

# 低阶模式校正自适应光学系统的补偿效果分析\*

饶长辉 姜文汉 凌 宁

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

**摘 要** 引入规格化的相位谱[不一定为科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)谱], 推导了大气湍流相位结构函数、低阶模式校正后的残余相位结构函数以及长曝光光学传递函数(OTF)。分别给出了在各种不同大气湍流强度  $\rho_0$ 、不同相位谱空间频率的指数下降因子  $\beta$  时, 大气湍流相位波前低阶模式完全校正后和倾斜部分校正时的长曝光光学传递函数(OTF)、长曝光斯特列尔(Strehl)比和半高全宽(FWHM)的数值计算结果。

**关键词** 自适应光学, 长曝光光学传递函数, 斯特列尔比, 半高全宽, 低阶模式, 相位结构函数。

## 1 引 言

自适应光学技术能够实时测量并且能校正受到大气湍流扰动的光学波前, 从而在天文学观测、激光传输等领域得到广泛应用<sup>[1-3]</sup>。自适应光学系统主要由波前探测、波前复原、波前校正等几个部分组成。波前复原通常采用区域法和模式法。与区域法相比, 模式法更具优越性<sup>[4]</sup>。在大气湍流引起的波前误差方差中, 一阶项(倾斜)占 86.9%, 二阶项(离焦和像散)占 6.7%, 三阶及其三阶以上只占 6.4%, 因此在许多应用场合, 如低对比度扩展目标自适应光学系统中, 只要校正大气湍流引起的波前误差中的低阶项, 就可以取得良好的校正效果。

光学系统通常采用下面几个参数作为其成像性能评价指标: 光学传递函数、点扩散函数(PSF)、斯特列尔比、半高全宽等等。其中点扩散函数是光学传递函数的傅里叶变换, 根据系统的光学传递函数或点扩散函数可以得到斯特列尔比和半高全宽, 因此光学系统的成像性能最终由其光学传递函数决定。

据本文作者所知, 在国内外文献中, 有关自适应光学系统模式校正后的性能评价的文章很少(且均建立在科尔莫戈罗夫谱基础上进行分析)。本文通过引入规格化的相位谱(不一定为科尔莫戈罗夫谱), 推导了大气湍流相位结构函数以及系统低阶模式校正后的残余相位结构函数, 从而得到不同大气湍流强度下系统低阶模式校正后的长曝光光学传递函数、长曝光斯特列尔比和半高全宽。此外, 本文还对系统低阶模式校正后的补偿效果进行了数值计算。

\* 国家自然科学基金资助课题(No. 19789301)。

收稿日期: 1998-08-06; 收到修改稿日期: 1998-10-12

## 2 补偿效果评价指标

假定自适应光学系统校正后的残余相位为  $\phi_e(\mathbf{x}, t)$ , 则在近场近似条件下的瞬时光学传递函数为<sup>[5]</sup>:

$$\tau(\rho/\lambda, t) = \frac{1}{S} \int_B W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) \exp[i\phi_e(\mathbf{x}, t)] \exp[-i\phi_e(\mathbf{x} + \rho, t)] d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中  $S$  为观测系统的通光面积(口径为  $D$ );  $\lambda$  为观测波长;  $W(\mathbf{x})$  为光瞳形状函数,

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x}| \leq D/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

假设系统校正前后的相位波前(在入瞳任何位置)均服从高斯分布, 则系统校正后的长曝光光学传递函数为<sup>[6]</sup>:

$$\tau(\rho/\lambda) = \langle \tau(\rho/\lambda, t) \rangle = \frac{1}{S} \int_B W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) \exp[-\frac{1}{2}D\phi_e(\mathbf{x}, \rho)] d\mathbf{x} \quad (2)$$

式中  $D\phi_e(\mathbf{x}, \rho)$  为残余相位结构函数,

$$D\phi_e(\mathbf{x}, \rho) = \overline{|\phi_e(\mathbf{x}, t) - \phi_e(\mathbf{x} + \rho, t)|^2} \quad (3)$$

其中 “ $\overline{\quad}$ ” 表示求时间平均。

又假设大气湍流对光波波前的扰动空间平稳, 根据文献[4, 7], 对于校正低阶模式的自适应光学系统, 其残余相位结构函数可以表示为:

$$D\phi_e(\rho) = \langle D\phi_e(\mathbf{x}, \rho) \rangle = \int_B W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) D\phi_e(\mathbf{x}, \rho) d\mathbf{x} / \int_B W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) d\mathbf{x} \quad (4)$$

将(4)式代入(2)式可得系统低阶模式校正后的长曝光光学传递函数为:

$$\tau(\rho/\lambda) = \tau_0(\rho/\lambda) \exp[-\frac{1}{2}D\phi_e(\rho)] \quad (5)$$

式中  $\tau_0(\rho/\lambda) = \frac{1}{S} \int_B W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) d\mathbf{x}$  为无像差理想望远镜的光学传递函数。

根据斯特列尔比以及系统的长曝光光学传递函数的定义可以求出系统校正大气湍流低阶模式后的斯特列尔比为:

$$R_{SR} = \int \tau(\rho/\lambda) d\rho / \int \tau_0(\rho/\lambda) d\rho \quad (6)$$

