

# 叠加 $q$ -相干态的量子统计性质\*

刘友文<sup>1), 2)</sup> 陈昌远<sup>1)</sup>

1), 盐城师范学院物理系, 盐城 224002  
2), 中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800

**摘 要** 构造了叠加  $q$ -相干态, 研究了它的压缩和反聚束效应等量子统计性质, 用数值计算的方法讨论了叠加系数、变形参数对统计性质的影响。奇偶  $q$ -相干态作为特例包含在本文的一般结论之中。

**关键词** 叠加  $q$ -相干态, 压缩性质, 反聚束效应。

## 1 引 言

自从 1989 年 Biedenharn<sup>[1]</sup> 将具有李群结构的相干态推广到具有量子群结构的  $q$ -相干态以来,  $q$ -相干态就受到人们广泛关注<sup>[2-6]</sup>, 并在物理学的许多领域展现出广泛的应用前景。将奇偶相干态与量子群联系起来得到的奇偶  $q$ -相干态<sup>[7-9]</sup> 也具有重要的意义, 它的非经典性质明显地受参数  $q$  值的影响<sup>[10]</sup>。这表明用量子群研究光场能更深刻地揭示光场的性质。

由于奇偶相干态可表示为两个位相相反的相干态的叠加, 而后者又是相干态的叠加态的特例<sup>[11]</sup>。本文将上述理论推广到  $q$ -相干态中去, 目的在于构造以奇偶  $q$ -相干态为特例的一般叠加  $q$ -相干态, 并用数值计算的方法讨论它所具有的非经典特性, 阐明叠加系数、变形参数对压缩效应和反聚束效应的影响。奇偶  $q$ -相干态的有关结果作为特例包含在本文的一般结论之中。

## 2 叠加 $q$ -相干态

按照文献[11, 12]的想法, 定义叠加  $q$ -相干态为

$$|\alpha, \theta\rangle_q = C[|\alpha\rangle_q + \exp(i\theta)|-\alpha\rangle_q] \quad (1)$$

式中  $C$  为归一化常数,

$$|\alpha\rangle_q = (e_q^{|\alpha|^2})^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]!}} |n\rangle_q \quad (2)$$

而  $e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$  为  $q$  指数函数,  $|n\rangle_q$  是  $q$  变形谐振子的本征态, 它与谐振子的本征态是一致的<sup>[13]</sup>。 $|\alpha\rangle_q$  为  $q$  湮灭算符  $a_q$  的本征态, 称为  $q$ -相干态, 满足

$$a_q |\alpha\rangle_q = \alpha |\alpha\rangle_q \quad (3)$$

\* 江苏省教委自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1998-09-29; 收到修改稿日期: 1998-11-09

$q$ -相干态归一但不正交, 满足

$${}_q \langle \alpha | \beta \rangle_q = e_q^{\alpha^* \beta} (e_q^{|\alpha|^2})^{-\frac{1}{2}} (e_q^{|\beta|^2})^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

由于,  $[n]! = [n][n-1]\cdots[1]$ , 且  $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ , 因此, 不难看出, 当  $q \rightarrow 1$  时, (2) 式退化为相干态的表达形式, (4) 式退化为格劳贝尔(Glauber)公式。利用(4)式可算出归一化常数

$$C = \{2[1 + \cos \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}]\}^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

把(2)式和(5)式代入(1)式, 并取  $\theta = 0$ , 则得

$$\begin{aligned} |\alpha, 0\rangle &= \{2[1 + e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}]\}^{-\frac{1}{2}} [(e_q^{|\alpha|^2})^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]!}} |n\rangle_q + (e_q^{|\alpha|^2})^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{[n]!}} |n\rangle_q] = \\ &(\cosh_q |\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]!}} |2n\rangle_q = |\alpha\rangle_{qc} \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\cosh_q x$  为  $q$  双曲余弦函数。

由此可见, 偶  $q$ -相干态是  $q$ -相干态的叠加态中  $\theta = 0$  的特例。同理可证, 奇  $q$ -相干态是叠加  $q$ -相干态中  $\theta = \pi$  的特例, 即有  $|\alpha, \pi\rangle = |\alpha\rangle_{q0}$ 。

