

# 激光大气闪烁的小波频谱分析

饶瑞中 王世鹏 刘晓春 龚知本

(中国科学院安徽光学精密机械研究所大气光学研究室, 合肥 230031)

**摘 要** 激光对数光强起伏的快速傅里叶变换功率谱的无标度区间的标度指数在许多情况下很不稳定, 并且超出了理论界限, 因而本文引入了离散小波变换(DWT)频谱分析。通过对  $1/f$  信号的快速傅里叶变换频谱和离散小波变换频谱的对比分析, 验证了离散小波变换频谱分析的优越性。激光大气闪烁的离散小波变换频谱的无标度区间的标度指数在一天内(除日出后和日落前两段时间外)的变化比较稳定, 并且不超出理论界限。这些结果表明, 对于一般大气湍流中的激光闪烁的频谱分析应使用离散小波变换代替快速傅里叶变换。

**关键词** 光传播, 大气湍流, 闪烁, 频谱分析, 小波变换。

## 1 引 言

激光大气闪烁一直是随机介质中波传播研究的一个重要问题。对数光强功率谱的高频部分存在着无标度区间, 功率谱密度与频率满足标度不变律<sup>[1]</sup>, 其标度指数与湍流介质折射率起伏的功率谱惯性区的标度指数存在明确的关系, 因此对数光强的功率谱特征在一定程度上反映了湍流介质折射率起伏的统计特性。所以正确地确定功率谱的标度指数具有十分重要的意义。

对于激光大气闪烁的频谱分析, 一般总是采用快速傅里叶变换。然而拟合求得的无标度区间的标度指数在很多情况下很不稳定, 并超出了理论上的严格界限。问题可能出在两方面, 一是快速傅里叶变换频谱的拟合是否有偏差, 二是对一般湍流情况下的激光大气闪烁的频谱分析使用快速傅里叶变换是否恰当。为此, 本文引入了离散小波变换频谱分析, 对具有确定标度指数的  $1/f$  噪声进行快速傅里叶变换和离散小波变换频谱分析, 用不同的线性拟合方法对频谱进行拟合, 对结果进行对比分析, 以检验离散小波变换的适用性。

## 2 激光大气闪烁的快速傅里叶变换频谱分析

湍流折射率起伏的一维功率谱在惯性区满足标度律<sup>[2]</sup>:

$$V_n(k) \propto k^{-\eta} \quad (1)$$

在湍流大气中传播的平面波或球面波, 对数光强的高频功率谱满足标度律:

$$P_{\ln I}(f) \propto f^{-\alpha}, \quad \alpha = \eta + 1 \quad (2)$$

这里,  $\eta$  和  $\alpha$  分别称为湍流折射率起伏功率谱和对数光强起伏功率谱的标度指数。对局地均匀各向同性湍流,  $\eta = 5/3$ ,  $\alpha = 8/3$ 。已证明<sup>[3]</sup>, 对于有限能量的湍流, 惯性区内功率谱标度指数  $\eta$  的上限值为  $8/3$ , 因而可推得对数光强起伏功率谱的标度指数  $\alpha$  的上限值为  $11/3$ 。

湍流大气中传播的激光对数光强的快速傅里叶变换功率谱具体的例子如图 1(a) 所示。对于快速傅里叶变换功率谱, 可以将功率谱密度  $P(f)$  的对数与频率  $f$  的对数的关系表示为 5 条直线的组合, 进行分段拟合, 以求得无标度区间的标度指数<sup>[1]</sup>。图 1(b) 是标度指数一整天的变化趋势。

从图 1 看到, 标度指数的时间变化很不稳定。其它分析结果表明: 除日出后和日落前两段时间内大气状况不稳定外, 其它时间内大气湍流状态还是比较稳定的。同时标度指数的许多值大大偏离局地均匀各向同性湍流介质的理论值, 并且超出了理论规定的严格上限  $11/3$ 。这两点足以说明使用快速傅里叶变换功率谱求得的标度指数不可靠。造成这种现象的一种可能性在于, 当信号功率谱密度与频率呈指数变化趋势时, 必须进行对数-对数线性分析, 由于快速傅里叶变换功率谱是等频率间隔的, 此时功率谱密度的高频部分的数据冗繁, 而低频部分的数据明显不足, 线性拟合时无疑过多地考虑了高频部分的作用, 使得拟合结果失去客观性和可靠性。另一方面, 当湍流不满足局地均匀各向同性条件时, 折射率的起伏存在着严重的间歇性, 是一种非平稳过程。而傅里叶频谱分析恰恰适用于平稳过程。对于非平稳过程, 小波变换是一种有效的工具, 下面引入小波变换方法对激光大气闪烁进行频谱分析。

