

自适应望远镜时间响应频率的优化*

赵达尊 陈珂 俞信

(北京理工大学光电工程系颜色科学与工程国家专业实验室, 北京 100081)

摘 要 分析了自适应望远镜系统的波面补偿剩余误差与频率响应的关系。分别导出了时间响应误差和波面探测误差与截止频率之间的数学表达式, 表明剩余波差随截止频率的变化规律既有反方向部分, 又有正方向部分, 从而可以找到一个最优频率, 使得系统剩余波差最小。

关键词 自适应光学, 波面补偿剩余误差, 时间响应误差, 波面探测误差, 截止频率。

在自适应望远镜中, 从波前探测、波面重构, 到波前校正都不可避免地存在时间上的延迟。正是由于各个部分的时延, 使整个系统在频率域具有有限的带宽。这个带宽可用截止频率 f_c 来表征。在自适应望远镜中, 与截止频率 f_c (亦可称为时间响应频率) 有关的波面补偿剩余误差主要有两个: 自适应系统的时间响应误差和波面探测误差^[1]。

1 时间响应误差

由于大气扰动不断随时间变化, 所以从波面探测开始到校正器响应完毕所需的时间延迟将使需补偿的观察波面有异于探测波面, 造成时间响应误差。

闭环自适应系统是一个高通滤波器, 高于截止频率 f_c 的高频成分不能被补偿而作为补偿误差遗留下来。若把波面补偿剩余误差用相位 φ 的方差 σ_φ^2 表示, 则在大气扰动时间功率谱中的高频区域, 其单位频率成分所造成的光波相位方差 $\sigma_\varphi^2(f)$ 为^[2]

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \sigma_\varphi^2(f) = 0.0326k^2 f^{-8/3} \int_0^\infty C_N^2(z) V(z)^{5/3} dz \quad (1)$$

式中 $V(z)$ 为高度 z 处的平均风速, f 为时间频率, C_N 为大气折射率结构常数, $\sigma_\varphi^2(f)$ 的单位是 $\text{rad}^2 \text{Hz}^{-1}$, $k = 2\pi/\lambda$, λ 为光波波长。对于自适应光学系统而言, 这一高频区域的扰动是造成时间响应误差的主要因素。

自适应光学系统时间响应取决于反馈系统的传递函数 $H(f)$, 闭环后的剩余相位方差为

$$\sigma_\varphi^2 = \int_0^\infty |1 - H(f)|^2 \sigma_\varphi^2(f) df \quad (2)$$

为了对 σ_φ^2 的大小作一估计, 可以把 $H(f)$ 取为下述简单形式:

* 国家科委 863 高技术项目。

收稿日期: 1998-06-15; 收到修改稿日期: 1998-10-05

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f \leq f_c \\ 0, & f > f_c \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{则 } \sigma_{\varphi}^2 = \int_{f_c}^{\infty} \sigma_{\varphi}^2(f) df = 0.0196k^2 f_c^{-5/2} \int_0^{\infty} C_N^2(z) V(z)^{5/2} dz \quad (4)$$

如果假设大气平均风速 $V(z)$ 与 z 无关, 利用下式

$$r_0^{-5/2} = 0.423k^2 \int_0^{\infty} C_N^2(z) dz \quad (5)$$

$$\text{可得 } \sigma_{\varphi}^2 = [(0.158/f_c)(V/r_0)]^{5/2} = 0.0462[V/f_c r_0]^{5/2} \quad (6)$$

式中 r_0 为 Fried 参数。显然, 减小 σ_{φ}^2 的途径是增大 f_c 。

若 $V = 10 \text{ m/s}$, $r_0 = 10 \text{ cm}$, 则 f_c 与 σ_{φ}^2 的对应值如下表所示, 其中 $\sigma_{\Delta\tau}/\lambda$ [$\sigma_{\Delta\tau} = (\lambda/2\pi)\sigma_{\varphi}$] 是以波长为单位的波差均方根值。

Table 1. σ_{φ}^2 and $\sigma_{\Delta\tau}/\lambda$ at different f_c^* , s

f_c/Hz	15.8	20.0	27.5	50.0	62.9	100.0	500.0
$\sigma_{\varphi}^2/\text{rad}^2$	1.000	0.675	0.395	0.147	0.100	0.046	0.003
$\sigma_{\Delta\tau}/\lambda$	1/6.30	1/7.65	1/10.00	1/16.40	1/20.00	1/29.00	1/115.00