### 3 叠加 $q$ -相干态的压缩性质

类似于通常单模电磁场压缩的定义, 引入  $q$  电磁场的  $q$  压缩概念<sup>[8, 10]</sup>(以下仍简称压缩)。 $q$  电磁场的两个正交分量由  $q$  湮灭算符  $a_q$  和  $q$  产生算符  $a_q^+$  表示为

$$w_1 = \frac{a_q^+ + a_q}{2}, \quad w_2 = i \frac{a_q^+ - a_q}{2} \quad (7)$$

$w_1$  和  $w_2$  满足如下的对易关系和测不准关系

$$[w_1, w_2] = i \frac{[a_q, a_q^+]}{2} \quad (8)$$

$$\Delta w_1^2 \Delta w_2^2 \geq \frac{1}{16} \{[a_q, a_q^+]\}^2 \quad (9)$$

如果存在不等式

$$\Delta w_i^2 - \frac{1}{4} \{[a_q, a_q^+]\} < 0, \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

则称  $w_i$  分量存在  $q$  压缩。

由于

$$\left. \begin{aligned} {}_q \langle \alpha, \theta | a_q | \alpha, \theta \rangle_q &= -i2\alpha C^2 \sin \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}, & {}_q \langle \alpha, \theta | a_q^2 | \alpha, \theta \rangle_q &= \alpha^2 \\ {}_q \langle \alpha, \theta | a_q^+ | \alpha, \theta \rangle_q &= i2\alpha^* C^2 \sin \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}, & {}_q \langle \alpha, \theta | a_q^{+2} | \alpha, \theta \rangle_q &= \alpha^{*2} \\ {}_q \langle \alpha, \theta | a_q^+ a_q | \alpha, \theta \rangle_q &= 2|\alpha|^2 C^2 [1 - \cos \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}], & {}_q \langle \alpha, \theta | a_q^{+2} a_q^2 | \alpha, \theta \rangle_q &= |\alpha|^4 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

于是由上式得

$$\Delta w_i^2 - \frac{1}{4} \{[a_q, a_q^+]\} = \frac{1}{2} |\alpha|^2 (1 + A)(\pm \cos 2\psi + B), \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

式中

$$A = \left[ \frac{\sin \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}}{1 + \cos \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}} \right]^2 \quad (13)$$

$$B = \frac{1 - (e_q^{-|\alpha|^2})^2 (e_q^{|\alpha|^2})^{-2}}{1 + (e_q^{-|\alpha|^2})^2 (e_q^{|\alpha|^2})^{-2} + 2 \cos \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}} \quad (14)$$

$\psi$  为  $\alpha$  的辐角, 即有  $\alpha = |\alpha| \exp(i\psi)$ ; “ $\ddagger$ ” 对应于  $i = 1$ , “ $\ddot{\ddagger}$ ” 对应于  $i = 2$  (下同)。因为  $A$  为正值, 由(12) 式可知, 若  $B < 1$ , 只要适当选择  $\psi$ , 则叠加  $q$ -相干态存在压缩效应。

由于  $q$  指数函数的复杂性( $e_q^{-|\alpha|^2}$  并不是单调函数, 存在零点)<sup>[14]</sup>, 需数值计算  $B$  的值。图 1 分别给出  $q = 0.5, 0.3, 0.1$  三种情况下,  $B$  随  $x = |\alpha|^2$  的变化曲线, 曲线 1 ~ 5 分别对应  $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ 。