此外, 根据系统的长曝光光学传递函数可以求出系统的长曝光点扩散函数, 从而求出系统低阶模式校正后的成像半高全宽<sup>[5]</sup>。

## 3 大气湍流相位结构函数

在有关文献中, 大气湍流相位结构函数均是建立在科尔莫戈罗夫谱基础上得到的, 但是实际测量得到的大气湍流功率谱并不都服从科尔莫戈罗夫谱, 而且各个观测站址和时间不同, 大气湍流的强度也不尽相同。我们曾引入规格化的大气湍流功率谱对大气湍流各低阶模式的功率谱进行了分析<sup>[8]</sup>, 下面仍将引入规格化大气湍流相位空间谱来分析其相位结构函数。

根据文献[9], 在相位满足各向同性条件下, 规格化相位空间谱为:

$$W_\phi(k) = \frac{A_\beta k^{-\beta}}{\rho_0^{\beta-2}}, \quad (2 < \beta < 4) \quad (7)$$

式中  $k$  为空间频率;  $\beta$  为相位谱空间频率的指数下降因子, 它表示功率谱曲线的陡峭程度, 在相同相位方差情况下,  $\beta$  越大, 相位谱中低频分量所占比重越大, 对于科尔莫戈罗夫谱,  $\beta = 11/3$ ;  $\rho_0$  类似于大气湍流相干长度  $r_0$ , 是一个表征大气湍流强度的参数, 当  $\beta = 11/3$  时,  $\rho_0 = r_0$ 。  $A_\beta$  为当  $D = \rho_0$  和去除整体平移的波前残余方差为  $1 \text{ rad}^2$  时的归一化量,

$$A_\beta = \frac{2^{\beta-2} \{ \Gamma[(\beta+2)/2] \}^2 \Gamma[(\beta+4)/2] \Gamma(\beta/2) \sin[\pi(\beta-2)/2]}{\pi^\beta \Gamma(\beta+1)} \quad (8)$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  为伽玛函数。

假设大气湍流波前空间自相关函数为  $B_\phi(\rho)$ , 根据数理统计知识, 大气湍流相位结构函数可表示为:

$$D_\phi(\rho) = 2[B_\phi(0) - B_\phi(\rho)] = 2 \iint_{2\pi}^{\infty} W_\phi(k) [1 - \cos(2\pi k \cdot \rho)] dk \quad (9)$$

式中

$$\iint dk = \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty k dk$$

注意到:

$$\int_0^\pi \cos(2\pi k \rho \cos \theta) d\theta = \pi J_0(2\pi k \rho) \quad (10)$$

$$\int_0^\infty x^{-t} [1 - J_0(bx)] dx = \frac{\pi b^{t-1}}{2^t \{ \Gamma[(t+1)/2] \}^2 \sin[\pi(t-1)/2]} \quad (1 < t < 3) \quad (11)$$

式中  $J_0(\cdot)$  为第一类零阶贝塞尔函数。于是得到大气湍流相位结构函数为:

$$D_\phi(\rho) = \gamma_\beta (\rho/\rho_0)^{\beta-2} \quad (12)$$

其中

$$\gamma_\beta = \frac{2^{\beta-1} \{ \Gamma[(\beta+2)/2] \}^2 \Gamma[(\beta+4)/2]}{\Gamma(\beta/2) \Gamma(\beta+1)} \quad (13)$$

对于科尔莫戈罗夫谱,  $\gamma_{11/3} = 6.88$ 。图 1 给出了  $\gamma_\beta$  与  $\beta$  之间的变化关系。

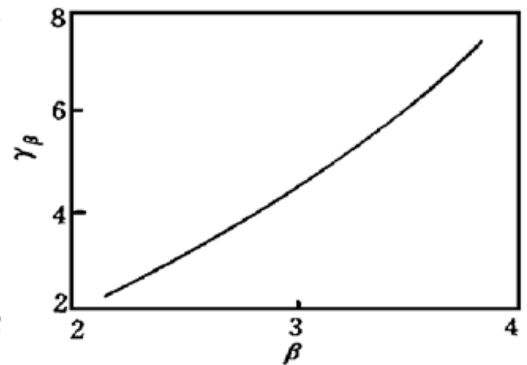


Fig. 1  $\gamma_\beta$  versus  $\beta$

### 4 低阶模式校正后的残余相位结构函数

设受大气湍流扰动的波前为  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ , 自适应光学系统只校正其前  $N - 1$  阶( $a_2 \rightarrow a_N$ ) 低阶模式, 所施加校正的波前为  $\Phi_m(\mathbf{x}, t)$ , 则系统的残余相位误差为:

$$\Phi_r(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t) - \Phi_m(\mathbf{x}, t) \quad (14)$$

用泽尼克多项式展开波前,  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  和  $\Phi_m(\mathbf{x}, t)$  分别表示为:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=2}^{\infty} a_j(t) z_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=2}^N A_j(t) z_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j(t) z_j(\mathbf{x}) = \Phi_L(\mathbf{x}, t) + \Phi_H(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

$$\Phi_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=2}^N m_j(t) z_j(\mathbf{x}) \quad (16)$$

式中  $a_j$  为大气湍流波前各阶模式系数;  $m_j$  为各低阶模式所加校正量;  $\Phi_L(\mathbf{x}, t)$  和  $\Phi_H(\mathbf{x}, t)$  分别为低阶模式相位和高阶模式相位,

$$\Phi_L(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=2}^N a_j(t) z_j(\mathbf{x}), \quad \Phi_H(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j(t) z_j(\mathbf{x}) \quad (17)$$

于是:

$$\Phi_e(\mathbf{x}, t) = \Phi_{el}(\mathbf{x}, t) + \Phi_{eh}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=2}^N [a_j(t) - m_j(t)] z_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j(t) z_j(\mathbf{x}) \quad (18)$$

