

# 倍增噪声和饱和效应对环形激光场 动力学性质的影响

冷 锋 朱士群

(苏州大学物理科学与技术学院, 苏州 215006)

**摘 要** 用一维近似的方法求得了同时存在倍增噪声和饱和效应的双向环形激光场含时几率密度函数, 讨论了倍增噪声和饱和效应对表征激光场动力学性质的两个重要物理量——光场强度相关时间和有效本征值的影响。

**关键词** 双向环形激光, 倍增噪声, 饱和效应, 强度相关时间, 有效本征值。

## 1 引 言

由于双向环形激光器的动力学特性及其在激光回转仪中的广泛应用, 双向环形激光场的动力学行为引起了人们广泛的兴趣。近几年来, 同激光场动力学性质紧密相关的两个物理量显得尤为重要, 因为这两个物理量可以由实验测量。一个是强度相关时间, 定义为归一化的强度相关函数下的面积。另一个是有效本征值, 定义为归一化的强度相关函数的初始斜率。在传统的双模激光理论模型中, 人们往往只考虑加性量子噪声的作用而忽略了倍增抽运噪声的作用。但是, 实验证明<sup>[1~3]</sup>, 环境扰动对激光的统计性质有着重要影响, 因而同时考虑加性和倍增噪声的理论模型更接近实际情况。本文从同时含有倍增噪声和全饱和效应的双向环形激光的理论模型出发, 通过一维近似的方法<sup>[4]</sup>, 得到了激光场的含时几率密度函数, 求出强度相关时间和有效本征值, 并分别讨论了倍增噪声强度和饱和效应对这两个量的影响。最后将全饱和模型得到的结果与三次模型得到的结果进行了比较, 进一步说明三次模型是全饱和模型在一定条件下的近似。

## 2 理论分析

对于非均匀展宽的双模环形气体激光器, 传统的含有加性量子噪声的三次激光理论模型的复电场  $E_1(t)$  和  $E_2(t)$  服从朗之万方程<sup>[5]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= a_1 E_1 - |E_1|^2 E_1 - |E_2|^2 E_1 + q_1(t) \\ \frac{dE_2}{dt} &= a_2 E_2 - |E_2|^2 E_2 - |E_1|^2 E_2 + q_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $a_1$  和  $a_2$  分别是两个模式的抽运参量,  $q_i(t)$  是由原子的自发跃迁引起的加性量子噪声。由

于环境扰动的影响,有必要在激光理论模型中引进倍增抽运噪声。同时考虑到饱和效应的作用,这时激光场服从下列方程<sup>[6]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= -K_1 E_1 + \frac{FE_1}{1 + (|E_1|^2 + |E_2|^2)/F} + p(t)E_1 + q_1(t) \\ \frac{dE_2}{dt} &= -K_2 E_2 + \frac{FE_2}{1 + (|E_1|^2 + |E_2|^2)/F} + p(t)E_2 + q_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $K_1$  和  $K_2$  分别是双模的空腔衰减常数,  $F$  为增益参量,且满足  $a_i = F - K_i (i = 1, 2)$ 。 $p(t)$  是与抽运源和环境扰动有关的倍增抽运噪声。它们的统计性质可以由一次矩和二次矩表示为

$$\left. \begin{aligned} \langle \dot{q}_i(t) \rangle &= \langle \dot{p}(t) \rangle = 0, \\ \langle \dot{q}_i^*(t) q_j(t') \rangle &= 2P \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (i, j = 1, 2) \\ \langle \dot{p}^*(t) p(t') \rangle &= 2P' \delta(t - t'), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这里,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ ,  $\delta(t - t')$  是  $\delta$ -函数,  $P$  和  $P'$  分别是加性和倍增噪声的强度。注意到将(2)式右边的二项式展开保留到含有  $|E_1|^2$  和  $|E_2|^2$  的项就得到含有抽运噪声的三次激光理论模型<sup>[7]</sup>。

在极坐标下将光场  $E_1(t)$ 、 $E_2(t)$  变换成  $r_1 \exp(i\mathcal{Q})$ 、 $r_2 \exp(i\mathcal{Q})$ , 激光场的含时几率密度可表示为  $Q(r_1, r_2; \mathcal{Q}, \mathcal{Q}; t)$ 。对光场相位  $\mathcal{Q}$  和  $\mathcal{Q}$  积分后,可将光场振幅  $r_1$  和  $r_2$  的含时几率密度表示为

$$Q(r_1, r_2, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r_1, r_2; \mathcal{Q}, \mathcal{Q}; t) d\mathcal{Q} d\mathcal{Q},$$

