

同轴圆筒波导激光器谐振腔的 耦合损失及模式特征

王又青 黄新堂 陈清明 徐启阳

(华中理工大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

摘 要 计算了同轴圆筒波导谐振腔的耦合损失, 结果表明存在三种低耦合损失谐振腔结构; 最后分析了谐振腔的模式特征及其设计方法。

关键词 同轴圆筒波导, 谐振腔, 耦合损失。

1 引 言

人们对波导激光器谐振腔已进行了深入的理论研究^[1~5]。谐振腔的损耗主要来源于光在波导中的传输损耗和光在波导口与反射镜之间的耦合损耗, 而后者则决定了腔的模式特征。Abrams^[1]、Degnan^[2]和 Hill^[3]等人研究了方波导、矩形波导或圆波导中的单模耦合损失, 理论分析表明存在三种特定的谐振腔(半共心、半共焦及平行平面)结构使耦合损失最小。随着扩散冷却技术在大功率气体激光器上的成功应用, 板条波导和同轴圆筒波导气体激光器又引起了人们的广泛兴趣, 尤其是后者因其具有更大的增益面积和更为紧凑的结构等独特优点而显示出更大的发展潜力^[6~8]。但迄今为止尚没见到有关同轴圆筒波导谐振腔耦合损失的计算分析。本文即运用光波的衍射理论, 计算了同轴圆筒波导谐振腔的耦合损失问题, 并对腔的模式特征进行了讨论。

2 理 论

为方便起见, 我们选取图 1 所示的圆柱坐标系统进行分析。电磁场理论表明: 同轴波导中所存在的波导模是满足一定波导边界条件的麦克斯韦方程的解, 波导激光器中的电磁场主要由波导内的横向模式特征决定; 而数学上, 波导激光器又可简单地由多个单模波导(边界条件为: 镜表面的电场为零)的线性组合表示^[9]。为使分析更为简化, 假设波导壁是具有无限大电导率的金属边界(这在微波技术中比较普遍), 这样只需计算波导内的电磁场^[8]。若设电磁场是沿 z 轴在空腔波导中单频传输的(真空中), 那么有:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(r) \exp [i(\omega t - k_z z - m\phi)], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(r) \exp [i(\omega t - k_z z - m\phi)] \quad (1)$$

这里, \mathbf{E} 和 \mathbf{E}_0 (或 \mathbf{H} 和 \mathbf{H}_0) 为三维空间的复矢量, k_z 为纵向传播常数, m 为环向阶数。由麦克

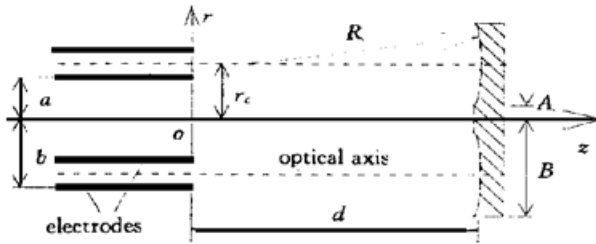


Fig. 1 Geometric scheme of the coaxial waveguide and reflecting mirror

斯韦方程可将横向场分量用纵向场分量表示为:

$$\left. \begin{aligned} E_{0r} &= \frac{1}{N} \left(ik_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} + \mu_0 \omega \frac{m}{r} H_{0z} \right) \\ E_{0\phi} &= \frac{1}{N} \left(k_z \frac{m}{r} E_{0z} - i\mu_0 \omega \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} \right) \\ H_{0r} &= \frac{1}{N} \left(-\omega \epsilon_0 \frac{m}{r} E_{0z} + ik_z \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} \right) \\ H_{0\phi} &= \frac{1}{N} \left(i\omega \epsilon_0 \frac{m}{r} E_{0z} + k_z \frac{m}{r} H_{0z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, $N = k_z^2 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$ (3)

其中 $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ (c 为光速), ω 为模频率, k_z 为纵向波数。纵向电磁场分量的波动方程为:

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + N \right) E_{0z} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + N \right) H_{0z} = 0 \quad (4)$$