式中  $\Phi_{el}(\mathbf{x}, t)$  为低阶模式残余相位,

$$\Phi_{el}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=2}^N [a_j(t) - m_j(t)] z_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=2}^N \epsilon_j(t) z_j(\mathbf{x}) \quad (19)$$

其中  $\epsilon_j(t) = a_j(t) - m_j(t)$ , 为低阶残余模式系数。

如果不考虑低阶模式与高阶模式之间的耦合, 则系统残余波前相位结构函数为:

$$D_{\Phi_e}(\mathbf{u}) = D_{\Phi_{el}}(\mathbf{u}) + D_{\Phi_{eh}}(\mathbf{u}) \quad (20)$$

式中  $|\mathbf{u}| = u = \lambda\nu/D = \rho/D$  为归一化空间频率,  $\rho = |\rho|$ ,  $\lambda$  为观测波长,  $\nu$  为空间频率;  $D_{\Phi_{el}}(\mathbf{u})$  和  $D_{\Phi_{eh}}(\mathbf{u})$  分别为低阶和高阶模式残余相位结构函数,

$$D_{\Phi_{el}}(\rho) = \frac{\iint_{\mathcal{D}} W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) |\Phi_{el}(\mathbf{x}, t) - \Phi_{el}(\mathbf{x} + \rho, t)|^2 d\mathbf{x}}{\iint_{\mathcal{D}} W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) d\mathbf{x}} = \sum_{j=2}^N \overline{\epsilon_j^2} d_j(\rho) \quad (21)$$

$$D_{\Phi_{eh}}(\rho) = \frac{\iint_{\mathcal{D}} W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) |\Phi_{eh}(\mathbf{x}, t) - \Phi_{eh}(\mathbf{x} + \rho, t)|^2 d\mathbf{x}}{\iint_{\mathcal{D}} W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) d\mathbf{x}} = D_{\Phi}(\rho) - \sum_{j=2}^N \langle \hat{\epsilon}_j^2 \rangle d_j(\rho) \quad (22)$$

其中  $\overline{\epsilon_j^2} = \overline{\epsilon_j^2(t)}$ ;  $\langle \hat{\epsilon}_j^2 \rangle$  为各阶模式系数方差;  $d_j(\rho)$  为形状函数<sup>[4, 7]</sup>

$$d_j(\rho) = \frac{\iint_{\mathcal{D}} W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) [z_j(\mathbf{x}) - z_j(\mathbf{x} + \rho)]^2 d\mathbf{x}}{\iint_{\mathcal{D}} W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} + \rho) d\mathbf{x}} \quad (23)$$

对于低阶模式, 形状函数具有简单的解析表达式:

$$\left. \begin{aligned} d_2(\rho) &= d_3(\rho) = 8(\rho/D)^2, \\ d_4(\rho) &= 2d_5(\rho) = 2d_6(\rho) = 48(\rho/D)^2(1 - \rho/D)^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

又根据文献[9],  $\langle \hat{\epsilon}_j^2 \rangle$  表示为:

$$\langle \hat{\epsilon}_j^2 \rangle = \frac{(n+1)\Gamma[(2n+2-\beta)/2]\Gamma[(\beta+4)/2]\Gamma(\beta/2)\sin[\pi(\beta-2)/2]}{\pi\Gamma[(2n+4+\beta)/2]} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} \quad (25)$$

因此系统低阶模式校正后的残余相位结构函数和长曝光光学传递函数分别为:

$$D_{\Phi_e}(\mathbf{u}) = D_{\Phi}(\mathbf{u}) - \sum_{j=2}^N \langle \hat{\epsilon}_j^2 \rangle d_j(u) + \sum_{j=2}^N \overline{\epsilon_j^2} d_j(u) \quad (26)$$

$$\tau(\mathbf{u}) = \tau_0(\mathbf{u}) \exp\left[-\frac{1}{2}D_{\Phi_e}(\mathbf{u})\right] \quad (27)$$

## 5 低阶模式部分校正时系统的波前残余误差

为了求出低阶模式未完全校正时的残余相位结构函数, 必须首先求出低阶模式校正残余误差  $\epsilon_j^2$ 。低阶模式校正残余误差  $\epsilon_j^2$  主要由两项误差构成: 一是由于系统有限带宽引起的湍流校正残余误差  $\epsilon_{j1}^2$ ; 一是系统的噪声误差  $\epsilon_{j2}^2$ 。

### 5.1 系统有限带宽引起的湍流校正残余误差 $\epsilon_{j1}^2$

对于  $\epsilon_t^2$ , 可以根据系统各低阶模式的功率谱和各阶模式的误差传递函数求出。倾斜项具有 Z 倾斜和 G 倾斜两种形式, Z 倾斜为大气湍流光学波前最佳拟合所对应的倾斜项, G 倾斜一般为平均斜率。其功率谱分别为<sup>[8]</sup>:

$$\begin{aligned} F_{jz}(f) &\propto \begin{cases} f^{4/3-6\beta/11}, & f \leq f_{j\text{cut}} \\ f^{-\beta-2}, & f > f_{j\text{cut}} \end{cases}, & j = 2, 3; \\ F_{jG}(f) &\propto \begin{cases} f^{4/3-6\beta/11}, & f \leq f_{j\text{cut}} \\ f^{-\beta}, & f > f_{j\text{cut}} \end{cases}, & j = 2, 3 \end{aligned} \quad (28)$$

对于离焦和像散项, 其功率谱为:

$$F_j(f) \propto \begin{cases} f^0, & f \leq f_{j\text{cut}} \\ f^{-\beta-2}, & f > f_{j\text{cut}} \end{cases}, \quad j = 4, 5, 6 \quad (29)$$