则对应于朗之万方程(1)和(2)的双模激光场振幅的几率密度  $Q(r_1, r_2, t)$  满足福克-普朗克方程<sup>[8]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(r_1, r_2, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial r_1} \{ F_1(r_1, r_2) Q(r_1, r_2, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_2} [ D_{12}(r_1, r_2) Q(r_1, r_2, t) ] - \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_1} [ D_{11}(r_1, r_2) Q(r_1, r_2, t) ] \} - \frac{\partial}{\partial r_2} \{ F_2(r_1, r_2) Q(r_1, r_2, t) - \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_1} [ D_{21}(r_1, r_2) Q(r_1, r_2, t) ] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_2} [ D_{22}(r_1, r_2) Q(r_1, r_2, t) ] \} \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $r_1 = \sqrt{I_1}$ ,  $r_2 = \sqrt{I_2}$  为两个光场的振幅,其中  $I_1 = |E_1|^2$ ,  $I_2 = |E_2|^2$  为对应于模式1和模式2的光场强度。对于全饱和激光模型,有

$$\left. \begin{aligned} F_{1s}(r_1, r_2) &= -K_1 r_1 + \frac{F r_1}{1 + (r_1^2 + r_2^2)/F} + \frac{P}{2r_1} + \frac{P'}{2} r_1 \\ F_{2s}(r_1, r_2) &= -K_2 r_2 + \frac{F r_2}{1 + (r_1^2 + r_2^2)/F} + \frac{P}{2r_2} + \frac{P'}{2} r_2 \\ D_{12s}(r_1, r_2) &= D_{21s}(r_1, r_2) = P' r_1 r_2 \\ D_{11s}(r_1, r_2) &= P + P' r_1^2 \\ D_{22s}(r_1, r_2) &= P + P' r_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

同(1)式相对应的传统环形激光模型所满足的方程(4)中,  $F_i(r_1, r_2)$ 、 $D_{ij}(r_1, r_2)$  的表达式已在文献[5]详细推导,故略去。

对满足全饱和模型(5)式的方程(4)两边的振幅  $r_2$  积分,得到相应的关于振幅  $r_1$  的一维福

克-普朗克方程:

$$\frac{\partial Q(r_1, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial r_1} [f(r_1) Q(r_1, t)] + \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \left[ \left( \frac{P + P' r_1^2}{2} \right) Q(r_1, t) \right] \quad (6)$$

其中

$$f_s(r_1) = -K r_1 - r_1 G_s(r_1) + \frac{P'}{2} r_1 + \frac{P}{2 r_1} \quad (7)$$

$$G_s(r_1) = \frac{(r_1^2 + P/P') {}_2F_1[\gamma, 2; \gamma + \eta; 1 - (r_1^2 + P/P')/(r_1^2 + F)]}{F_1[\gamma, 1; \gamma + \eta; 1 - (r_1^2 + P/P')/(r_1^2 + F)]} \quad (8)$$

这里的  $F_1(\omega_1, \omega_2; b_1; x)$  是合流超几何函数, 其表达式为<sup>[9]</sup>

$$F_1(\omega_1, \omega_2; b_1; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\omega_1 + m) \Gamma(\omega_2 + m) \Gamma(b_1) x^m}{\Gamma(\omega_1) \Gamma(\omega_2) \Gamma(b_1 + m) m!} \quad (9)$$

(6) 式的通解形式为

$$Q(r_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{Q_s(r_1)} \Psi_n(r_1) \exp(-\lambda_n t) \quad (10)$$

式中  $C_n$  是同第  $n$  个本征值和本征函数相对应的展开系数,  $Q_s(r_1)$  为一维定态几率密度函数。一般情况下, 由全饱和模型(5) 式所描述的方程(4) 不存在定态解析解, 但是, 当两模的空间衰减常数相等( $K_1 = K_2$ ), 即等抽运时, 可以求得方程(4) 和(5) 全饱和模型的定态解析解<sup>[6]</sup>:

$$Q_{ss}(r_1, r_2) = N_s (r_1^2 + r_2^2 + F)^{-\gamma} (r_1^2 + r_2^2 + P/P')^{-\eta} \quad (11)$$