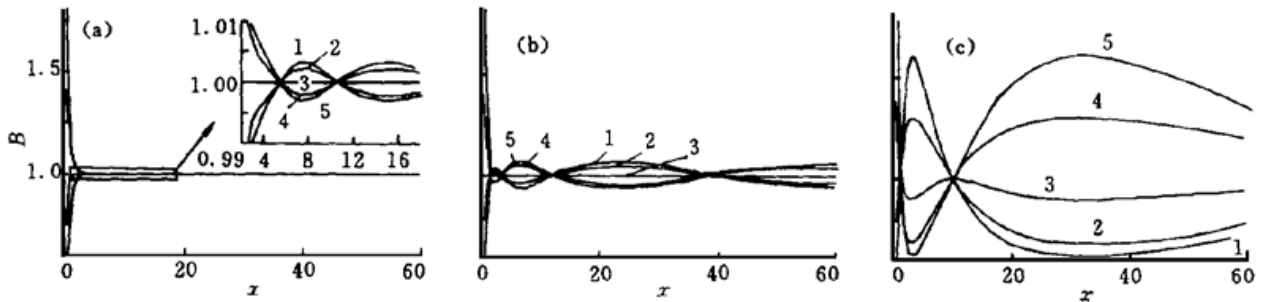


Fig. 1 Variations of  $B$  with  $x = |\alpha|^2$ , (a)  $q = 0.5$ , (b)  $q = 0.3$ , (c)  $q = 0.1$

从图中可以看出:

1) 对所有的  $\theta$ , 选取适当的  $\psi$ ,  $x = |\alpha|^2$  在不同的范围内均可表现出压缩效应。例如,  $q = 0.3, \psi = \pi/2, 0 \leq \theta < \pi/2$  时,  $w_1$  分量在  $3.5 < |\alpha|^2 < 12.1$  范围内表现为压缩效应;  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  时,  $w_1$  分量在  $1.7 < |\alpha|^2 < 3.5$  范围内表现为压缩效应。对于确定的  $\psi$ , 不同的  $\theta$  所对应的压缩范围不一样。若  $\psi = \pi/2, \cos 2\psi = -1, 0 \leq \theta < \pi/2$  和  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  对应的压缩范围基本上是互补的( $B = 1$  对应于  $e_q^{-|\alpha|^2}$  的零点, 与  $\theta$  无关)。

2) 对于一定的  $q, \theta, \alpha$  的幅角  $\psi$  取值不一样, 叠加态表现为压缩效应的  $|\alpha|^2$  的取值范围不一样。

3) 对于一定的  $\theta, \psi$ , 变形参数  $q$  较大时(例如  $q = 0.5$ ),  $B$  迅速收敛于 1; 当  $q \rightarrow 1$ , 振荡消失,  $\theta$  为 0 或  $\pi$ , 则对应于偶奇相干态; 当  $q$  较小时(例如  $q = 0.1$ ), 随  $x$  的增大, 各态对应的  $B$  值将在较大范围内呈现一定的周期性振荡, 其收敛性变坏。随  $q$  偏离 1 越远, 振荡幅度越大, 周期越大(由于用  $q^{-1}$  替代  $q, [n]$  不变, 因此只需考虑  $q$  从 0 到 1 的变化)。这说明了  $q$  越小,  $q$  变形系统的量子特征越明显,  $q$  叠加态的量子性越显著。这从一个侧面反映参数  $q$  包含的物理意义。

4) 当  $\theta = 0$  时,  $A = 0, B = \tanh_q |\alpha|^2$ , 于是(12) 式退化为偶  $q$ -相干态的压缩情况<sup>[8, 10]</sup>

$$\Delta w_i^{\ddagger} - \frac{1}{4} [a_q, a_q^{\ddagger}] = \frac{1}{2} |\alpha|^2 (\pm \cos 2\psi + \tanh_q |\alpha|^2), \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

当  $\theta = \pi$  时,  $A = 0, B = \coth_q |\alpha|^2$ , 于是(12) 式退化为奇  $q$ -相干态的压缩情况<sup>[8, 10]</sup>

$$\Delta w_i^{\ddot{\ddagger}} - \frac{1}{4} [a_q, a_q^{\ddot{\ddagger}}] = \frac{1}{2} |\alpha|^2 (\pm \cos 2\psi + \coth_q |\alpha|^2), \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

由此可见, 叠加  $q$  相干态的压缩情况包括了奇偶  $q$ -相干态的压缩, 它们的  $B$  分别对应图 1 中的曲线 5 和 1。也就是说, 本文的结论具有普遍性, 奇偶  $q$ -相干态作为特例而包含在其中。