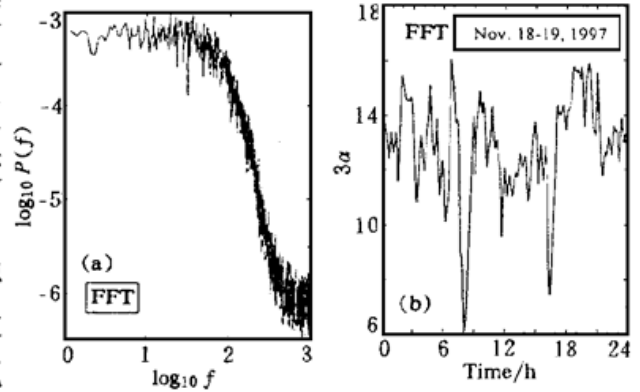


Fig. 1 FFT power spectrum of log-intensity fluctuation of laser beam in turbulent atmosphere. (a) An example (b) Diurnal variation of the scaling exponent of the power spectrum

### 3 离散小波变换频谱分析

与傅里叶变换不同, 小波变换具有平移和伸缩两大特征。使用正交小波基的离散小波变换, 其伸缩比满足指数律, 因此离散小波变换所定义的功率谱密度是按等对数频率间隔的, 克服了快速傅里叶变换变换频谱的不足。

令  $L^2(IR)$  表示在区间  $(-\infty, \infty)$  上定义的所有可测且具有  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$  的函数集合, 如果  $\varphi \in L^2(IR)$  满足允许性条件  $C_{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} [|\Phi(\omega)|^2 / |\omega|] d\omega < \infty$ ,  $\Phi(\omega)$  为  $\varphi$  的傅里叶变换, 则称  $\varphi$  为一个基小波, 它在  $L^2(IR)$  上的积分小波变换为<sup>[4]</sup>

$$(W_{\varphi}g)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad g \in L^2(IR) \quad (3)$$

其中  $a, b \in L^2(IR)$ , 且  $a \neq 0$ ,  $*$  表示复共轭。在信号分析中, 只考虑正频率, 如果频率变量是伸缩参数的倒数的正常数倍, 则只须考虑  $a$  的正值, 此时要求基小波满足

$$\int_0^{\infty} |\Phi(\omega)|^2/\omega d\omega = \int_0^{\infty} |\Phi(-\omega)|^2/\omega d\omega = C_{\varphi}/2 < \infty, \tag{4}$$

有 
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = 2C_{\varphi}^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(W_{\varphi g})(b, a)|^2 db a^{-2} da = \int_0^{\infty} E(f) df \tag{5}$$

频率  $f$  与尺度  $a$  的关系为  $f = 1/a$ , 因此能谱密度为

$$E(f) = 2C_{\varphi}^{-1} \int_0^{\infty} |(W_{\varphi g})(b, a)|^2 db \tag{6}$$

在实验信号的分析中, 实际只能使用离散小波变换, 此时选择紧支撑正交小波基, 伸缩参数  $a = 2^{-m} (m = 1, \dots, M)$ , 平移参数为  $b = na (n = 0, 1, \dots, 2^{M-m} - 1)$ 。对于样本数为  $N$  的数据,  $M = \log_2 N$ 。如数据的采样率为  $f_s$ , 则对应于伸缩参数  $a = 2^{-m}$  的频率为  $f = 2^{-m} f_s$ , 频率间隔为  $\Delta f = 2^{-m} f_s \ln 2$ , 功率谱密度为

$$P(f) = E(f)/\Delta f = (Nf_s \ln 2)^{-1} \sum_{n=0}^{2^{M-m}-1} |(W_{\varphi g})(m, n)|^2 \tag{7}$$

小波变换适用于非平稳信号的分析, 当然也适用于一般平稳信号。离散小波变换除等对数频率间隔性外, 运算量也比快速傅里叶变换大为减少, 对  $N$  个数据进行快速傅里叶变换约需要  $N \ln N$  次运算, 而进行离散小波变换只需要  $N$  次运算。离散小波变换比快速傅里叶变换对一般信号的分析的优越性, 可通过  $1/f$  噪声的频谱分析结果来检验。

