

光电成像系统混淆效应的定量分析

张海涛 赵达尊

(北京理工大学光电工程系颜色科学与工程实验室, 北京 100081)

摘 要 光电成像系统由于欠抽样产生频谱混淆。用矢量分析方法, 给出了正弦图像基元的混淆表达式。具体分析了以矩形光栅为例的周期性目标莫尔条纹式的混淆效应, 以及非周期性目标噪声形式的混淆效应。并分别作了计算机仿真实验。

关键词 光电成像系统, 傅里叶变换, 欠抽样, 频谱混淆, 莫尔条纹。

用光电成像系统获取图像信息, 由于用光电扫描机制或探测器阵列对图像进行抽样, 当被抽样物体含有超过二分之一抽样频率的高频成份时, 这些成份不再能正确地表现出来; 同时, 由于谱的周期性交叠, 它不象普通透镜那样仅仅是高频信号的消失, 而是出现错误的低频信号^[1]。这就是光电成像系统的混淆效应, 常是造成像质下降的主要原因。本文利用矢量表示方法, 对混淆效应进行定量分析。除了给出余弦图像基元的混淆表达式, 还根据混淆表现的具体特征, 分别给出周期性和非周期性目标的混淆标定方法。最后用计算机进行了模拟验证。

1 系统成像

设目标场景辐射经过大气传输、光学系统成像以及光敏元积分作用后的函数形式为 $f(\mathbf{r})$, \mathbf{r} 是图像平面的位置矢量。 $f(\mathbf{r})$ 再经探测器矩形阵列的点抽样(设像素形状为矩形)后成为离散函数 $f(\mathbf{r}_{mn})$, 其中 $\mathbf{r}_{mn}(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 表示抽样栅格上的点所对应的位置矢量。忽略抽样阵有限大小的影响, $f(\mathbf{r}_{mn})$ 可以表示为

$$f(\mathbf{r}_{mn}) = f(\mathbf{r}) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{mn}) \quad (1)$$

如果插值函数为 $g(\mathbf{r})$, 则重建连续函数 $f_c(\mathbf{r})$ 为

$$f_c(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}_{mn}) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{mn}) \quad (2)$$

对(2)式进行傅里叶变换, 得

$$F_c(\mathbf{R}) = \xi_s \eta_k G(\mathbf{R}) \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{MN}) \quad (3)$$

其中的大写字母代表(2)式对应的小写字母所表示的函数的傅里叶变换; \mathbf{R} 表示空间频谱面上的矢量; 而

$$\mathbf{R}_{MN} = M\mathbf{R}_{1,0} + N\mathbf{R}_{0,1}, \quad M, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

$\mathbf{R}_{1,0}$ 、 $\mathbf{R}_{0,1}$ 分别表示水平、垂直方向上的抽样频率矢量; 设 $G(\mathbf{R})$ 为理想的重建滤波函数, 即

$$G(\mathbf{R}) = \begin{cases} 1 & R_\xi < |\mathbf{R}_{1,0}|/2, R_\eta < |\mathbf{R}_{0,1}|/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

其中 R_ξ 、 R_η 分别为 \mathbf{R} 在水平、垂直方向上的频率分量, 即 $\mathbf{R} = R_\xi\xi + R_\eta\eta$, ξ 、 η 分别是频谱面两个主方向上的单位矢量; 而 $|\mathbf{R}_{1,0}|/2$ 和 $|\mathbf{R}_{0,1}|/2$ 叫作抽样系统的奈奎斯特(Nyquist)频率 ξ_N 和 η_N , 分别等于抽样频率 $\xi_s = |\mathbf{R}_{1,0}|$ 和 $\eta_s = |\mathbf{R}_{0,1}|$ 的二分之一。

根据抽样定理^[1], 频谱 $F(\mathbf{R})$ 如果只在奈奎斯特重建带宽内有值, 则 $f(\mathbf{r})$ 可以被准确重建; 不然, 将会由于周期谱的叠加而产生频谱混淆。