### 4 叠加 $q$ -相干态的反聚束效应

对于通常的电磁场,若归一的二阶相关函数<sup>[15]</sup>  $g^{(2)}(0) < 1$ ,则称电磁场呈现反聚束效应。类似地,对于  $q$  电磁场,亦可引入其二阶相关函数<sup>[8, 10]</sup>

$$g_q^{(2)}(0) = \frac{{}_q \langle a_q^{+2} a_q^2 \rangle_q}{{}_q \langle a_q^+ a_q \rangle_q^2} \tag{17}$$

对于叠加  $q$ -相干态,由(11)式得

$$g_q^{(2)}(0) = \left[ \frac{1 + \cos \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}}{1 - \cos \theta e_q^{-|\alpha|^2} (e_q^{|\alpha|^2})^{-1}} \right]^2 \tag{18}$$

数值计算了  $g_q^{(2)}(0)$ ,如图 2 所示。图 2 中(a), (b), (c) 分别对应于  $q = 0.5, 0.3, 0.1$ , 曲线 1 ~ 5 分别对应  $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ 。从图中可以得出与讨论压缩性质类似的结论。

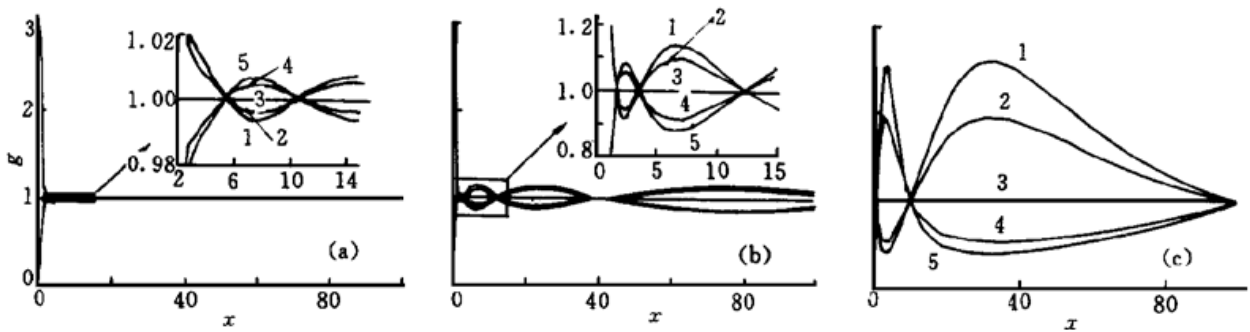


Fig. 2 Variations of  $g_q^{(2)}(0)$  with  $x = |\alpha|^2$ , (a)  $q = 0.5$ , (b)  $q = 0.3$ , (c)  $q = 0.1$

1) 对所有的  $\theta$ , 叠加  $q$ -相干态在  $x = |\alpha|^2$  不同的范围内均可表现出压缩效应,且  $0 \leq \theta < \pi/2$  与  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  存在反聚束效应所对应的  $|\alpha|^2$  的取值范围是互补的。这一点从(18)式也很容易看出。

2) 随  $q$  的减少,  $g_q^{(2)}(0)$  的振荡加剧,  $q$  越远离 1,  $g_q^{(2)}(0)$  振荡幅度越大, 周期越大;  $q$  越接近 1, 随  $|\alpha|^2$  的增大,  $g_q^{(2)}(0)$  迅速收敛于 1; 当  $q \rightarrow 1$ , 振荡消失, 此时  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$  才表现为反聚束效应。

3) 当  $\theta = 0, \pi$  时, (18) 式退化为

$$g_q^{(2)} = \begin{cases} (\coth_q |\alpha|^2)^2, & \theta = 0 \\ (\tanh_q |\alpha|^2)^2, & \theta = \pi \end{cases} \tag{19}$$