这即为典型的贝塞尔微分方程, 其解可用贝塞耳函数 J 和纽曼 (Neumann) 函数 Y 表示:

$$\left. \begin{aligned} E_{0z}(r) &= C_1 J_m(r \sqrt{-N}) + C_2 Y_m(r \sqrt{-N}), \\ H_{0z}(r) &= C_3 J_m(r \sqrt{-N}) + C_4 Y_m(r \sqrt{-N}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为积分常数。当定义波数为: $\chi = a \sqrt{-N}$ 时, (3) 式可表示为:

$$\omega = c \sqrt{k_z^2 + (\chi/a)^2} \quad (6)$$

金属壁同轴波导中通常存在 TE 模、TM 模和 TEM 模。TE 模没有纵向电场分量 E_z , 而 TM 模没有纵向磁场分量 H_z , 对 TEM 模, $E_z = H_z = 0$ 。由这组基本模的简单线性组合, 可得到任意的波导场。由于当电导率为无限大时, 混合模是不可能存在的, 因此相应的场必须由 TE 和 TM 模的叠加计算得到^[8]。电导率为无限大的金属波导的边界条件为:

$$E_{\phi}(r = a) = E_{\phi}(r = b) = 0, \quad E_z(r = a) = E_z(r = b) = 0 \quad (7)$$

a, b 为同轴圆筒波导内、外半径。对 TE 模来说, 纵向电场为零, 因此横向电场可表示为:

$$\left. \begin{aligned} E_{\rho}(r, \phi, z) &= -C_3 \mu_0 \omega \frac{m a^2}{r \chi^2} \left[J_m(r \frac{\chi}{a}) - Y_m(r \frac{\chi}{a}) \frac{J'_m(\chi)}{Y'_m(\chi)} \right] \exp [i(k_z z + m\phi)] \\ E_{\phi}(r, \phi, z) &= i C_3 \mu_0 \omega \frac{a}{\chi} \left[J'_m(r \frac{\chi}{a}) - Y'_m(r \frac{\chi}{a}) \frac{J'_m(\chi)}{Y'_m(\chi)} \right] \exp [i(k_z z + m\phi)] \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里没考虑随时间的变化项。变量 χ 由下面特征方程给出:

$$F_m = J'_m(b\chi_{mp}/a) Y'_m(\chi_{mp}) - Y'_m(b\chi_{mp}/a) J'_m(\chi_{mp}) = 0 \quad (9)$$

该方程可将边界条件(7)式代入(8)式得到。由(9)式可求得无限多个根 χ_{mp} , 其相应于无限多个 TE_{*m*p} 模式, 这里, m 为环向模阶数, 它表示环向对称节线的数目; p 为径向模阶数, 它表示径向场强极大值的数目。同轴波导内外直径比为 $\delta = 2b/2a = 60/57$ 时所对应的波数 χ_{mp} 可由文献[8]得到。计算表明 $p = 0$ 时的损失比 $p = 1$ 时大 4 个数量级以上, 该模式不可能出现在激光谐振腔中, 因此下面不予考虑^[8]。另外, 已有的理论与实验研究表明, 间隙很小的波导激光器中在垂直于波导壁的方向上没有高阶模存在^[8, 10], 因此本文也不考虑所有 $p > 1$ 的模式, 而仅考虑 $p = 1$ 的模式。当 m 较小时, 电场一般是环向极化的^[8]。波导口上的电场为:

$$\left. \begin{aligned} E_{mp}(r, \phi) &= f_m U_{mp}(r, 0) \exp(im\phi), \\ U_{mp}(r, 0) &= J'_m(r\chi_{mp}/a) - Y'_m(r\chi_{mp}/a) J'_m(x)/Y'_m(x) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中常数 f_{mp} 可由波导口截面上的强度归一化得到:

$$f_{mp} = [2\pi \int_a^b U_{mp}^2(r, 0) r dr]^{-1/2} \quad (11)$$

由此可得到下面的归一化方程:

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b dr E_{mp}(r, \Phi) E_{m'p'}^*(r, \Phi) = \delta_{mm'} \delta_{pp'} \quad (12)$$

将(10)式视为源场分布, 用标量衍射积分理论进行分析。观察点 (r_1, Φ, z_1) 处的场近似为

$$E(r_1, \Phi, z_1) = \int_0^{2\pi} \int_a^b dr_0 [\frac{i}{\lambda r_{01}} \exp(-ikr_{01})] E_{mp}(r_0, \Phi) \quad (13)$$

r_{01} 为观察点和波导口上源点之间的距离(波导口位于 $z = 0$ 处), 可近似表示为:

$$r_{01} = d + (r_0^2 + r_1^2)/2d - [r_0 r_1 \cos(\Phi - \Phi)]/d - (r_1 - r_c)^2/2R \quad (14)$$