### 4 $1/f$ 噪声的频谱分析

$1/f$  噪声是指一类具有无标度性、功率谱密度  $P(f)$  与频率  $f$  的关系满足标度律<sup>[4]</sup>

$$P(f) = C|f|^{-\alpha}, \quad (0 < \alpha < 2) \tag{8}$$

的随机信号, 式中  $C$  为常数。现已有各种成熟可靠的方法模拟此种信号。对具有各种标度指数  $\alpha$  的  $1/f$  噪声进行快速傅里叶变换和离散小波变换频谱分析, 并对功率谱密度进行线性拟合求其标度指数, 根据拟合的结果即可检验频谱分析方法及线性拟合方法的适用性。本文利用文献[5]的方法产生一系列  $1/f$  噪声用于这种分析, 其标度指数为 0.05(0.05) 1.95。

对  $1/f$  噪声进行快速傅里叶变换和离散小波变换频谱分析后, 使用下面三种线性拟合方法对功率谱密度进行拟合:

1) 最小二乘法(L2X), 它对个别偏离较大的数据较为敏感。

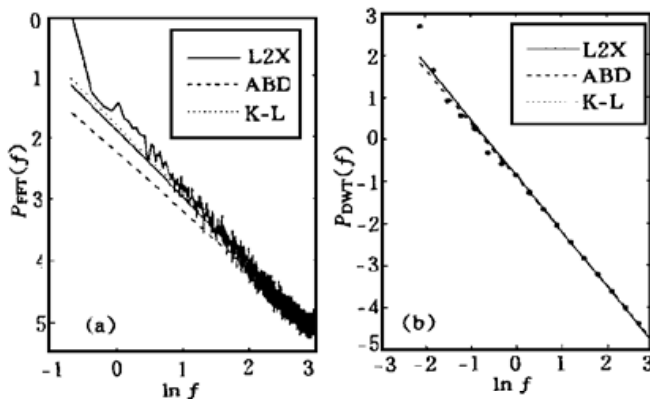


Fig. 2 Power spectrum of a  $1/f$  noise and fitted lines by 3 fitting methods. (a) FFT, (b) DWT

2) 最小绝对差值法(ABD), 其拟合结果与原始数据的绝对值之差的总和为最小。由于拟合结果对个别偏离较大的数据不敏感, 常被称为稳固拟合方法。

3) 基于模式识别的 Karhunen-Loeve 展开式的最佳直线拟合法(K-L), 所有数据到拟合曲线的垂直距离之和为最小。

图 2 就是一种  $1/f$  噪声的功率谱密度及其利用上述三种方法拟合的结果。图 2(a) 是快速傅里叶变换功率谱, 图 2(b) 为离散小波变换功率谱。对快速傅里叶变换功率谱, 可以

明显看出高频部分在线性拟合中所起的份量较重, 同时可以看出用最小二乘法 and K-L 二种方法的结果相近, 而最小绝对差值法方法的结果与其它二者偏离较大, 因为它更依赖于高频部分的数据。而对离散小波变换功率谱, 高频部分在线性拟合中所起的份量与低频部分相当。

图 3 则是对  $\alpha$  从 0.05 至 1.95 的  $1/f$  噪声的功率谱密度用三种方法拟合求得的标度指数与真实值的比较。对快速傅里叶变换功率谱, 三种方法所求得的标度指数都系统地小于真实值, 而最小绝对差值方法偏离尤其大。而对离散小波变换功率谱, 三种方法所求得的标度指数与真实值的偏差都明显小于快速傅里叶变换功率谱的情况, 它们的规律相仿, 其中最小绝对差值方法更为稳定些。因而从对具有指数特征的功率谱密度进行线性拟合的角度来看, 离散小波变换比快速傅里叶变换效果要好。

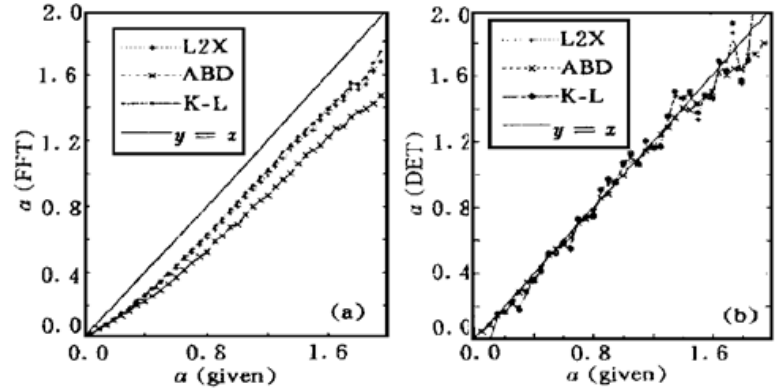


Fig. 3 Comparison of fitted exponents from FFT (a) and DWT (b) spectra with true ones for  $1/f$  noises