以上两式中  $f_{j\text{cut}}$  分别为各阶模式功率谱的交接频率, 根据文献[10], 各阶模式的交接频率分别为:

$$f_{j\text{cut}} = 0.3(n+1)V/D \quad (30)$$

式中  $V$  为平均风速,  $n$  为各阶模式所对应的径向级次,  $D$  为观测系统口径。

为分析方便, 假设系统各阶模式的闭环传递函数为:

$$H_{\varphi}(if) = \exp(-i2\pi f \tau) / (1 + if/f_{j3\text{dB}}) \quad (31)$$

式中  $\tau$  为系统时间延迟;  $f_{j3\text{dB}}$  为第  $j$  阶模式的闭环-3 dB 带宽。因此, 由于系统有限带宽引起的湍流校正残余误差为:

$$\epsilon_t^2 = \int_0^{\infty} F_j(f) |1 - H_{\varphi}(f)|^2 df \quad (32)$$

## 5.2 系统的噪声误差 $\epsilon_n^2$

在自适应光学系统中通常采用夏克-哈特曼波前传感器探测大气湍流引起的光波波前扰动信息。在波前探测中, 均不可避免引入探测噪声。在本文分析中, 假设波前探测器每个子孔径的探测噪声方差为  $\sigma_{sn}^2$ , 对于低阶模式校正自适应光学系统, 假定模式系数矩阵为  $\mathbf{A}$ , 探测斜率矩阵为  $\mathbf{G}$ , 则根据模式法波前复原原理<sup>[11]</sup>, 可以得到:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^+ \mathbf{G} \quad (33)$$

式中  $\mathbf{D}^+$  为  $\mathbf{D}$  的广义逆,  $\mathbf{D}^+ = (\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}$  为泽尼克多项式导数矩阵。

设系统斜率探测噪声方差矩阵为  $\mathbf{C}_{sn}$  (其对角线元素即为各子孔径探测斜率噪声方差  $\sigma_{sn}^2$ ), 模式系数噪声方差矩阵为  $\mathbf{C}_{an}$ , 各阶模式系数方差为  $\sigma_{a_n}^2$  (即为  $\mathbf{C}_{an}$  对应对角线元素), 根据误差传递可以得到:

$$\mathbf{C}_{an} = \mathbf{D}^+ \mathbf{C}_{sn} (\mathbf{D}^+)^T \quad (34)$$

由于系统是一个二次采样过程, 相对于系统闭环带宽而言, 系统噪声一般为白噪声<sup>[12]</sup>, 因此系统各阶模式的噪声功率谱密度为:

$$F_{jn} = 2T\sigma_{a_n}^2 \quad (35)$$

式中  $T$  为采样周期。根据系统的闭环噪声传递, 可以得到各阶模式的闭环噪声方差<sup>[12]</sup>为:

$$\epsilon_n^2 = \int_0^{\infty} F_{jn} |H_{\varphi}(if)|^2 df = \frac{\pi}{2} F_{jn} f_{j3\text{dB}} \quad (36)$$

## 5.3 低阶模式部分校正后系统的波前残余误差

根据(32)式和(36)式可以得到系统闭环后各低阶模式部分校正后的残余误差为:

$$\epsilon_j^2 = \epsilon_i^2 + \epsilon_n^2 = \int_0^\infty F_j(f) |1 - H_{qj}(f)|^2 df + \frac{\pi}{2} F_{j_n} f_{3dB} \quad (37)$$

## 6 自适应光学系统低阶模式校正后的补偿效果

为了评价系统对大气湍流引起的相位畸变的校正效果,对系统低阶模式校正后的长曝光光学传递函数、斯特列尔比以及半高全宽进行了数值计算。计算参数取为:  $D = 600 \text{ mm}$ ,  $V/D = 10 \text{ Hz}$ 。

### 6.1 自适应光学系统开环时的成像效果

根据(12)式,自适应光学系统开环时的大气湍流相位结构函数为:

$$D\phi(\mathbf{u}) = \gamma_\beta (D/\rho_0)^{\beta-2} u^{\beta-2} \quad (38)$$

于是系统的长曝光光学传递函数为:

$$\tau(\mathbf{u}) = \tau_0(\mathbf{u}) \exp \left[ -\frac{\gamma_\beta}{2} (D/\rho_0)^{\beta-2} u^{\beta-2} \right] \quad (39)$$

其中

$$\tau_0(\mathbf{u}) = (2/\pi) \{ \cos^{-1} u - u[1 - u^2]^{1/2} \}, \quad |u| \leq 1 \quad (40)$$

图 2(a) 给出了科尔莫戈罗夫湍流情况下各种不同大气湍流相干长度时的系统开环长曝光光学传递函数。图 3(a) 是  $\rho_0 = 10 \text{ cm}$  时各种不同  $\beta$  所对应的系统开环长曝光光学传递函数。

