ 3632
- [7] T. R. Judge, C. Quan, P. J. Bryanston-Cross. Holographic deformation measurements by Fourier transform technique with automatic phase unwrapping. *Opt. Engng.*, 1992, **31**(3) : 533~ 543
- [8] M. D. Pritt. Unweighted least square phase unwrapping by means of multigrid techniques. *Proc. SPIE*, 1995, **2584** : 289~ 300
- [9] M. D. Pritt. Weighted least square phase unwrapping by means of multigrid techniques. *Proc. SPIE*, 1995, **2584** : 278~ 288
- [10] B. R. Hunt. Matrix formulation of the reconstruction of phase value from phase difference. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(3) : 393~ 399
- [11] D. C. Ghiglia, L. A. Romero. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1) : 107~ 117
- [12] D. P. Towers, T. R. Judge, P. J. Bryanston-Cross. Automatic interferogram analysis techniques applied to quasi-heterodyne holography and ESP I. *Opt. and Lasers in Engng.*, 1991, **14**(4~ 5) : 239~ 281
- [13] J. A. Quiroga, A. Gonzalez-Cano, E. Bernaben. Phase-unwrapping algorithm based on an adaptive criterion. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(14) : 2560~ 2563
- [14] T. R. Judge, P. J. Bryanston-Cross. A review of phase unwrapping technique in fringe analysis. *Opt. and Lasers in Engng.*, 1994, **21**(1) : 199~ 239

## 附录 1 自适应最优路径算法

Adaptive Path( $\varphi$ ,  $\psi$ , queue, father, flag,  $T$ , next)

- 1) 若  $next = 0$ , 则算法结束。
- 2) 对当前父点  $queue[0]$  积分展开:  

$$\mathcal{Q}[queue[0]] = \mathcal{Q}[father[0]] + [\Psi(queue[0]) - \Psi(father[0])]$$
- 3) 对当前父结点  $queue[0]$  取 16 邻域, 计算 8 方向二阶差分, 并分等级由小到大排序。
- 4) 把二阶差分小于等于  $T[father[0]]$  且  $flag[i, j] = 0$  的  $L$  个像素送入队列  $queue[next]$ ,  $queue[next + 1]$ , ...,  $queue[next + L]$ , 同时把第三等级的二阶差分存入  $T[queue[next]]$ , ...,  $T[queue[next + L]]$ , 作为这些点成为父结点时的阈值。
- 5) 将这些点的  $flag$  置 1。  $next = next + L + 1$ 。
- 6) 待生长队列  $queue$  和其响应的父结点  $father$  上浮一次,  $next = next - 1$ 。
- 7) adaptive Path ( $\mathcal{Q}, \Psi, queue, father, flag, T, next$ )。

## 附录 2 MV 算法

$$\mathcal{Q}_k \leftarrow MV(\mathcal{Q}_k, \Delta_N^x, \Delta_N^y)$$

- 1) 以初值  $\mathcal{Q}_k$  对方程  $A\mathcal{Q}_k = \rho_N$  作两次高斯-塞德松弛。
- 2) 如果  $N \times N$  是最粗的网格, 转 7)。
- 3)  $\Delta_{N/2}^x \leftarrow R(\Delta_N^x - D^x \mathcal{Q}_k)$ ,  $\Delta_{N/2}^y \leftarrow R(\Delta_N^y - D^y \mathcal{Q}_k)$
- 4)  $\mathcal{Q}_{N/2} \leftarrow 0$
- 5)  $\mathcal{Q}_{N/2} \leftarrow MV(\mathcal{Q}_{N/2}, \Delta_{N/2}^x, \Delta_{N/2}^y)$
- 6)  $\mathcal{Q}_k \leftarrow \mathcal{Q}_k + P(\mathcal{Q}_{N/2})$
- 7) 以初值  $\mathcal{Q}_k$  对方程  $A\mathcal{Q}_k = \rho_N$  作两次高斯-塞德松弛。

其中  $D$  表示差分计算:

$$(D^x \mathcal{Q})_{ij} = \mathcal{Q}_j - \mathcal{Q}_{j-1}, \quad (D^y \mathcal{Q})_{ij} = \mathcal{Q}_j - \mathcal{Q}_{i,j}$$

## Wave-Front Reconstruction from Opaque-Object-Containing Interferogram Using Modified Multigrid Algorithm

Yao Wei    Wu Donglou    Wang Zhendong    He Anzhi

(Applied Physics Department of Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

(Received 3 October 1997; revised 22 December 1997)

**Abstract** An adaptive optimum path method and least mean square (LMS) phase unwrapping as a typical path-independent method are discussed. In the latter case Poisson equation and its discrete formulation are derived. The multigrid algorithm for solving this equation is given in detail. Especially a weighted multigrid algorithm aimed at cases with boundary and blockage is presented. Then a modified multigrid algorithm which combines the advantages of two classes of phase unwrapping algorithms is developed. It takes the results of the adaptive optimum path method as initial guess of the iteration of multigrid and a high accuracy is reached within a considerably faster convergence speed. In the simulation experiment an interferogram of a flow field containing opaque objects and the related results are given. The method is applied to a real interferogram and is proved that it is effective and practical for reconstructing wave-front containing opaque object.

**Key words** phase unwrapping, wave-front retrieval, interferometric tomography, multigrid method, flow field.