同三次激光模型(1) 式对应的(4) 式的三次激光模型的定态解很容易求得<sup>[5]</sup>:

$$Q_{sc}(r_1, r_2) = N_c \exp \left[ \frac{1}{2} a_1 r_1^2 + \frac{1}{2} a_2 r_2^2 - \frac{1}{4} r_1^4 - \frac{1}{4} r_2^4 - \frac{1}{2} r_1^2 r_2^2 \right] \quad (12)$$

式中,  $N_s$ 、 $N_c$  分别表示全饱和模型和三次模型定态解中的归一化常数, 且有:

$$\gamma = F^2/(FP' - P), \quad \eta = K/P' + 2 - \gamma \quad (13)$$

经过适当的数学变换后, 可得含  $r_1$  的激光场波函数的运动方程<sup>[8]</sup>:

$$\frac{1}{2} (P + P' r_1^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dr_1^2} + [\lambda_n - V(r_1)] \Psi_n = 0 \quad (14)$$

式中的  $\lambda_n$  为  $n$  阶本征值,  $\Psi_n$  为  $n$  阶波函数。  $V(r_1)$  为势函数, 其具体表达式为

$$V_s(r_1) = \frac{1}{2} \left[ -K + G_s(r_1) + r_1 W_s(r_1) + \frac{P'}{2} - \frac{P}{2 r_1^2} \right] + \frac{[-K r_1 + r_1 G_s(r_1) + \frac{P'}{2} r_1 + \frac{P}{2 r_1}]^2 - 2 P' r_1 [-K r_1 + r_1 G_s(r_1) + \frac{P'}{2} r_1 + \frac{P}{2 r_1}]}{2(P + P' r_1^2)} \quad (15)$$

其中  $G_s(r_1)$  由(8) 式表示,  $W_s(r_1) = dG_s(r_1)/dr_1$ 。

(14) 式具有类似于径向薛定谔方程的形式, 可以进行数值求解。实验上有两个可以检测激光场动力学性质的物理量, 一个是强度相关时间  $T_c$ , 另外一个有效本征值  $\lambda_{\text{eff}}$ , 其定义分别为

$$T_c = \frac{\int_0^{\infty} \mu_{11}(\tau) d\tau}{\mu_{11}(0)} = \frac{1}{\mu_{11}(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{\lambda_n} = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (v_n/\lambda_n) \right] / \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (16)$$

和

$$\lambda_{\text{eff}}^{11} = \frac{1}{\mu_{11}(0)} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \lambda_n = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \lambda_n \right] / \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (17)$$

其中  $\mu_{11}(\tau)$  是不同时间间隔的强度相关函数, 其定义为

$$\mu_{11}(\tau) = [ \langle I_1(t)I_1(t + \tau) \rangle / \langle I_1(t) \rangle^2 ] - 1 = \frac{1}{\nu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \exp(-\lambda_n \tau) \quad (18)$$

式中

$$\nu_n = \left| \int_0^{\infty} r_1 r_2^2 \Psi_0(r_1) \Psi_n(r_2) / [(P + P' r_1^2) / 2] \right|^2 \quad (19)$$

而  $\mu_{11}(0) = \langle I_1(t)^2 \rangle / \langle I_1(t) \rangle^2 - 1$  是同模式 1 相对应的激光强度  $I_1$  的方差。这样, 就可以用数值法求得强度相关时间  $T_c$  和有效本征值  $\lambda_{\text{eff}}$ 。另外, 由朗之万方程(2) 式作一简单变换, 并考虑(2) 式中各种噪声的性质, 可以求得有效本征值  $\lambda_{\text{eff}}^{11}$  的精确表达式:

$$\lambda_{\text{eff}}^{11} = [2P' \langle I_1^2 \rangle + 2P \langle I_1 \rangle] / [\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2] \quad (20)$$

式中光强  $I_1$  的  $n$  次幂的期望值为

$$\langle I_1^n \rangle = \iint Q_s(I_1, I_2) I_1^n dI_1 dI_2 \quad (21)$$

注意到由(17) 式和(20) 式求出的有效本征值是相同的, 其误差在曲线线宽范围以内。这意味着用一维近似的方法来分析强度相关时间和有效本征值误差极小。用同样的方法可以求出同(1) 式相对应的传统环形激光模型的强度相关时间和有效本征值。

