

光学三稳态系统中的慢化现象*

吴福根 何明高

(广东工业大学数理系, 广州 510090)

吴庭万 欧 发

(华南理工大学应用物理系, 广州 510641)

摘 要 研究了光学三稳态系统中的两种慢化现象。一种是发生在两类临界点附近的慢化现象(即所谓的临界慢化), 计算出了它们的临界慢化指数。另一种是远离临界点的慢化现象, 这是一种与不稳工作点有关的慢化现象。本文的讨论具有一定的普适性。

关键词 光学三稳性, 临界现象, 慢化。

1 引 言

光学非线性系统中的慢化现象一直受到人们的重视^[1, 2]。已经有许多文献^[3-6]对光学双稳态系统中的慢化现象进行了研究。光学三稳态系统也是典型的非线性耗散系统。在文献[7]中作者已经对光学三稳态系统的相变进行了讨论, 指出三稳态终止点具有类二级相变特征。本文进一步对光学三稳态系统中的慢化现象进行研究。讨论了在边沿临界点及尖顶临界点处的临界慢化(Critical slowing down)现象, 计算了两类临界慢化指数, 所得的结果分别与混沌运动中切分叉附近及倍周期分叉点附近的临界指数相一致。

本文中, 还研究了另一类与不稳定态有关的慢化现象, 称之为远离临界点的慢化现象(The slowing down far from the critical point)。这是与一类和所谓的奇怪排斥子有关的慢化现象。最后对上述两种慢化进行了计算机模拟, 所得结果与理论相一致。

2 三稳态系统的临界点及其慢化现象

对于一个含有参数的光学非线性系统, 它的动力学方程可以表示成如下的函数关系式:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, p, q) \quad (1)$$

式中 x 表示为系统的出射光强, p 为系统的控制参量(可以是一个也可以是一组), q 为系统的入射光强。由于(1)式是一个自治的动力学方程, 因此系统是存在势的, 并且势函数 $G(x, p, q)$ 可以由下列关系决定:

* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1997-11-13; 收到修改稿日期: 1998-02-20

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\partial G}{\partial x} \tag{2}$$

当 $dx/dt = 0$ 时, 可以得到系统的静态方程

$$F(x_s, p, q) = 0 \tag{3}$$

调节控制参量 p 使系统有五支静态解 x_s , 其中三支为稳定的[此时有 $\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right]_{x_s} > 0$]; 另二支为不稳定的[此时有 $\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right]_{x_s} < 0$], 这样的系统称为光学三稳态系统。对于这样的系统可定义两类临界点: 1) 第一类临界点。由 $\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right]_c = 0$ 可得到系统的边沿临界点的解。对于三稳态系统而言, 它具有四个此类临界点, 可以证明这类临界点是不稳定的。2) 第二类临界点。进一步调节控制参量 p , 使系统由三稳态过渡到双稳态, 此转变点即为另一个临界点, 此时有如下关系:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_K = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_K = \left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right)_K = 0 \quad \text{并且有} \quad \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right)_K < 0 \tag{4}$$