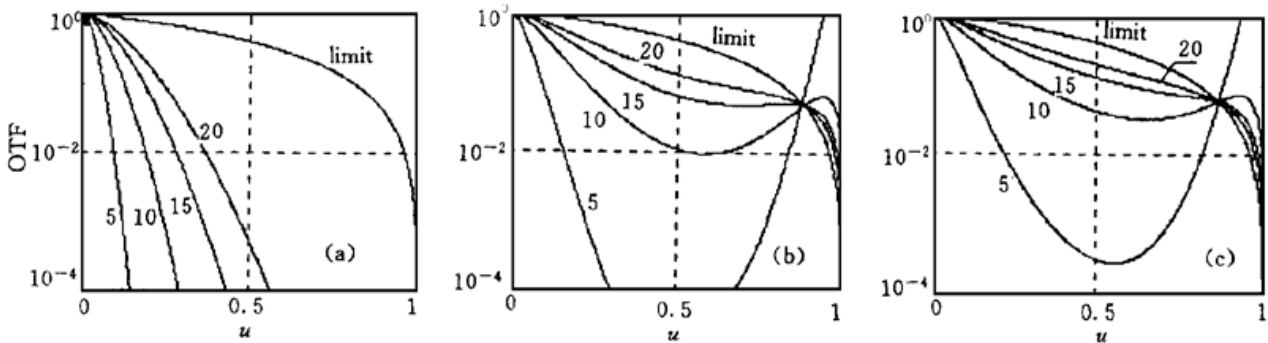


Fig. 2 Long-exposure OTF for Kolmogorov turbulence and different coherence length  $r_0$ . (a) Open-loop; (b) Tip-tilt correction; (c) Tip-tilt, defocus and astigmatism correction

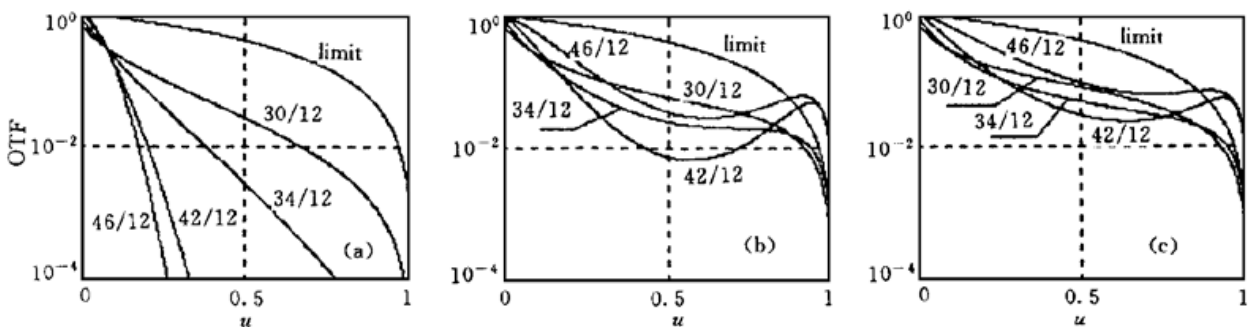


Fig. 3 Long-exposure OTF for different power-law exponent of phase power spectrum  $\beta$  ( $\rho_0 = 10 \text{ cm}$ ). (a) Open-loop; (b) Tip-tilt correction; (c) Tip-tilt, defocus and astigmatism correction

### 6.2 低阶模式完全校正后系统的补偿效果

当大气湍流所引起的相位畸变的前  $N - 1$  阶低阶模式被完全校正后,  $\epsilon_j^2 = 0 (j = 2, \dots, N)$ , 此时系统残余相位结构函数即为高阶模式残余相位结构函数,

$$D_{\phi_2}(\mathbf{u}) = D_{\phi_{\text{EH}}}(\mathbf{u}) = D_{\phi}(\mathbf{u}) - \sum_{j=2}^N \langle \hat{a}_j^2 \rangle d_j(u) \quad (41)$$

为考虑系统实际工作方式起见, 只对倾斜和前五阶(倾斜、离焦和像散)低阶模式完全被校正时的长曝光光学传递函数、斯特列尔比和半高全宽进行数值计算。

图 2(b) 给出了科尔莫戈罗夫湍流情况下倾斜完全被校正时各种不同大气湍流相干长度所对应的系统长曝光光学传递函数。图 3(b) 给出了  $\rho_0 = 10 \text{ cm}$  情况下倾斜完全被校正时各种不同  $\beta$  所对应的系统长曝光光学传递函数。

图 2(c) 给出了科尔莫戈罗夫湍流情况下前五阶低阶模式完全被校正时各种不同大气湍流相干长度所对应的系统长曝光光学传递函数。图 3(c) 给出了  $\rho_0 = 10 \text{ cm}$  情况下前五阶低阶模式完全被校正时各种不同  $\beta$  所对应的系统长曝光光学传递函数。

这里必须指出, 图 2(b) 和图 2(c) 在曲线交点(高频处)以后出现了“过校正”现象, 文献 [13] 曾指出过这种现象, 在本文中是由于系统低阶模式校正后未考虑模式之间的耦合所致。在图 3(b) 和图 3(c) 也有类似现象, 并且在  $\beta$  较小时不出现此现象。由于系统低阶模式校正后在高频段才出现“过校正”现象, 因此其对系统的长曝光斯特列尔比和半高全宽影响很小, 可以忽略。

图 4 和图 5 还分别给出了系统开环、倾斜完全被校正以及前五阶低阶模式完全被校正时各种不同  $\rho_0$  所对应的系统斯特列尔比和半高全宽随  $\beta$  的变化关系曲线。图 2~ 图 5 均给出了衍射极限时的长曝光光学传递函数、斯特列尔比和半高全宽。