此表说明, 当 f_c 大于 27.5 Hz 时, 时间响应误差的波差不大于 $\lambda/10$ 。当然, 这只是上述特定条件下的结论。

2 波面探测误差

波面探测误差来源于多项因素, 其中与时间有关的主要因素是一次波面探测所需的“曝光”时间 T 。 T 与波面探测相位方差 σ_{φ}^2 以及 f_c 的关系可以做以下分析。为了方便, 假设探测直接对望远镜入瞳处的波面进行。虽然实际上这种探测往往是对被光学系统缩小后的波面实现的, 但不难证明, 当把探测结果折算到入瞳面时, 得到的结论将与下面的分析相同。

假定波面探测从测量各子孔径内的波面平均斜率开始(例如最常用的哈特曼法或干涉法), 并设子孔径内光波所形成的光斑分布可用高斯分布近似

$$p(N_x, N_y) = G_s \exp\{-4[(N_x - N_{0x})^2 + (N_y - N_{0y})^2]/N_w^2\} \quad (7)$$

式中 N_x 、 N_y 为 CCD 像素的空间坐标, N_{0x} 、 N_{0y} 是像斑真实中心, N_w 是像斑等效半宽度(以上均以像素线度 a 度量), G_s 是一次探测时 (N_{0x}, N_{0y}) 处像素的光电子数, p 是 (N_x, N_y) 处的光电子密度。设像斑半径由衍射极限决定, 即

$$N_w = 1.22\mathcal{N}_H/(\epsilon a) \approx \mathcal{N}_H/(\epsilon a) \quad (8)$$

\mathcal{N}_H 为哈特曼透镜焦距, $\epsilon = \min\{d, r_0\}$ 。其中 d 为子孔径线径。

一次探测时一个子孔径内的光电子数 n_a 为

$$n_a = \iint p(N_x, N_y) dN_x dN_y = \pi N_w^2 G_s / 4 \quad (9)$$

$$\text{即 } G_s = 4n_a / (\pi N_w^2)$$

测量时, 像斑中心点位置 N_{0x} 由下式计算(x 方向)。 N_s 为以 CCD 像素线度为单位的子孔径(对应于子孔径线度 d)。

$$N_{0x} = \frac{1}{n_a} \sum_{N_x = -N_s/2}^{N_s/2} \sum_{N_y = -N_s/2}^{N_s/2} p(N_x, N_y) N_x \quad (10)$$

在此式右端的求和式中, 本应有一个等于像素面积的系数, 但因以像素线度为单位, 故此面积的值为 1, 不需明显示出, 下同。波面斜率由下式计算

$$S_x = N_{0x} a / f_H \tag{11}$$

实际测量时有噪声, 假定为光子噪声极限情形(仅考虑弱待测光波的光子噪声), 像素 (N_x, N_y) 上的噪声为 $C(N_x, N_y)$ 。则实际测得的是

$$p'(N_x, N_y) = p(N_x, N_y) + C(N_x, N_y) \tag{12}$$

从而 N_{0x} 的估计值 \tilde{N}_{0x} 为

$$\tilde{N}_{0x} = \frac{1}{n_a} \sum_{N_x} \sum_{N_y} p'(N_x, N_y) N_x = N_{0x} + \frac{1}{N_a N_x} \sum_{N_x} \sum_{N_y} C(N_x, N_y) N_x \tag{13}$$

误差为

$$\tilde{N}_{0x} - N_{0x} = (1/n_a) \sum_{N_x} \sum_{N_y} C(N_x, N_y) N_x \tag{14}$$

因为各像素处的 $C(N_x, N_y)$ 统计独立, 上述误差的方差为

$$\sigma_{0x}^2 = \frac{1}{n_a} \sum_{N_x} \sum_{N_y} \sigma_c^2(N_x, N_y) N_x^2 \tag{15}$$

由于光子噪声服从泊松分布, $C(N_x, N_y)$ 误差的平方 $\sigma_c^2 = p$, 于是

$$\sigma_{0x}^2 = \frac{1}{n_a} \sum \sum p(N_x, N_y) N_x^2 \approx \frac{1}{n_a} \iint p(N_x, N_y) N_x^2 dN_x dN_y = \frac{1}{n_a} [N_w^2/8 + N_{0x}^2] \tag{16}$$

进而有波面斜率方差

$$\sigma_{sx}^2 = (a/f_H^2 n_a) [N_w^2/8 + N_{0x}^2] = (1/f_H^2 n_a) [\lambda^2 f_H^2 \epsilon^{-2}/8 + N_{0x}^2] \tag{17}$$