此临界点是一个不稳定的拐点。如图 1 所示, K_1, K_2, K_3, K_4 即为第一类临界点, 而 K 就是第二类临界点。

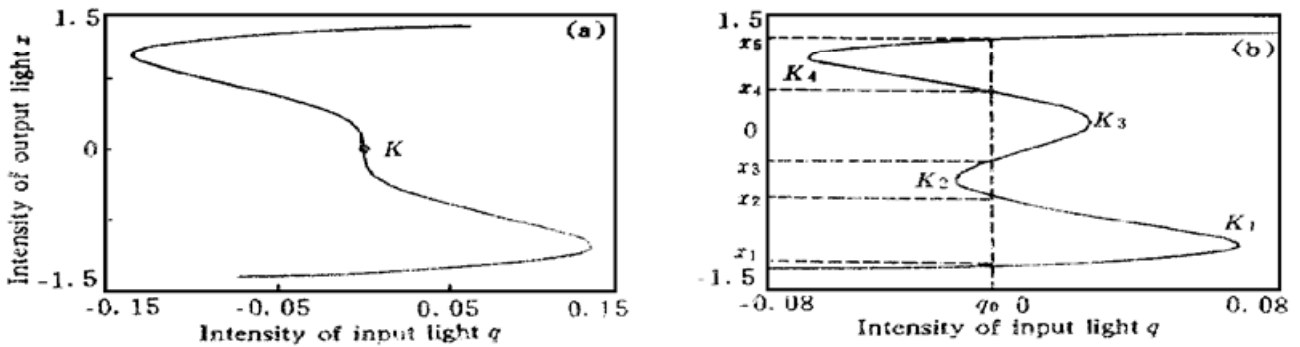


Fig. 1 The steady-state cuerv of tristability systems (a) $p = 0$, (b) $p = 0.1$

2.1 在第一类临界点附近的慢化现象

边沿临界点是不稳定的, 此时有

$$F(x_c, p, q) = - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_c = 0; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_c = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_c = 0 \tag{5}$$

由上述条件, 采用与文献[4]相同的方法, 对(1)式中右边的 $F(x, p, q)$ 在临界点附近对变量 x 展开到二次项(因为一次项为零), 对参数 p 展开到一次项, 然后积分可得系统经过临界点附近, 状态产生跳变所需的时间:

$$t_p = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_c \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_c (p - p_0)}} \arctan \left. \frac{x - x_0}{\sqrt{\left| 2 \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_c / \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_c \right| (p - p_0)}} \right|_{x_1}^{x_2} \tag{6}$$

式中 $x_1 < x_c < x_2$ 。当 $p \rightarrow p_0$ 时, 上式中的反正切趋于 π , 此时由(6)式可得

$$t_p \propto |p - p_0|^{-1/2} \tag{7}$$

(7) 式是从一般三稳态系统的边沿临界点应该满足的条件出发得到的结果, 临界指数为 $1/2$ 。这个结果与混沌运动的切分叉点附近的阵发混沌时间间隔发散具有一致性^[8]。

2.2 第二类临界点附近的慢化现象

第二类临界点是一个拐点临界点, 由(4)式可知:

$$F(x_K, p_K, q_K) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_K = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_K = 0 \quad \text{并且有} \quad \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_K < 0 \quad (8)$$

首先将方程(1)式中右边的 $F(x, p, q)$ 在临界点的 x_K 附近展开, 并且只取一次项, 得

$$\frac{d\Delta}{dt} = F(x, p, q) = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_K} \Delta \quad (9)$$

式中作了变量代换, 令 $\Delta = x - x_K = c \exp(-\frac{t}{t_s})$ (c 为常数, t_s 为特征时间), 代入上式得

$$-\frac{1}{t_s} = \left.\frac{\partial F(x, p, q)}{\partial x}\right|_{x=x_K} \Rightarrow t_s = -\frac{1}{\left.\frac{\partial F(x, p, q)}{\partial x}\right|_{x=x_K}} \quad (10)$$

当 $p \rightarrow p_K$ 时, 将 $\left.\frac{\partial F(x, p, q)}{\partial x}\right|_{x=x_K}$ 在 p_K 附近展开到一次项

$$\left.\frac{\partial F(x, p, q)}{\partial x}\right|_{x=x_K} = \left(\frac{\partial F(x, p, q)}{\partial x}\right)_K + \left(\frac{\partial^2 F(x, p, q)}{\partial x \partial p}\right)_K (p - p_K) \quad (11)$$

由于 $\left.\frac{\partial F(x, p, q)}{\partial x}\right|_K = 0$, 将上式代入(10)式得

$$t_s = -\frac{1}{\left.\frac{\partial^2 F(x, p, q)}{\partial x \partial p}\right|_K (p - p_K)} \quad (12)$$

由上式可知, 在第二类临界点处的临界指数为 1。这个结果与混沌运动中的倍周期分叉点附近的慢化相一致^[8]。由于此临界点是不稳定的, 因此特征时间 $t_s < 0$, 这是有别于双稳态系统中的特征时间的。

3 不稳定定态附近的慢化现象

假设用一束入射光 q_0 将系统偏置在三稳区(远离两个阈值点), 则对应此偏置光系统有五个定态: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$), 如图 1 所示, 其中对应 x_1, x_3, x_5 的三个态是稳定的, 系统可以长时间处于这些状态上; 而对应 x_2, x_4 的状态是不稳定的, 即使刚开始时, 系统处于这样的状态, 只要系统受到很微弱的涨落影响, 系统就会偏离此状态, 而趋于其它的稳定态。现在来看一下, 当系统的出射光强 x 接近不稳定态 x_m ($m = 2, 4$) 时的动力学行为。先将系统偏置在三个稳定态中的其中一个, 在此基础上又加一个强度为 q_t , 时间宽度为 T 的矩形脉冲(在高支态时加负脉冲; 在低支态时加正脉冲; 在中间态可加正, 也可加负), 使得脉冲刚结束时的出射光强 x_0 接近 x_m ($m = 2, 4$)。将动力学方程(1)式在不稳定态 x_m 处展开到一次项, 可得如下关系

$$x = x_m + (x_0 - x_m) \exp\left[-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_m} t\right] \quad (13)$$