2 混淆的定量分析

2.1 “图像基元”的混淆矢量表达式

因为任何图像都可分解为若干个频率(大小和方向)不同的亮度呈余弦变化的图像之和, 所以本文先着重对余弦“图像基元”光电成像结果作分析。亦即分析当 $f(\mathbf{r}) = \cos 2\pi(\mathbf{R}' \cdot \mathbf{r})$ 时成像形式, 其中 \mathbf{R}' 是“图像基元”的输入频率矢量, $\mathbf{R}' = R'_\xi\xi + R'_\eta\eta$ 。由于实际图像总含有一个大的零频基元, $f(\mathbf{r})$ 取负值时不会造成负亮度问题。 $f(\mathbf{r})$ 的频谱为

$$F(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \delta(\mathbf{R} + \mathbf{R}')] \quad (6)$$

将(6)式代入(3)式, 可得抽样重建后的连续函数的频谱

$$F_c(\mathbf{R}) = \frac{\xi_s\eta_s}{2}G(\mathbf{R}) \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} [\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}' - \mathbf{R}_{MN}) + \delta(\mathbf{R} + \mathbf{R}' - \mathbf{R}_{MN})] \quad (7)$$

(7)式出现双重求和, 形式上比较繁琐, 使用不便。而实际上该式只对一组 M 、 N 不为零, 所以可导出这组 M 、 N 的表达式, 以取消双重求和形式。为此, 令 $m' = \frac{R'_\xi}{\xi_s} - [\frac{R'_\xi}{\xi_s}]$, $n' = \frac{R'_\eta}{\eta_s} - [\frac{R'_\eta}{\eta_s}]$, 其中 $[\]$ 表示取整运算。考虑到(4)式, (7)式可以进一步简化为

$$F_c(\mathbf{R}) = \frac{\xi_s\eta_s}{2} \{ \delta[\mathbf{R} - (\mathbf{R}' + \mathbf{R}_{M'N'})] + \delta[\mathbf{R}' + (\mathbf{R}' + \mathbf{R}_{M'N'})] \} \quad (8)$$

其中

$$M' = \begin{cases} -[\frac{R'_\xi}{\xi_s}], & |m'| < 0.5 \\ -[\frac{R'_\xi}{\xi_s}] - 1, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad N' = \begin{cases} -[\frac{R'_\eta}{\eta_s}], & |n'| < 0.5 \\ -[\frac{R'_\eta}{\eta_s}] - 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

换言之, 重建的连续图像频谱由两个脉冲组成, 分别在 $\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{R}_{M'N'}$ 和 $\mathbf{R} = -\mathbf{R}' - \mathbf{R}_{M'N'}$ 处。将(8)式逆傅里叶变换, 得到空域中的“图像基元”重建表达式

$$f_c(\mathbf{r}) = \xi_s\eta_s \cos 2\pi[(\mathbf{R}' + \mathbf{R}_{M'N'}) \cdot \mathbf{r}] \quad (9)$$

观察(9)式, 当 $M' = 0$ 且 $N' = 0$ 时, 忽略常系数, 则 $f_c(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ 。即 \mathbf{R}' 在奈奎斯特通带内时, 光电成像系统可以如实地把频率表现出来。当上述条件不满足时, 重建谱的两个脉冲矢量被称为混淆频率矢量, 分别用 $\pm \mathbf{R}'_a$ 表示。如果 θ 为 $\pm \mathbf{R}'_a$ 矢量所在直线的倾斜角, 则混淆频率矢量又可以表示为

$$\begin{cases} |R'_a| = \sqrt{(R'_\xi + M'\xi_s)^2 + (R'_\eta + N'\eta_s)^2} \\ \theta = \text{arccot} \frac{R'_\xi + M'\xi_s}{R'_\eta + N'\eta_s} \end{cases} \quad (10)$$

显然 $|R'_a| < R'$, 矢量的方向也有所变化。

$\pm R'$ 在频谱面上的相对位置如图 1 所示, R' 在奈奎斯特通带(方形虚框)外, 输出为混淆频率矢量。因 $\xi_s/2 < R'_\xi < \xi_s$, $0 < R'_\eta < \eta_s/2$, 所以根据(8)式可以得到: $M' = -1$, $N' = 0$, 即 $R'_a = R' + R_{-1,0}$ 。很显然, R'_a 反应的特征已完全不同于输入频率矢量 R' 。