### 5 激光大气闪烁的离散小波变换频谱分析

激光对数光强起伏的离散小波变换功率谱的具体的例子如图 4(a) 所示。与图 1 中的快速傅里叶变换功率谱相比, 离散小波变换功率谱相当平滑, 求标度指数的方法也要简单得多。

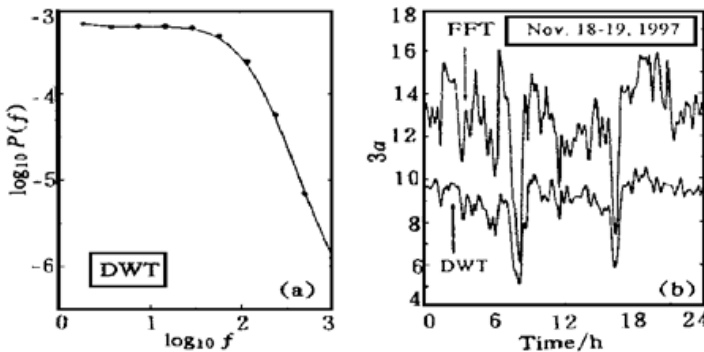


Fig. 4 DWT power spectrum of log-intensity fluctuation of laser beam in turbulent atmosphere: left, an example; right, diurnal variation of the scaling exponent of the power spectrum

图 4(b) 是离散小波变换标度指数一整天的变化趋势, 图中同时绘出了快速傅里叶变换标度指数一整天的变化趋势, 以便比较。可以看出二者变化趋势大致相同, 最小值都发生在日出后和日落前, 除此两段外, 与变化较为剧烈的快速傅里叶变换标度指数相比, 离散小波变换标度指数相对稳定, 并且离散小波变换标度指数都低于理论规定的严格上限值  $11/3$ 。这些结果与大气湍流的本身特性较为符合,

直接说明了离散小波变换对激光大气闪烁频谱分析的可靠性。

**小结** 由于激光对数光强起伏快速傅里叶变换功率谱的无标度区间的标度指数的变化规律及其数值大小与大气湍流特性不符, 文中引入了离散小波变换频谱分析, 并通过对比分析, 验证了离散小波变换频谱分析的优越性。激光大气闪烁的离散小波变换频谱的无标度区间的标度指数在一天内(除日出后和日落前两段外)的变化比较稳定, 并且低于理论确定的上限值。这些结果说明一般大气湍流中的激光闪烁的频谱分析应使用离散小波变换代替快速傅里叶变换。

## 参 考 文 献

- [1] 饶瑞中, 王世鹏, 刘晓春等. 实际大气中激光闪烁的频谱特征. 中国激光, 1999, **26**(5): 411~ 414
- [2] 塔塔尔斯基. 温景嵩等译. 湍流大气中波的传播理论, 北京: 科学出版社, 1978.
- [3] Sulem P, Frisch U. Bounds on energy flux for finite energy turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1975, **72**: 417 ~ 423
- [4] Chui C. K. *An Introduction to Wavelets*, New York: Academic Press, 1992.
- [5] Kasdin N J. Discrete simulation of colored noise and stochastic process and  $1/f$  power low noise generation. *Proc. IEEE*, 1995, **83**(5): 802~ 827

## Wavelet Spectrum Analysis of Laser Scintillation in a Turbulent Atmosphere

Rao Ruizhong    Wang Shipeng    Liu Xiaochun    Gong Zhiben  
(*Laboratory of Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,  
The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031*)  
(Received 15 June 1998; revised 9 October 1998)

**Abstract** Since scaling exponents fitted from many fast Fourier transformation (FFT) power spectra of the log-intensity of laser beam in the turbulent atmosphere go beyond the theoretical bound, the discrete wavelet transformation (DWT) power spectrum was introduced. The superiority of DWT over FFT is verified through comparison of the scaling exponents fitted from the FFT and DWT power spectra of  $1/f$  noises. The scaling exponents in the scaling region of the DWT power spectrum of laser scintillation vary smoothly in a whole day (except sunrise and sunset time) and lie in the bound. It is suggested that DWT instead of FFT should be used in the spectrum analysis of laser scintillation.

**Key words** light propagation, turbulence, scintillation, power spectrum analysis, wavelet transform.