### 3 抽运噪声和饱和效应

抽运噪声和全饱和效应对环型激光场动力学性质的影响, 可以从强度定态分布函数以及强度相关时间和有效本征值的变化看出来。图 1 是由(11) 式和(12) 式得到的两维定态光强几率分布。从图 1(a)~ 图 1(c) 可以看出, 对三次模型, 当激光工作在低于阈值或阈值附近时,

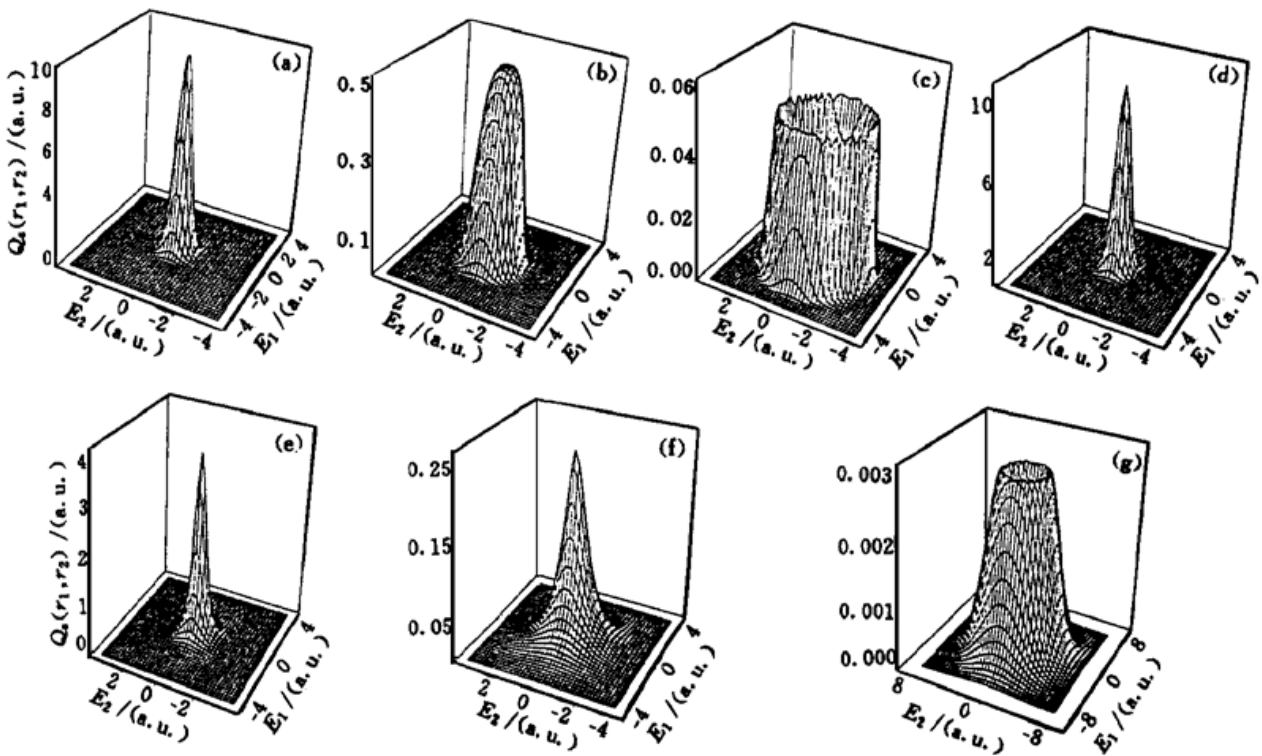


Fig. 1 Two-dimensional steady-state probability density  $Q_s(r_1, r_2)$ . (a) ~ (c) third-order laser model without pump noise with  $P = 2, P' = 0$ ; (a)  $a = -6$ ; (b)  $a = 0$ ; (c)  $a = 6$ ; (d) ~ (f) full saturation laser model with pump noise,  $P = 2, P' = 5.0, K = 30$ . (d)  $a = -6$ ; (e)  $a = 0$ ; (f)  $a = 6$ ; (g)  $a = 16$