2.2 周期函数的混淆效应

一个周期函数的傅里叶变换不是一个连续函数, 而是一系列等距的 δ 函数, 每个 δ 函数对应一根谱线。所以当光电成像系统对周期性目标欠抽样成像时, 可以观察到莫尔条纹样式的混淆失真。这种莫尔条纹也叫作“扫描莫尔”^[21], 以别于由交叉光栅产生的莫尔条纹。

1) 扫描莫尔

下面以矩形光栅为例来说明以莫尔条纹为特征的周期函数的混淆效应。光栅可以写成傅里叶级数形式

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp [j2n\pi(\mathbf{R}' \cdot \mathbf{r})] \quad (11)$$

其中 $C_n = (d/T) \text{sinc}(nd/T)$, T 为矩形光栅的周期, d 等于透光宽度。特别当 $d/T = 1/2$, 即 $C_n = (1/2) \text{sinc}(n/2)$ 时, 又叫作朗齐光栅, 仅由奇次谐波项组成。

对(11)式进行傅里叶变换, 得矩形光栅的频谱分布

$$F(\mathbf{R}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\mathbf{R} - n\mathbf{R}') \quad (12)$$

频谱中各次谐波的抽样、重建的分析过程与“图像基元”是类似的, 最后的输出图像 $F(\mathbf{R})$ 只不过是各项的综合结果。另外, 因为矩形光栅的基频矢量在各次谐波中占的分量最大, 所以如果基频矢量在奈奎斯特通带外, 莫尔条纹将尤其明显。

2) 实验仿真

图 2 是基频矢量大小为单位 1、倾斜角为 165° 的朗齐光栅的频谱图, 括号中的数字表示谐波次数。

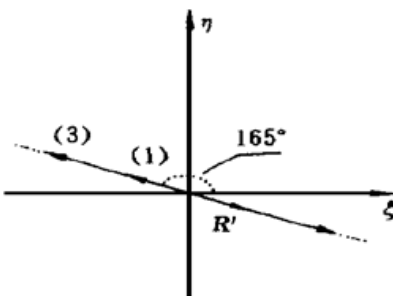


Fig. 2 Frequency vectors of Ronchi grating

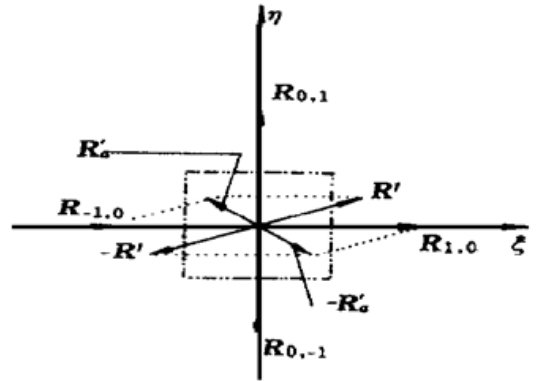


Fig. 1 Frequency vectors of aliasing

该光栅在不同抽样频率下的仿真成像结果如图 3 所示。理论上朗齐光栅由无数个奇次谐波项叠加而成; 但随着谐波级次的增加, 其占的比重也越小, 其中起主导作用的是基波和 3 次谐波。根据(10)式, 可以预先算出图 3 中各抽样频率下朗齐光栅的基波和 3 次谐波的混淆矢量大小和倾斜角, 如表 1 所示。表中符号“~”表示该项不引入混淆, 原图对应的该次谐波项在奈奎斯特通带内。

Table 1. Modulus and inclined angles for aliasing vectors of the 1st and the 3th harmonics at different sampling frequencies same as those in Fig. 3

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
$ R_{a(1)}' $	~	~	0.5485	0.4692	0.3085	0.2657
$\theta_{(1)}$	~	~	28.3°	33.5°	57.9°	103.0°
$ R_{a(3)}' $	~	1.0774	0.6725	0.6091	0.6122	0.2223
$\theta_{(3)}$	~	133.9°	90.0°	107.5°	144.5°	35.5°