式中 R 为观察点处反射镜表面的曲率半径, r_c 为同轴圆环波导的中心半径, $r_c = (a + b)/2$ 。

将(14)式代入(13)式, 并用贝塞尔函数的积分表达式(15)沿极角坐标积分^[2, 6, 7]:

$$\int_0^{2\pi} \exp(im\theta + ix \cos \theta) d\theta = 2\pi^m J_m(x) \quad (15)$$

即可得到镜面上的场分布为:

$$E(r_1, \Phi, d) = \frac{i^{m+1} 2\pi f_{mp}}{\lambda d} \exp(im\Phi) \int_a^b U_{mp}(r_0, 0) J_m(\frac{kr_1 r_0}{d}) \exp(ikd) \exp[-\frac{ik}{2d}(r_0^2 + r_1^2)] \times \\ \exp[\frac{ik(r_1 - r_c)^2}{2R}] r_1 dr_1 \quad (16)$$

同理, 如将(16)式视为源场分布, 重复利用(14)式和(15)式可得返回到波导口的场分布为:

$$E(r_2, \Phi_2, 0) = \frac{i^{2m+2} k^2 f_{mp}}{d^2} \exp(im\Phi_2) \exp(-i2kd) \int_A^B \exp[-\frac{ik}{2d}(r_2^2 + r_1^2)] J_m(\frac{kr_1 r_2}{d}) r_1 dr_1 \times \\ \int_a^b U_{mp}(r_0, 0) J_m(\frac{kr_1 r_0}{d}) \exp[-\frac{ik}{2d}(r_0^2 + r_1^2)] \exp[\frac{ik}{R}(r_1 - r_c)^2] r_0 dr_0 \quad (17)$$

式中 A 、 B 为镜面上积分区域的内外半径。

当变量 $Z_1 = kr_1 r_2/d$ 和 $Z_2 = kr_1 r_0/d$ 较大时, 只要 $m \ll Z_1$, $m \ll Z_2$, 即可利用下面渐近式

$$J_m(z) \approx \frac{\exp[i(z - m\pi/2 - \pi/4)] + \exp[-i(z - m\pi/2 - \pi/4)]}{\sqrt{2\pi z}}, \quad (z = Z_1 \text{ or } Z_2) \quad (18)$$

将(17)式进行简化^[6, 7]。对 $d \neq R$ 即有:

$$E(r_2, \Phi_2, 0) = \frac{i^{2m+2} f_{mp}}{\lambda d} \exp(im\Phi_2) \exp(-i2kd) \int_A^B \exp[\frac{ik}{R}(r_1 - r_c)^2] dr_1 \int_a^b U_{mp}(r_0, 0) \sqrt{\frac{r_0}{r_2}} dr_0 \times \\ \{i^{-(m+1/2)} \exp[-\frac{ik}{2d}(r_2 - r_1)^2] + i^{(m+1/2)} \exp[-\frac{ik}{2d}(r_2 + r_1)^2]\} \times \\ \{i^{-(m+1/2)} \exp[-\frac{ik}{2d}(r_1 - r_0)^2] + i^{(m+1/2)} \exp[-\frac{ik}{2d}(r_1 + r_0)^2]\} \quad (19)$$

由于(19)式的主要贡献来自于 $r_2 = r_1$ 和 $r_1 = r_0$ 附近的区域, 而式中“{}”内的高频振荡项对整个积分的贡献很小, 因此可忽略不计^[6, 7], 从而有:

$$E(r_2, \Phi_2, 0) \approx \frac{if_{mp}}{\lambda d} \exp(im\Phi_2) \exp(-i2kd) \int_A^B \frac{ik}{R} (r_1 - r_c)^2 - \frac{ik}{2d} (r_2 - r_1)^2] dr_1 \times \int_a^b U_{mp}(r_0, 0) \exp[-\frac{ik}{2d} (r_1 - r_0)^2] \sqrt{\frac{r_0}{r_2}} dr_0 \quad (20)$$

对 $d = R$, 利用傅里叶光学变换^[4, 11], 有:

$$E(r_2, \Phi_2, 0) = f_{mp} U_{mp}(r_2 \frac{\chi_{mp}}{a}) \exp(im\Phi_2) \exp(-i2kd) \exp[-\frac{ik(r_2 - r_c)^2}{d}] \quad (21)$$