由于在不稳点处 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_m}$, 因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 上式将“发散”, 系统将不趋于 x_m 。虽然如此, 通过分析可以很到如下结论:

- 1) 当 $x_0 > x_4$ 时, 系统将趋于高支态 x_5 ;
- 2) 当 $x_4 > x_0 > x_2$ 时, 系统将趋于中支态 x_3 ;

3) 当 $x_0 < x_2$ 时, 系统将趋于低支态 x_1 ;

4) 当 x_0 越接近 $x_m(m = 2, 4)$ 时, 系统趋于稳定态的时间就越长。这就是所谓的与不稳定态有关的远离临界点的慢化现象。

4 计算机模拟结果

在文献[7]中, 提出了一个描述光学三稳态系统的动力方程

$$x^\circ = F(x, p, q) = -\frac{x^5}{5} + \frac{(1+p)x^3}{3} - px + q \tag{14}$$

式中 x 为标度化透射场, p 为系统的控制参量, q 为系统的驱动力项, 即为标度化入射场。由此可得系统的静态方程为

$$q = \frac{x_s^5}{5} - \frac{(p+1)x_s^3}{3} + px_s \tag{15}$$

如图 1 所示的静态曲线就是根据此方程绘出的。由动力学方程(14)式, 采用龙格-库搭方法, 对系统在两类临界点及不稳定态点的慢化现象进行了研究。通过计算机的模拟发现在第一类临界点处的慢化现象与文献[4]及[5]中讨论的双稳态时的情况相同。图 2 所示为拐点临界点处的慢化现象。由于拐点临界点是一个不稳定点, 因此系统不会趋于该点。但该点的慢化程度与其他不稳点的不同, 图中 1 和 2 两条曲线为在其他不稳定点处的慢化, 3 和 4 两条曲线为拐点临界点的慢化现象, 曲线 2 中当 $\Delta = x_0 - x_m = 0.00005$ 时的慢化时间与曲线 4 中当 $\Delta = x_0 - x_k = 0.10610$ 时的慢化时间相当, 这说明在拐点临界点的慢化程度比其他不稳定处的慢化更甚。这与前面的理论讨论是相一致的。图 3 所示为三稳态系统中不稳定定态处的慢化现象, 与在 2 中的讨论相一致。

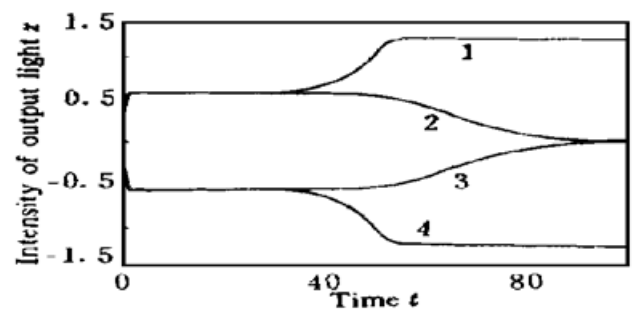
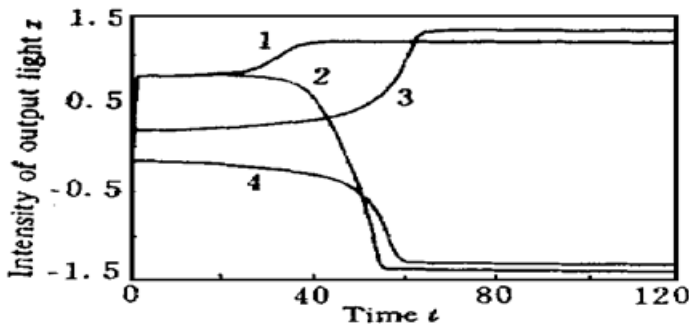


Fig. 2 Slowing down phebomena near unstable points K

and x_m . $T = 2, p = 0, x_m = 0.77815, x_k = 0$.