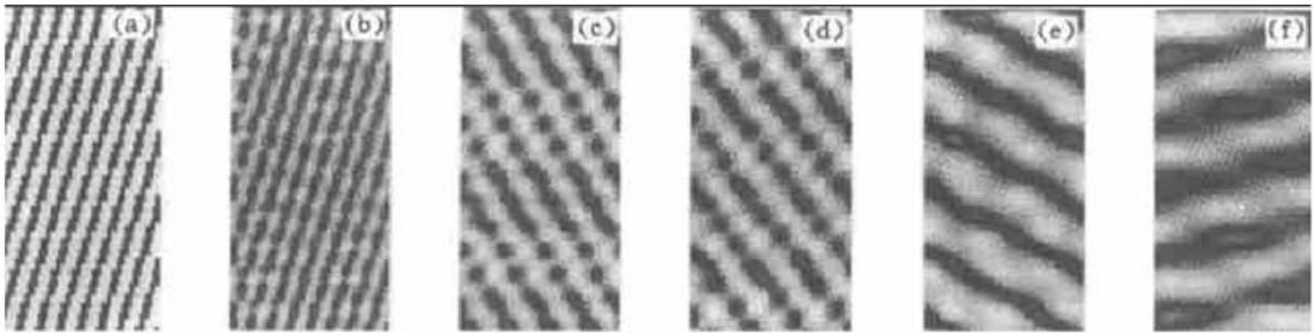


Fig. 3 Imaging results of Ronchi grating as Fig. 2 at different sampling frequencies (a) $\xi_s(\eta_s) = 5.7956$, (b) $\xi_s(\eta_s) = 2.1507$, (c) $\xi_s(\eta_s) = 1.4489$, (d) $\alpha_s(\eta_s) = 1.3573$, (e) $\xi_s(\eta_s) = 1.1320$, (f) $\xi_s(\eta_s) = 0.9056$

观察图 3 和表 1 可见: 图 3(a)、图 3(b) 情形中的基频均没有引入混淆, 所以成像结果基本能反映原物光栅的频率大小及走向, 图中光栅上的锯齿是高次谐波欠抽样的缘故; 而图 3(c)~ 图 3(f) 情形由于出现了基频混淆, 成像结果便完全不能体现物光栅的性质了。表 1 预测了从图 3(c)~ 图 3(f) 随着抽样频率的减小, 基频引入的混淆频率将逐渐变小, 倾斜角将逐渐增大。图 3 显示的结果也正是如此: 图 3(c)~ 图 3(f), 莫尔条纹逐渐稀疏, 条纹走向也呈逆时针旋转趋势。3 次谐波的预测与仿真结果也是吻合的。例如, 表 1 预测图 3(c) 将有 3 次谐波引入的 90° 的混淆频率矢量, 而在图 3(c) 中确能观察到横条纹分布。可见, 用矢量分析方法, 预测光电成像系统对周期性目标的成像结果是简单有效的。

2.3 非周期函数的混淆效应

非周期函数的频谱是连续的, 即使欠抽样, 也观察不到明显的莫尔条纹式的影像。所以一部分人(包括 Biberman^[3]) 认为只有对周期性目标成像时, 才有必要考虑欠抽样的影响。然而, 这种由于观察不到莫尔条纹影像就断定欠抽样影响可以忽略的观点是不妥的。因为自然景物通常不是带限函数, 而光学成像系统的截止频率又远高于后面抽样系统的奈奎斯特频率, 所以不能简单抹杀混淆的客观存在。

1) 混淆噪声

混淆在输出图像中可以看成附加的与信号相关的噪声。观察(3)式, 重建图像还可表达为 $(M, N) = (0, 0)$ 的基带信号频谱和 $(M, N) \neq (0, 0)$ 的旁带混淆频谱之和, 即

$$F_c(\mathbf{R}) = F_l(\mathbf{R}) + A(\mathbf{R}) \quad (13)$$

其中

$$F_l(\mathbf{R}) = \xi_s \eta_s G(\mathbf{R}) F(\mathbf{R}),$$

$$A(\mathbf{R}) = \xi_s \eta_s G(\mathbf{R}) \sum_{\substack{M=-\infty \\ (M, N) \neq (0, 0)}}^{\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} F(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{MN}).$$