现在来确定返回光场耦合进每个所允许的波导模式的比例。当 mp 模从波导口出发传播, 返回光场中 $m'p'$ 模分量由下式给出:

$$x_{m'p'}^{m'p'} = \int_0^{2\pi} d\Phi_2 \int_a^b r_2 dr_2 E_{m'p'}^*(r_2, \Phi_2) E(r_2, \Phi_2, 0) \quad (22)$$

而返回光场中耦合进它自身 TE_{mp} 模的场分量才是我们所感兴趣的。

对 $d \neq R$ 有:

$$x_{mp}^{mp} = \frac{i2\pi f_{mp}^2}{\lambda d} \exp(-i2kd) \int_A^B \exp[\frac{ik}{R} (r_1 - r_c)^2 - \frac{ik}{2d} (r_1 - r_2)^2 - \frac{ik}{2d} (r_1 - r_0)^2] dr_1 \times \int_a^b U_{mp}(r_2, 0) \sqrt{r_2} dr_2 \int_a^b U_{mp}(r_0, 0) \sqrt{r_0} dr_0 = \frac{i2\pi f_{mp}^2}{\lambda d} \exp(-i2kd) \int_a^b U_{mp}(r_2, 0) \sqrt{r_2} dr_2 \int_a^b U_{mp}(r_0, 0) \sqrt{r_0} dr_0 \times \exp\{\frac{-ik}{2d} [r_0^2 + r_2^2 - 2\beta r_c^2 - \frac{(r_0 + r_2 - 2\beta r_c)^2}{2(1-\beta)}]\} \times \int_A^B \exp\{\frac{-ik(1-\beta)}{d} [r_1 - \frac{r_0 + r_2 - 2\beta r_c}{2(1-\beta)}]^2\} dr_1 \quad (23)$$

其中 $\beta = d/R$ 。如反射镜是无限大的, 那么可将(23)式进一步简化为:

$$x_{mp}^{mp} \approx i2 \sqrt{\frac{\pi}{8}} (1 \pm i) f_{mp}^2 \sqrt{\frac{k}{d|1-\beta|}} \exp(-i2kd) \int_a^b U_{mp}(r_2, 0) \sqrt{r_2} dr_2 \int_a^b U_{mp}(r_0, 0) \sqrt{r_0} dr_0 \times \exp\{-\frac{ik}{2d} [r_0^2 + r_2^2 - 2\beta r_c^2 - \frac{(r_0 + r_2 - 2\beta r_c)^2}{2(1-\beta)}]\} = i2 \sqrt{\frac{\pi}{8}} (1 \pm i) (af_{mp})^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta|1-\beta|}} \exp(-i2kd) \int_1^\delta U_{mp}(\rho_2, 0) \sqrt{\rho_2} d\rho_2 \times \int_1^\delta U_{mp}(\rho_0, 0) \sqrt{\rho_0} d\rho_0 \exp(-\frac{i\alpha}{2\beta} \{\rho_0^2 + \rho_2^2 - \frac{\beta(1+\delta)^2}{2} - \frac{[\rho_0 + \rho_2 - \beta(1+\delta)]^2}{2(1-\beta)}\}) \quad (24)$$

这里, “ \pm ”号分别对应于 $\beta > 1$ 和 $\beta < 1$, $\alpha = ka^2/R$, $\delta = b/a$, $\rho_0 = r_0/a$, $\rho_2 = r_2/a$, 而且已利用了菲涅耳(Fresnel)积分方程:

$$\int_0^\infty \exp(\pm ix^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} (1 \pm i) \quad (25)$$

对 $d = R$ 有:

$$x_{mp}^{mp} = 2\pi(af_{mp})^2 \exp(-i2kd) \int_0^{\delta} \int_{mp}^2(\rho_2, \Phi_2, 0) \exp[-i\alpha(\rho_2 - \frac{1+d}{2})^2] \rho_2 d\rho_2 \quad (26)$$

TE_{mp} 波导模耦合到自身的耦合系数由下式给出:

$$C_{mp} = |x_{mp}^{mp}|^2 \quad (27)$$

而由 $\Gamma_{mp} = 1 - C_{mp}$ 即可求得耦合损失。

3 结果与讨论

(24) 式、(26) 式和(27) 式用复数辛普逊(Simpson) 数值积分法进行求解, 计算精度可达 10^{-5} 以上。TE_{1,1} 和 TE_{20,1} 模耦合系数曲线如图 2 所示, 它是参数 α 和 β 的函数。图中显示出了与 Degnan^[2] 和 Avrillier^[4] 计算结果相类似的变化规律, 即存在三种低耦合损耗的谐振腔结构: 1) 靠近波导口的平面镜或大曲率半径的复曲面镜; 2) 中心近似在波导口处的大曲率半径复曲面镜; 3) 离波导口距离为曲率半径一半的短曲率半径复曲面镜。