两维定态几率密度分布呈较为简单的单峰结构, 几率密度的高度随抽运参量  $a$  的增加衰减很快, 峰的顶部趋向于平坦, 并逐渐出现凹陷, 而峰的底部向外扩展。特别当激光工作在略高于阈值时 ( $a = 6$ ), 两维定态几率密度分布的峰值由  $r_1 = r_2 = 0$  处移到  $r_1$  和  $r_2$  不为零处, 几率密度围绕中心呈桶状分布。从图 1(d)~图 1(f) 可以看出, 对全饱和模型, 几率密度分布函数的变化趋势与三次模型类似, 但是由于倍增噪声和饱和效应的作用, 使得几率密度分布函数变化较为缓慢, 当  $K = 30$  时, 桶状结构在抽运参量较大时 ( $a = 16$ ) 才开始出现。图 2(a) 和图 2(b) 是由全饱和理论得到的激光强度相关时间和有效本征值随不同的倍增噪声变化的情况。从图 2 可以看出, 当激光在远低于阈值工作时, 倍增噪声的强弱对强度相关时间  $T_c$  和有效本征值  $\lambda_{eff}^{(1)}$  的影响不大, 不同倍增噪声强度的  $T_c$  和  $\lambda_{eff}^{(1)}$  的曲线都很接近。当激光工作在阈值附近到远高于阈值时, 强度相关时间  $T_c$  的高度随着倍增噪声  $P'$  的增加而很快变小, 而有效本征值  $\lambda_{eff}^{(1)}$  随着倍增噪声  $P'$  的增加而增加很大, 这表明, 随着抽运噪声的增加, 激光强度相关函数随时间延迟的衰减越来越慢。当抽运噪声增加至一定的数值时, 在强度相关时间  $T_c$  的曲线上出现一峰值, 相应地在有效本征值  $\lambda_{eff}^{(1)}$  上出现一极小值。这表明, 当抽运噪声较大时, 激光强度相关函数随延迟时间的衰减在阈值附近较快, 而在远低于或远高于阈值时较慢。

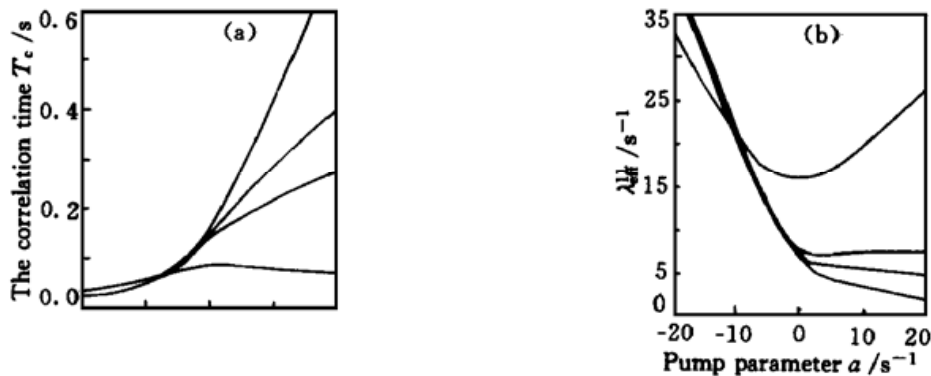


Fig. 2 The intensity correlation time  $T_c$  and the effective eigenvalue  $\lambda_{eff}^{(1)}$  as a function of parameter  $a$  for the full saturation laser model, with  $K = 30$ . (a)  $T_c$  with (from top to bottom)  $P' = 0.2, 0.6, 1.0, 5.0$ . (b)  $\lambda_{eff}^{(1)}$  with (from bottom to top)  $P' = 0.2, 0.6, 1.0, 5.0$

空间衰减常数  $K$  对强度相关时间  $T_c$  和有效本征值  $\lambda_{eff}^{(1)}$  的影响示于图 3 中, 从图 3 可以看出, 由全饱和理论所得到的  $T_c$  曲线总是高于三次模型, 而  $\lambda_{eff}^{(1)}$  曲线总是低于三次模型, 并且当空间衰减常数  $K$  增加时, 由全饱和理论所得到的  $T_c$  曲线向下移动, 而  $\lambda_{eff}^{(1)}$  曲线向上移动, 最