$F_l(\mathbf{R})$ 即为基带信号频谱, $A(\mathbf{R})$ 为旁带引入的混淆频谱。

对(13)式进行逆傅里叶变换, 得

$$f_c(\mathbf{r}) = f_l(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r}) \tag{14}$$

上式右端第一项 $f_l(\mathbf{r})$ 可以认为是经过理想低通滤波后的输出; 而混淆项 $a(\mathbf{r})$ 可以看作实际系统不满足线性位移不变条件时, 为了符合实际输出, 而对理想输出附加的类似噪声的“校正”项, 常用混淆误差 ϕ^{41} 来标定

$$\phi = E_a/E_R \tag{15}$$

其中 E_a 、 E_R 分别表示混淆能量和信号能量, 它们是其对应功率谱密度在奈奎斯特通带内的积分

$$E_R = \int_{-\xi_s/2}^{\xi_s/2} \int_{-\eta_s/2}^{\eta_s/2} |F(R_\xi, R_\eta)|^2 dR_\xi dR_\eta, \quad E_a = \int_{-\xi_s/2}^{\xi_s/2} \int_{-\eta_s/2}^{\eta_s/2} |A(R_\xi, R_\eta)|^2 dR_\xi dR_\eta.$$

混淆误差通常被表示成等效的信噪比 a_{SNR}

$$a_{SNR} = -10 \log(\phi) = -10 \log(E_a/E_R) \tag{16}$$

2) 实验仿真

图 4 是上述关系的一个例证。图 4(a) 为原目标图像, 是非周期的复杂自然景物图像, 由 256×256 个像素(pixel) 组成。图 4(b)、图 4(c) 分别是抽样频率 $\xi_s(\eta_s)$ 等于 $1/2(\text{pixel}^{-1})$ 、 $1/3(\text{pixel}^{-1})$ 时的抽样图像。比较图 4(a)、图 4(b) 和图 4(c) 可知, 随着抽样频率的减少, 混淆程度增加, 图像质量下降, 尤其图 4(c) 已引起视觉不舒适: 虽然没有莫尔条纹, 但依然能体会到混淆造成图像的不真实感, 如房檐由直线变成了锯齿状。图 4(d) 为从图 4(c) 分离出来的 $f_l(\mathbf{r})$, 由于重建系统的低通滤波作用, 图像较原目标图像模糊, 但它终究是“清爽”的。因为没有高频的干扰, 低频都得到了很好体现。图 4(e) (为了容易观察, 已做了图像增强处理)

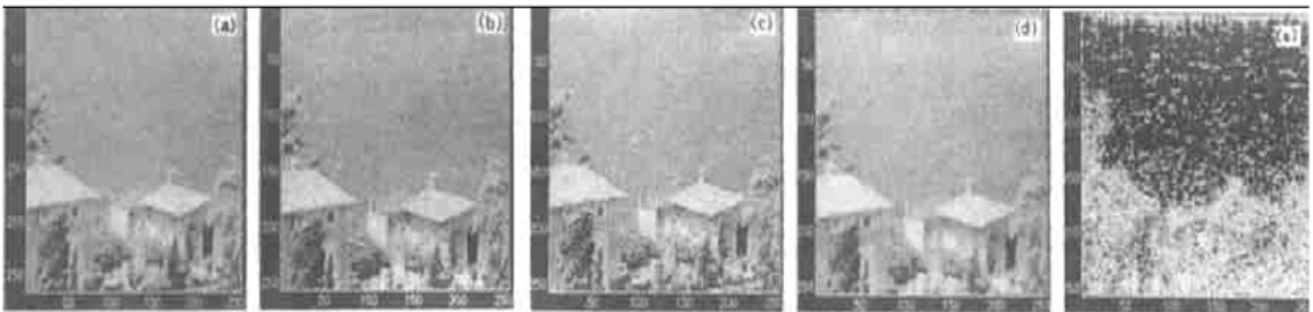


Fig. 4 (a) a non-periodic object (b) under-sampled image with $\xi_s(\eta_s) = 1/2(\text{pixel}^{-1})$ (c) under-sampled image with $\xi_s(\eta_s) = 1/3(\text{pixel}^{-1})$ (d) ideal low-pass filtered image with $\xi_s(\eta_s) = 1/3(\text{pixel}^{-1})$ (e) aliased component image with $\xi_s(\eta_s) = 1/3(\text{pixel}^{-1})$