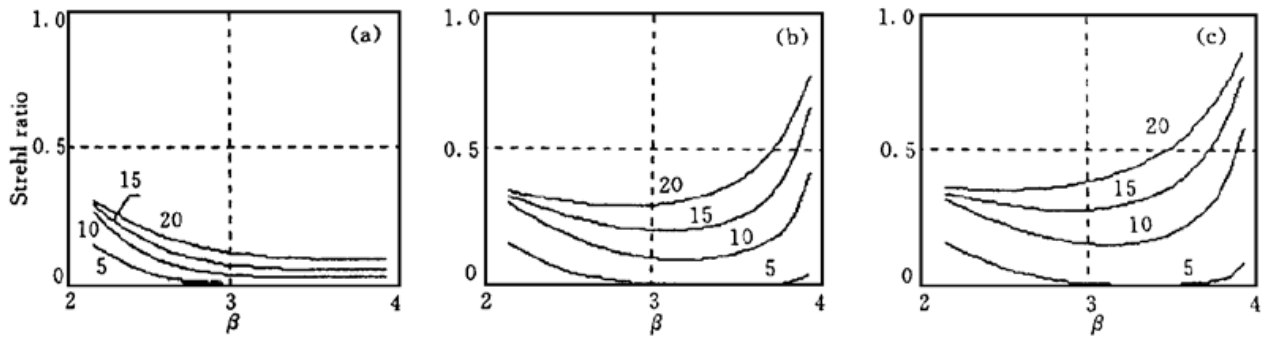


Fig. 4 Long-exposure image Strehl ratio vs power-law exponent of phase power spectrum  $\beta$  for different  $\rho_0$ . (a) Open-loop; (b) Tip-tilt correction; (c) Tip-tilt, defocus and astigmatism correction

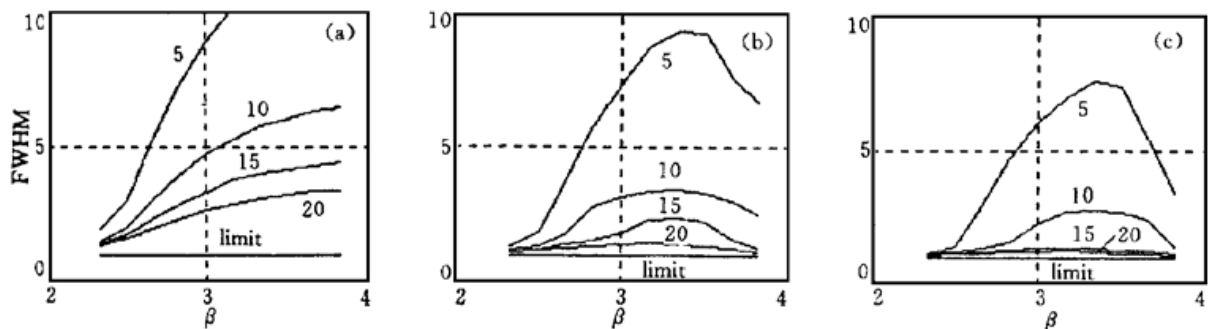


Fig. 5 Long-exposure image FWHM vs power-law exponent of phase power spectrum  $\beta$  for different  $\rho_0$ . (a) Open-loop; (b) Tip-tilt correction; (c) Tip-tilt, defocus and astigmatism correction

图 2~ 图 5 的数值计算结果表明:

1) 系统开环时, 对于相同的大气湍流强度, 随着  $\beta$  的增大, 大气湍流所引起的误差也越大, 因此系统成像斯特列尔比逐渐减小, 半高全宽逐渐增宽。

2) 相同  $\beta$  情况下,  $\rho_0$  越大, 湍流越弱, 成像斯特列尔比越大, 半高全宽越窄。

3) 与系统开环相比, 低阶模式校正后能明显提高系统斯特列尔比, 使成像半高全宽变窄。

4) 相同大气湍流强度  $\rho_0$  情况下, 当  $\beta$  较小时, 随着  $\beta$  的增大, 低阶模式校正后的系统成像斯特列尔比逐渐减小, 半高全宽逐渐增宽; 当  $\beta$  较大时, 低阶模式校正后的系统成像斯特列尔比随  $\beta$  的增大而逐渐增大, 半高全宽随  $\beta$  的增大而逐渐变窄。

5) 相同湍流强度  $\rho_0$  和  $\beta$  情况下, 系统被校正模式数越多, 系统斯特列尔比越大, 成像半高全宽越窄, 系统补偿效果越明显。

6) 在比较好的大气条件下(如  $\rho_0 = 15, 20$ ), 系统成像半高全宽在低阶模式被校正后就能够接近衍射极限(衍射极限时的半高全宽为  $\lambda/D$ )。