它与像斑中心位置 N_{0x} 有关。为求得 σ_{sx}^2 的平均值, 需进一步对 N_{0x} 进行统计。由到达角方差公式可知^[4]

$$\langle N_{0x}^2 \rangle = 0.174 f_H^2 \lambda^2 d^{-2} (d/r_0)^{5/6} \tag{18}$$

$$\langle \sigma_{sx}^2 \rangle = (1/n_a) \lambda^2 [0.125 \epsilon^{-2} + 0.174 d^{-2} (d/r_0)^{5/6}] \tag{19}$$

式中 $\langle \sigma_{sx}^2 \rangle$ 为斜率探测在一维方向上的平均方差, λ 为平均波长, d 为子孔径线径, $\epsilon = \min(d, r_0)$ 。这个斜率误差经过波面重构处理将传递到重构波面的相位误差之中。如果重构处理采用泽尼克(Zernike)多项式拟合方法, 则在多项式项数足够大时, 有

$$\sigma_{\varphi i}^2 = d^2 k^2 \sigma_s^2 [\text{Tr}(\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B})^{-1}] \tag{20}$$

式中 $\sigma_{\varphi i}^2$ 是因二维斜率探测方差所造成的重构波面相位方差, $k = 2\pi/\lambda$, $\text{Tr}(\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B})^{-1}$ 是矩阵 $(\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B})^{-1}$ 的迹, 其中 \mathbf{B} 为波面重构矩阵, \mathbf{B}' 为 \mathbf{B} 的转置, 均可由泽尼克多项式计算得到。为避免对矩阵 \mathbf{B} 的计算, 这里用直观方法导出在特定条件下的 $\sigma_{\varphi i}^2$ 和 σ_s^2 的关系式, 如图 1 所示。

图 1 示出光瞳上的一维方向, 0 为光瞳中心, 假设该点的相位为参考相位: $\varphi = 0$, 无误差。从 0 点出发求取 x 轴上 $x = d$ 点的相位 φ 可用公式:

$$\varphi - \varphi_0 = kdS_{x1} \tag{21}$$

式中 S_{x1} 为 $x = 0$ 和 $x = d$ 点之间的平均相位斜率。不难看出, φ 的方差为 $\sigma_\varphi^2 = d^2 k^2 \langle \sigma_{sx1}^2 \rangle$ 。在继续求取 $x = 2d$ 点的相位时, 根据同样的理由, φ_2 相对于 φ 的方差为

$$\sigma_{\varphi 21}^2 = d^2 k^2 \langle \sigma_{sx2}^2 \rangle = d^2 k^2 \langle \sigma_{sx1}^2 \rangle = \sigma_\varphi^2 \tag{22}$$

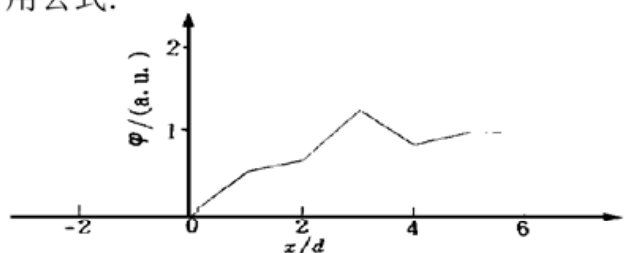


Fig. 1 Schematic of $\sigma_{\varphi i}^2$ vs σ_s^2

如果 $d \geq r_0$, 则 φ 相对于 φ_0 的方差为

$$\sigma_2^2 = \sigma_{21}^2 + \sigma_1^2 = 2\sigma_1^2 \quad (23)$$

依次类推, 可得

$$\sigma_m^2 = m\sigma_1^2 \quad (24)$$

这样, 自 $x = -md$ 点至 $x = md$ 点共 $2m + 1$ 个点处的平均相位方差为

$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=-m}^m |i| \sigma_1^2}{2m + 1} = \frac{2 \sum_{i=0}^m i \sigma_1^2}{2m + 1} = \frac{m(m + 1)}{2m + 1} \sigma_1^2 \approx \frac{m}{2} \sigma_1^2 \quad (25)$$

其中最后的近似在 $m \gg 1$ 时成立。由于大气扰动的圆对称统计特性, 在二维情形中 y 方向有相同的 σ_1^2 , 所以若以正方形光瞳估算则有

$$\sigma_{\varphi_0}^2 = \frac{\sigma_1^2}{(2m + 1)^2} \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m (|i| + |j|) = \frac{2\sigma_1^2}{2m + 1} m(m + 1) \approx m\sigma_1^2 \quad (26)$$