为图 4(c) 的混淆噪声项 $a(\mathbf{r})$, 是明显的高频产物。例如湖水整体上属于低频, 所以湖水大体能足够抽样而不引入混淆, 图中该处的基色呈黑色; 但湖水中的水波却是高频成分, 混淆难以避免, 因此在黑基色上能看到杂乱的亮纹。注意: 图 4(c) 等于图 4(d) 与图 4(e) 增强前的图像之和; 并且, 为了便于比较, 图 4(b)~ 图 4(e) 分别由原来的 128×128 和 85×85 个像素傅里叶插值成 256×256 个像素。

图 5 是图 4(a) 目标图像在不同抽样频率下的信噪比 a_{SNR} 曲线。如图 4(b) 和图 4(c) 的 a_{SNR} 分别为 63.2 dB

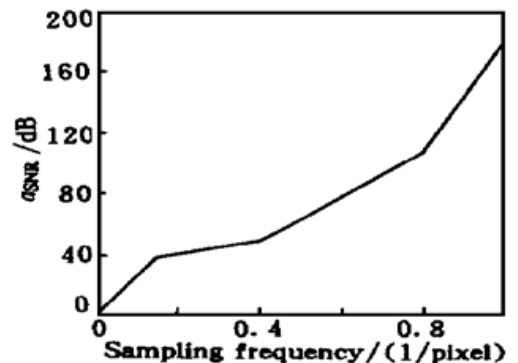


Fig. 5 Aliasing signal-to-noise energy ratio as a function of sampling frequency

和 47.7 dB。从曲线可知,提高抽样频率是减少混淆误差的根本办法。图 4(b) (抽样频率等于 $1/2(\text{pixel}^{-1})$) 质量高于图 4(c) (抽样频率等于 $1/3(\text{pixel}^{-1})$),也证实了这一点。

结 论 通过对光电成像系统混淆效应的详细分析,有助于全面了解欠抽样对成像的具体影响。定量的评估工作,对于混淆效应的后续研究,无论是对其抑制^[5]还是利用^[2, 6],都可以提供确切的先验认识,所以实用价值是广泛的。

参 考 文 献

- [1] 加斯基尔 J D., 封开印译,线性系统·傅里叶变换·光学. 北京:人民教育出版社,1981. 270~ 289
- [2] Bell B W, Koliopoulos C L. Moire topography, sampling theory, and charged-coupled devices. *Opt. Lett.*, 1984, **9**(5): 171~ 173
- [3] Biberman L M (ed). Perception of Displayed information. New York: Plenum Press, 1973, 1~ 20
- [4] Pratt W K. Digital image processing. New York: Willey-interscience Pub., 1991. 267~ 285
- [5] 张海涛,赵达尊. 用瞳函数控制减小成像系统中的频谱混淆. 光学学报, 1999, **19**(3): 289~ 294
- [6] Harrop P J. Smart printing technology for counterfeit deterrence. *Proc. SPIE*, 1996, **2659**: 97~ 98

Quantitative Analysis of Aliasing Effects in Opto-Electric Imaging Systems

Zhang Haitao Zhao Dazun

(Color Science and Engineering Lab., Department of Optical Engineering,
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

(Received 21 July 1998; revised 18 September 1998)

Abstract In opto-electric imaging systems, aliasing will occur when sampling a scene containing spatial frequencies exceeding half of the sampling frequency. By the use of vector analysis method, a quantitative aliasing expression for an sinusoidal elementary image is given. Moire effect as an aliasing phenomenon of periodic objects and aliasing contents as signal dependent noise of non-periodic objects are analysed. Computer simulations are presented for both cases.

Key words opto-electric imaging system, Fourier transform, sampling, aliasing, Moire patterns.