1: $q_0 = 0.10, q_t = 0.98757, x_0 = 0.77820$;

2: $q_0 = 0.10, q_t = 0.98756, x_0 = 0.77810$;

3: $q_0 = 0, q_t = 0.75000, x_0 = 0.10610$;

4: $q_0 = 0, q_t = 0.65000, x_0 = -0.11760$

Fig. 3 Slowing down phenomena at unstable points

x_2 and x_4 . $T = 2, P = 0.10, q_0 = 0, x_1 = -$

$1.2245, x_2 = -0.5775, x_3 = 0, x_4 = 0$.

$5775, x_5 = 1.2245$. 1: $q_t = 0.3008, x_0 = 0$.

5778 ; 2: $q_t = 0.3007, x_0 = 0.5770$; 3: $q_t =$

$-0.3007, x_0 = -0.5770$; 4: $q_t = -0$.

$3008, x_0 = -0.5778$

结 语 上面讨论了光学三稳态系统的慢化现象, 得到如下结论:

1) 在两类临界点附近都存在慢化现象。在文献[9]中曾指出第一类临界点将发生一级相变现象, 而现在计算出在此临界点附近的临界指数为 1/2。而第二类临界点是一个类二级相变点, 计算出在此临界点附近的临界指数为 1。看来这种性质具有共性。所不同的是在双稳

态的终止点的特征时间为正, 而三稳态的终止点的特征时间却为负。

2) 三稳区中的任意一点都可用一束光强来偏置, 相应都有与该偏置点有关的远离临界点的慢化现象。对应不同的偏置点, 就会有相应的此类慢化现象出现, 这一点是有别于临界慢化现象的。

3) 不稳定态处的慢化现象虽然是远离上述的两类临界点的。但是发现, 三稳态系统中的两个不稳定定态对应于势函数的极大值, 是相应的高、中、低吸引子的分界点, 这就是所谓的奇怪排斥子。如果初值选取在极为靠近奇怪排斥子的地方, 则系统将经过相当长时间才能趋于相应的稳定态^[8]。

4) 最近对高分子材料聚丁乙炔的多稳态系统^[10]的动力学特性进行了研究, 得到了与上述讨论同样的结果。

参 考 文 献

- [1] H. M. Gibbs. *Optical Bistability: Controlling Light with Light*. Orlando: Academic Press, 1985. 84
- [2] 李福利. 高等激光物理学, 合肥: 中国科技大学出版社, 1986. 224
- [3] J. Y. Bigot, A. Daunois. Slowing down far from the limit points in optical bistability. *Opt. Commun.*, 1987, **123**(3): 123~ 127
- [4] 王鹏业, 张洪钧, 戴建华. 光学双稳态和混沌运动中的临界现象. *物理学报*, 1985, **34**(10): 1233~ 1240
- [5] 欧 发, 吴庭万, 张晓东. 光学双稳性的强迫振动模型. *光学学报*, 1988, **8**(3): 205~ 211
- [6] 周誉昌, 欧 发. 增强吸收型光学双稳的耦合动力学方程及动态分析. *光学学报*, 1993, **13**(11): 980~ 985
- [7] 吴福根, 欧 发. 光学三稳性临界点的二级相变特征. *量子电子学报*, 1997, **14**(5): 400~ 405
- [8] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论. 上海: 上海科技教育出版社, 1994, 67~ 72, 144~ 146, 143~ 144
- [9] 欧 发, 邓文基. 光学双稳性临界点的相变行为. *物理学报*, 1990, **39**(6): 932~ 939
- [10] Wu Tingwan, Yang Jianfen. Multi-stability and lasing effect in a polymer nonlinear optical system. *Proc. SPIE*, 1996, **2896**, Supplement 9

Slowing Down in Optical Tristability Systems

Wu Fugen He Minggao

(Physics Department, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

Wu Tingwan Ou Fa

(Department of Applied Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

(Received 13 November 1997; revised 20 February 1998)

Abstract Two kinks of the slowing down in the optical tristability systems are studied. One is the critical slowing down at the edges of tristable region and the bifurcation, and their critical exponent is calculated; the other is the slowing down far from the critical point, which is concerned with the unstable steady-points. The results show universal properties.

Key words optical tristability, critical phenomena, slowing down.