其中最后的近似在 $m \gg 1$ 时成立。并且有

$$\sigma_{\varphi_0}^2 \approx (D/2d)\sigma_1^2 \quad (27)$$

其中 $m = D/2d$ 。 D 为望远镜入瞳直径。如果以圆形光瞳作积分平均估算, 可以得到与(27)式估计值相近的下式

$$\sigma_{\varphi_0}^2 = \frac{4\sigma_1^2}{\pi D^2} \iint_D (|\cos \theta| + |\sin \theta|) r dr d\theta = \frac{4D}{3\pi d} \sigma_1^2$$

利用(19)式, 得

$$\sigma_{\varphi_0}^2 = \frac{Dd}{2} k^2 \langle \epsilon_{xx}^2 \rangle = \frac{Dd}{2} k^2 \langle \epsilon_{xx}^2 \rangle = \frac{2Dd\pi^2}{n_a} [0.125\epsilon^{-2} + 0.174d^{-2}(d/r_0)^{5/6}] \quad (28)$$

又根据 n_a 的定义, 可以写出

$$n_a = \alpha L T (\pi d^2/4) = 0.05\alpha\beta L f_c^{-1} (\pi d^2/4) \quad (29)$$

式中 α 为光电转换的量子效率, L 为光子照度(单位面积单位时间内的光子数)。其中曝光时间 T 已用 $0.05\beta/f_c$ 代替, β 反映曝光时间在一次校正周期中所占的时间比例, 系数 0.05 的来源将另文说明。这样,

$$\sigma_{\varphi_0}^2 = (160D\pi f_c / \alpha\beta L d) [0.125\epsilon^{-2} + 0.174d^{-2}(d/r_0)^{5/6}] \quad (30)$$

3 优 化

这样, 波面补偿剩余误差为

$$\sigma_{\varphi}^2 = \sigma_{\varphi_0}^2 + \sigma_{\varphi_0}^2 = a f_c^{-5/6} + b f_c \quad (31)$$

其中

$$a = 0.0462(V/r_0)^{5/6}, \quad b = (160\pi D / \alpha\beta L d) [0.125\epsilon^{-2} + 0.174d^{-2}(d/r_0)^{5/6}] \quad (32)$$

显然, 可以通过求取极值的方法, 找到一个最佳频率, 使得总的剩余误差为极小值。此时,

$$f_c = (5a/3b)^{3/6} \quad (33)$$

若 $V = 10$ m/s, $r_0 = 10$ cm, $D = 2$ m, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.8$, $L = 1.1 \times 10^8$ 光子/($\text{m}^2 \cdot \text{s}$), $d = 20$ cm, (大致为 6 等星), 则有 $f_c = 32.84$ Hz。

结 论 本文从十分简单的模型出发导出了与文献[5]相似的结论, 即通过以上讨论可见在

与截止频率有关的波面补偿剩余误差中, 既有与 f_c 成正比的项, 又有与 $f_c^{-3/2}$ 成反比的项。所以在系统带宽的选取上并不是越宽越好, 而是应有一个折中的选择。这样就为设计出波差更小、成像质量更好的自适应光学系统提供了可能。

参 考 文 献

- [1] Zhao D, Yu X. The optimization of bandwidth in adaptive optics telescope. In: *OSA Annual Meeting Technical Digest*. Washington D. C.: Optical Society of America, 1993. 16, 213
- [2] Greenwood D P. Bandwidth specification for adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3) : 390~ 393
- [3] 周仁忠, 阎吉祥, 俞 信等. 自适应光学. 北京: 国防工业出版社, 1996. 22, 24~ 78
- [4] Southwell W H. Wave-front estimation from wave-front slope measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**(8) : 998~ 1006
- [5] 饶长辉, 姜文汉. 自适应光学系统对大气湍流补偿的有效性分析. *强激光与离子束*, 1996, **8**(4) : 469 ~ 475

Optimization of Temporal Response Frequencies for Adaptive Optics Telescope

Zhao Dazun Chen Ke Yu Xin

(*Color Science and Engineering Lab, Department of Optical Engineering,
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*)

(Received 15 June 1998; revised 5 October 1998)

Abstract The relationship between residual wavefront phase error and frequency response in an adaptive optical telescope is analyzed. Mathematical formulations are derived for temporal response error and wavefront measurement error respectively. The results show that one part of residual wavefront phase error changes with cut-off frequency proportionally and another part inversely, so it becomes possible to find an optimal frequency which makes the systematic residual wavefront error minimal.

Key words adaptive optics, residual wavefront phase error, temporal response error, wavefront measurement error, cut-off frequency.