这就回到了人们最初对偶奇  $q$ -相干态所得到的结果<sup>[8, 10]</sup>。其二阶相干度的变化对应于图 2 中的曲线 5 和曲线 1。

**结 论** 本文把叠加态的概念由普遍的相干态推广到  $q$ -相干态, 构造出了叠加  $q$ -相干态。由于  $q$  指数函数的复杂性, 利用数值计算方法研究了它的压缩性质和反聚束效应, 阐明了压缩性质和反聚束效应与叠加系数、变形参数间的关系。计算表明, 只要适当选择其它参数, 叠加  $q$ -相干态对任何  $\theta$  都可表现压缩和反聚束效应, 叠加系数  $\theta$  和变形参数  $q$  对叠加  $q$ -相干态存在的压缩和反聚束效应的强度和  $|\alpha|^2$  的取值范围有十分明显的影响。本文的结论具有普遍性, 奇偶  $q$ -相干态作为特例包含在这普遍的结论之中。

## 参 考 文 献

- [1] Biedenharn L C. The quantum groups  $SU(2)$  and a  $q$ -analogue of the operators. *J. Phys. (A)*, 1989, **22**(18) : L873~ L878
- [2] Sun C P, Fu H C. The  $q$ -deformed boson realization of the quantum groups  $SU(2)$  and its representation. *J. Phys. (A)*, 1989, **22**(21) : L983~ L986
- [3] Chaichiu M, Ellinas D, Kullish P. Quantum algebra as the dynamical symmetry of the deformed Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(8) : 980~ 983
- [4] Quesne C. Coherent states,  $K$ -matrix theory and  $q$ -boson realization of the quantum algebra  $SU(2)$ . *Phys. Lett. (A)*, 1991, **153**(6/7) : 303~ 307
- [5] Kuang L M, Wang F B. The  $SU(1, 1)$   $q$ -coherent states and their nonclassic properties. *Phys. Lett. (A)*, 1993, **173**(3) : 221~ 227
- [6] 郝三如.  $q$  变形量子振子的 Glauber 相干态. 物理学报, 1993, **42**(7) : 1057~ 1062
- [7] Wang F B, Kuang L M. Even and odd  $q$ -coherent state representations of the quantum Heisenberg-Weyl algebra. *Phys. Lett. (A)*, 1992, **169**(4) : 225~ 228
- [8] Wang F B, Kuang L M. Even and odd  $q$ -coherent states and their optical statistics properties. *J. Phys. (A)*, 1993, **26**(2) : 293~ 300
- [9] 韦联福.  $q$ -玻色湮灭算符二次方的本征态. 物理学报, 1993, **42**(5) : 757~ 761
- [10] 朱从旭, 王发伯, 匡乐满. 关于奇偶  $q$ -相干态的非经典特性. 物理学报, 1994, **43**(8) : 1262~ 1267
- [11] Buzek V, Vidiella-Barranco A, Knight P L *et al.*. Superpositions of coherent states : squeezing and dissipation. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9) : 6570~ 6585
- [12] Ban M. Superpositions of the  $SU(1, 1)$  coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **193**(2) : 121~ 125
- [13] 陈昌远, 周荣秋.  $q$  变形振子的双波函数描述. 量子光学学报, 1998, **4**(2) : 119~ 124
- [14] Nelson C A, Gartley M G. On the zeros of the  $q$ -analogue exponential function. *J. Phys. (A)*, 1994, **27**(11) : 3857~ 3881
- [15] Walls D F. Squeezed states of light. *Nature*, 1983, **306**(5939) : 141~ 146

Quantum Statistic Properties of the Superposition of the  $q$ -Coherent StatesLiu Youwen<sup>1), 2)</sup>      Chen Changyuan<sup>1)</sup>

1), Department of Physics, Yancheng Teachers College, Yancheng 224002  
 2), Shanghai Institute of Optical and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800

(Received 29 September 1998; revised 9 November 1998)

**Abstract** The superposition of the  $q$ -coherent states is constructed, and its quantum statistic properties (squeezing effect, antibunching effect) are discussed. The effects of the superposition coefficient and deformed parameter on these quantum statistic properties are studied with the aid of numerical calculation. The relevant results of the even and odd  $q$ -coherent states are contained in more general conclusion of this paper as special cases.

**Key words** superposition of the  $q$ -coherent states, squeezing property, antibunching effect.