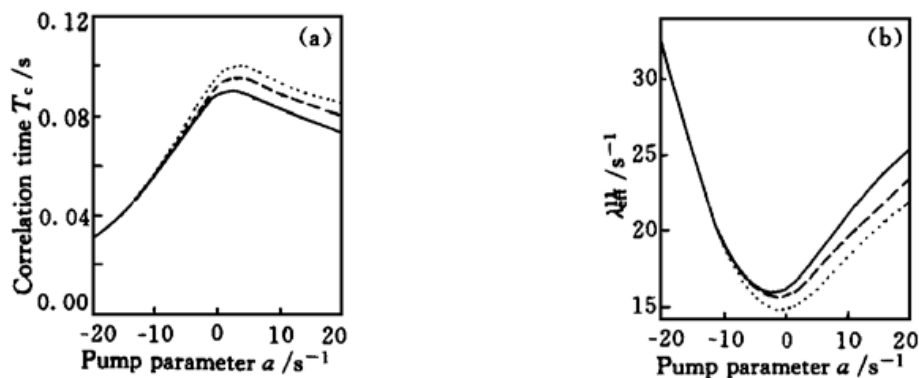


Fig. 3 The intensity correlation time  $T_c$  and the effective eigenvalue  $\lambda_{eff}^{(1)}$  as a function of the pump parameter  $a$ . The parameters are  $P = 2.0, P' = 5.0$ . —: third order laser model; - - -: full saturation laser model with  $K = 60$ ; ·····: full saturation laser model with  $K = 30$

后两曲线均接近三次模型, 这进一步说明了三次模型是全饱和模型在空间衰减常数  $K$  很大情况下的一级近似。

## 4 讨 论

由定态强度分布函数的形状变化可以看出, 对三次模型, 当激光器工作在低于阈值时, 定态强度分布函数的高度随抽运参量  $a$  的增加而减小, 而其宽度却随抽运参量  $a$  的增加而变宽, 相应地, 强度相关时间  $T_c$  随抽运参量  $a$  的增加而单调增加, 有效本征值  $\lambda_{eff}^{(1)}$  随抽运参量  $a$  的增加而单调减小<sup>[4]</sup>。当激光工作在阈值附近时, 随着抽运参量  $a$  的增加, 定态分布函数的顶部开始变平, 并逐渐出现凹陷直到最终呈筒状分布, 相应地, 在阈值附近强度相关时间  $T_c$  由缓慢上升变为迅速上升, 而有效本征值  $\lambda_{eff}^{(1)}$  则由单调下降变得较为平滑<sup>[4]</sup>。由图 1 和图 3 可以看出, 对全饱和模型, 由于倍增噪声和饱和效应的作用, 定态几率密度分布函数的变化较为缓慢, 到  $a = 16$  时才出现筒状分布, 因而相应的强度相关时间  $T_c$  和有效本征值  $\lambda_{eff}^{(1)}$  的拐点也就向右移动了。

## 参 考 文 献

- [1] Short R, Mandel L, Roy R. Correlation function of a dye laser: Comparison between theory and experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**(9) : 647~ 650
- [2] Kaminishi K, Roy R, Short R *et al.*. Investigation of photon statistics and correlation of a dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1981, **24**(1) : 370~ 378
- [3] Lett P, Short R, Mandel L. Photon statistics of a dye laser far below threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, **52**(5) : 341~ 343
- [4] Singh S. Statistical properties of single-mode and two-mode ring lasers. *Phys. Rep.*, 1984, **108**(4) : 217~ 273
- [5] M-Tehrani M, Mandel L. Coherence theory of the ring laser. *Phys. Rev. (A)*, 1978, **17**(2) : 677~ 700
- [6] Zhou Xiaoping, Gao Weijian, Zhu Shiqun. Saturation effects in a two-mode ring laser with both additive and multiplicative noise. *Phys. Lett. (A)*, 1996, **213**(1/2) : 43~ 48
- [7] Zhu Shiqun. Steady-state analysis of a two-mode laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(11) : 8148~ 8153
- [8] Risken H. *The Fokker-Planck Equation*, Berlin: Springer, 1984.
- [9] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series and Products*, New York: Academic Press, 1980.

## Influence of Multiplicative Noise and Saturation Effect on Dynamical Properties of a Ring Laser Field

Leng Feng      Zhu Shiqun

(School of Physics and Technology, Suzhou University, Suzhou 215006)

(Received 11 September 1998)

**Abstract** The time-dependent probability of a two-mode ring laser field including both multiplicative noise and full saturation effect is obtained by the method of one-dimensional approximation. The influences of multiplicative noise and saturation effect on the two important representative physical quantities of dynamical properties of laser field — intensity correlation time and effective eigenvalue are discussed.

**Key words** two-mode ring laser, multiplicative noise, saturation effect, intensity correlation time, effective eigenvalue.