### 6.3 低阶模式部分校正后的补偿效果

在大气湍流所引起的相位畸变的低阶模式被部分校正时, 本文只对倾斜部分校正时的成像效果进行数值计算。

图 6 给出了科尔莫戈罗夫湍流情况下倾斜被部分校正时各种不同闭环带宽、不同噪声功率谱以及不同  $\beta$  所对应的系统长曝光光学传递函数。

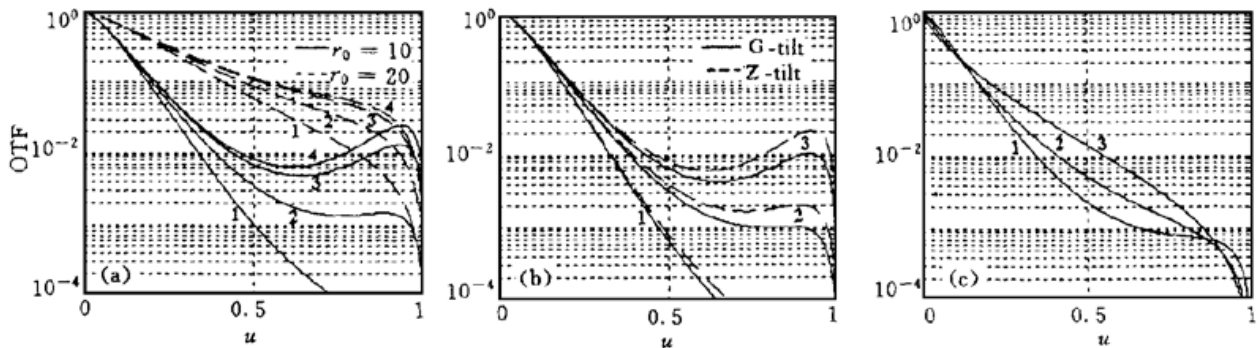


Fig. 6 Tilt-corrected long-exposure MTF. (a) G-tilt for different closed-loop bandwidth and Kolmogorov turbulence ( $F_{fn} = 0$ ), 1:  $f_{3dB} = 10$  Hz, 2:  $f_{3dB} = 20$  Hz, 3:  $f_{3dB} = 50$  Hz, 4:  $f_{3dB} = 100$  Hz. (b) G-tilt and Z-tilt for different noise power spectrum and Kolmogorov turbulence ( $f_{3dB} = 50$  Hz,  $r_0 = 10$  cm), 1:  $F_{fn} = 0.03$  rad<sup>2</sup>/Hz, 2:  $F_{fn} = 0.01$  rad<sup>2</sup>/Hz, 3:  $F_{fn} = 0.001$  rad<sup>2</sup>/Hz. (c) G-tilt for different  $\beta$  ( $f_{3dB} = 50$  Hz,  $F_{fn} = 0.01$  rad<sup>2</sup>/Hz,  $\rho_0 = 10$  cm), 1:  $\beta = 32/12$ , 2:  $\beta = 36/12$ , 3:  $\beta = 40/12$

图 7(a) 给出了倾斜被部分校正时各种不同噪声功率谱所对应的系统斯特列尔比随  $\beta$  的变化关系曲线。图 7(b) 和图 7(c) 分别给出了科尔莫戈罗夫谱湍流情况下, 倾斜被部分校正时各种不同噪声功率谱和大气湍流相干长度所对应的系统斯特列尔比随闭环带宽的变化关系曲线。

此外, 表 1 还给出了倾斜被部分校正时不同  $\beta$ 、不同闭环带宽和不同噪声功率谱所对应的系统成像半高全宽。



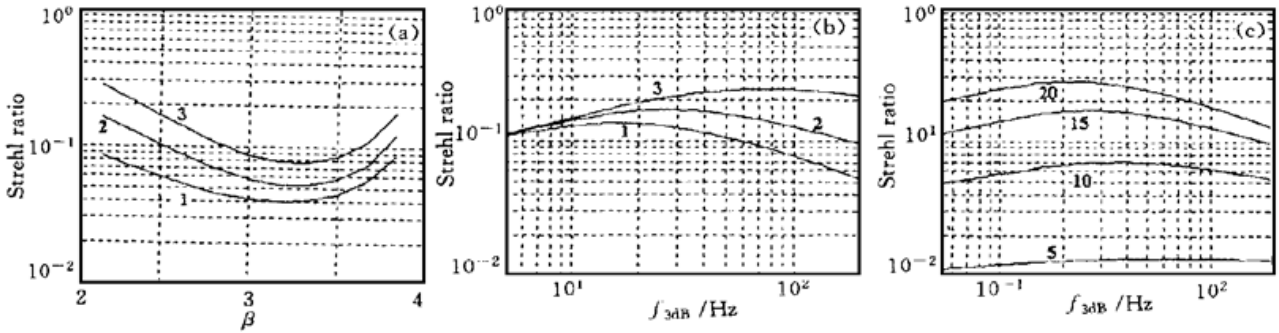


Fig. 7 Z-Tilt-corrected long-exposure Image Strehl ratio. (a) Strehl ratio vs  $\beta$  for different noise power spectrum ( $\rho_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $f_{3dB} = 50 \text{ Hz}$ ). (b) Strehl ratio vs closed-loop bandwidth for different noise power spectrum and Kolmogorov turbulence ( $r_0 = 15 \text{ cm}$ ). (c) Strehl ratio vs closed-loop bandwidth for Kolmogorov turbulence and different  $r_0$  ( $F_{fn} = 0.01 \text{ rad}^2/\text{Hz}$ ). In Fig. 7 (a) and Fig. 7 (b), 1:  $F_{fn} = 0.03 \text{ rad}^2/\text{Hz}$ , 2:  $F_{fn} = 0.01 \text{ rad}^2/\text{Hz}$ , 3:  $F_{fn} = 0.001 \text{ rad}^2/\text{Hz}$

Table 1. Image FWHM  $\omega$  for G-tilt ( $\rho_0 = 10 \text{ cm}$ ) / ( $\lambda/D$ )

$\beta$		32/12				44/12				
		$f_{3dB}$	10	20	50	100	10	20	50	100
$F_{fn}$	$\omega$									
0.001/(rad <sup>2</sup> /Hz)		2.62	2.40	2.25	2.28	4.13	3.81	3.50	3.40	
0.010/(rad <sup>2</sup> /Hz)		2.70	2.63	2.82	3.22	4.16	3.90	3.83	4.00	
0.030/(rad <sup>2</sup> /Hz)		2.91	3.00	3.56	4.29	4.22	4.06	4.23	4.65	

图 6 和图 7 以及表 1 的数值计算结果表明:

- 1) 相同  $\rho_0$ 、 $f_{3dB}$  和  $F_{fn}$  情况下, 当  $\beta$  较小时, 随着  $\beta$  的增大, 倾斜校正后的成像斯特列尔比逐渐减小; 当  $\beta$  较大时, 倾斜校正后的成像斯特列尔比随着  $\beta$  的增大而逐渐增大。
- 2) 相同  $\rho_0$ 、 $f_{3dB}$  和  $\beta$  情况下,  $F_{fn}$  越大, 噪声越大, 倾斜校正后的成像斯特列尔比越小, 半高全宽越宽。
- 3) 相同  $F_{fn}$ 、 $f_{3dB}$  和  $\beta$  情况下,  $\rho_0$  越大, 湍流越弱, 倾斜校正后的成像斯特列尔比越大, 半高全宽越窄。
- 4) 相同  $\rho_0$ 、 $\beta$  和  $F_{fn}$  情况下, 当  $f_{3dB}$  较小时, 随着  $f_{3dB}$  的增大, 倾斜校正后的成像斯特列尔比逐渐增大; 当  $f_{3dB}$  较大时, 倾斜校正后的成像斯特列尔比随着  $f_{3dB}$  的增大而逐渐减小。系统存在一最佳闭环带宽, 此时系统成像斯特列尔比最大。
- 5) 最佳闭环带宽是  $\rho_0$ 、 $\beta$  和  $F_{fn}$  的函数,  $\rho_0$  和  $F_{fn}$  越大, 最佳闭环带宽越窄。

**总结** 本文对自适应光学系统低阶模式校正后的长曝光光学传递函数、斯特列尔比以及成像半高全宽进行了理论分析及数值计算, 给出了不同  $\beta$ 、 $\rho_0$ 、 $f_{3dB}$  和  $F_{fn}$  时的长曝光光学传递函数、斯特列尔比以及成像半高全宽曲线。结果表明: 大气湍流所引起的相位畸变的低阶模式被自适应光学系统校正时的长曝光光学传递函数是波前相位空间谱空间频率指数下降因子  $\beta$ 、大气湍流强度  $\rho_0$ 、系统闭环带宽  $f_{3dB}$  以及噪声功率谱  $F_{fn}$  的函数; 低阶模式校正后可以明显提高系统斯特列尔比, 减小成像半高全宽; 相同大气湍流强度  $\rho_0$  情况下, 低阶模式校正后成像斯特列尔比和半高全宽与  $\beta$  和  $F_{fn}$  直接有关; 在比较好的大气条件下, 系统成像半高全宽在低阶模式被校正后就能够接近衍射极限。

本文的分析为自适应光学系统进行模式校正时的补偿效果评价提供了理论依据, 对系统

设计和分析具有一定的指导意义。

### 参 考 文 献

- [1] Jiang Wenhan, Li Mingquan, Tang Guomao *et al.*. Adaptive optics image compensation experiments for star objects. *Opt. Engng.*, 1995, **34**(1) : 15~ 20
- [2] 姜文汉, 严佩英, 李明全等. 自适应光学实时大气湍流补偿实验. *光学学报*, 1990, **10**(6) : 558~ 564
- [3] 饶长辉, 姜文汉. 2.16 m 望远镜红外自适应光学系统的误差和性能分析. *天体物理学报*, 1996, **16**(4) : 428~ 437
- [4] Dai G M. Modal wave-front reconstruction with zernike polynomials and Karhunen-Loeve functions. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(6) : 1218~ 1225
- [5] Roddier F. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. in Wolf E, ed., *Progress in Optics*, Amsterdam: North-Holland, 1981, XIX, 281~ 376
- [6] Veran J P, Rigaut F, Maitre H *et al.*. Estimation of the adaptive optics long-exposure point-spread function using control loop data. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1997, **14**(11) : 3057~ 3069
- [7] Dai G M. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of zernike polynomials and Karhunen-Loeve functions. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1995, **12**(10) : 2182~ 2193
- [8] 饶长辉, 姜文汉, 凌 宁. 大气湍流波前低阶模式的时间功率谱分析. *光学学报*, 1999, **19**(9) : 1223 ~ 1230
- [9] Boreman G D, Dainty C. Zernike expansions for non-Kolmogorov turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(3) : 517~ 522
- [10] Conan J M, Rousset G, Madec P Y. Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1995, **12**(7) : 1559~ 1570
- [11] Cubalchini R. Modal wave-front estimation from phase derivative measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(7) : 972~ 977
- [12] 饶长辉, 姜文汉, 李明全. 光子计数式剪切干涉仪波前探测自适应光学系统的噪声分析. *光学学报*, 1997, **17**(2) : 175~ 180
- [13] Wang J Y. Optical resolution through a turbulent medium with adaptive phase compensation. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3) : 383~ 390

## Analysis of Compensation Effectiveness for Adaptive Optical System Used as Low-Order Modes Correction

Rao Changhui      Jiang Wenhan      Ling Ning

(*Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*)

(Received 6 August 1998; revised 12 October 1998)

**Abstract** Phase structure function, residual phase structure function and long-exposure optical transfer function (OTF) of an adaptive optical system used as low-order modes correction are deduced by introducing the generalized phase spatial spectrum when low-order modes are corrected. Numerical results of long-exposure OTF, Strehl ratio and FWHM for different  $\rho_0$ , which shows the state of atmospheric turbulence, and different  $\beta$ , which is the power-law exponent of phase power spectrum, are presented.

**Key words** adaptive optics, long-exposure optical transfer function, Strehl ratio, full width at half maximum, low-order modes, phase structure function.