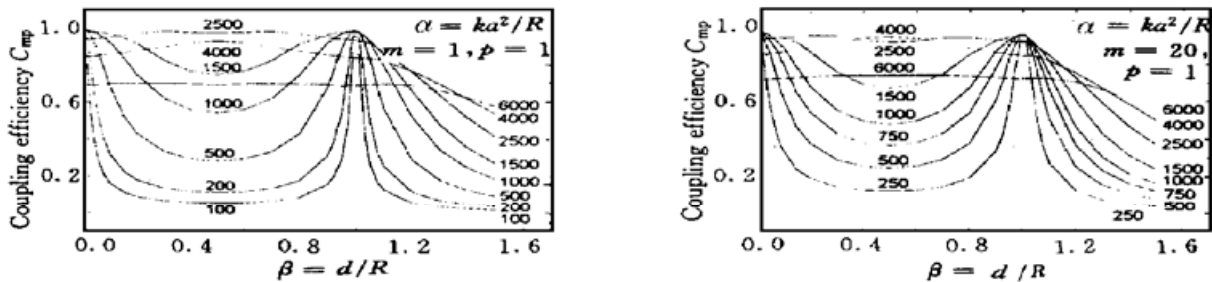


Fig. 2 TE_{1,1} and TE_{20,1} coupling efficiencies as a function of guide and mirror parameters

对于结构 1, 从图 2 可明显看出, 对 $\alpha < 2500$ 的 TE 波导模来说, 如腔镜采用位于波导口处的平面镜 ($R \rightarrow +\infty, d = 0$), 则耦合损失几乎都接近于零; 但当改用曲面镜或增加腔镜与波导口之间的距离, 耦合损失则迅速增加。

对于结构 2, 存在一个最佳 α 值 ($\alpha = k\alpha^2/R = 500$ 左右), 亦即存在一个最佳曲率半径 R , 使其耦合损失较小, 而当 α 偏离这一最佳值时, 耦合损失则迅速增加, 这与 Avrillier^[4] 在矩形波导中所得到的结果是不同的, 而与 Degnan^[2] 在圆波导中所得结果相似。从远场来看, 其场分布以中心在波导口中央的环形球面波前向前传播, 那么在其圆柱形光轴上, 曲率半径为 $R = d$ 的复曲面镜即能在波导口处再现其源场分布。反射镜为大曲率半径时, 所有的波导模都反映出这一特性^[4]。但此时腔镜与波导口的距离较大, 不利于器件的小型化。

从图 3 可以看出, 对于结构 2 或 3, 随着 α 的减小, 腔镜位置的微小变化即能引起耦合损失较大的变化, 因此对其定位要求也就要高。而结构 1 则对腔镜位置的要求低得多。

可见, 结构 1 适合于紧凑结构激光器; 当要求调谐性较好时, 结构 2 则是一种比较好的选择, 因为与结构 1 相比, 其腔镜与波导口的距离要小得多, 无用腔长就可以保持在一个较小值。而且从图 2 可知, 对于结构 1 和 2, 许多高阶波导模以接近于 TE_{1,1} 模的耦合效率耦

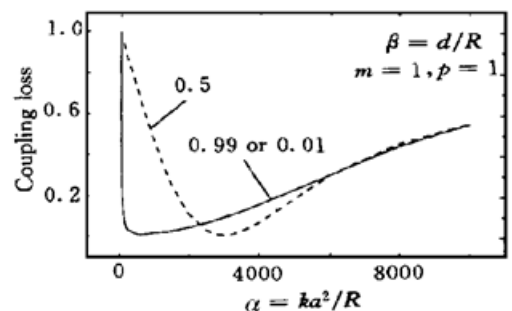


Fig. 3 TE_{1,1} coupling losses for mirrors at different $\beta = d/R$

合回波导;而在结构Ⅱ中,传播到镜面上的波前曲率半径对于那些耦合不好的模式来说差别较大,因此,结构Ⅱ在波导模式鉴别中是非常有用的。

结 论 本文将计算矩形波导和圆波导激光器谐振腔中耦合损失的理论推广到同轴圆环波导,计算结果表明存在三种低耦合损失的谐振腔结构,结构Ⅱ适合于器件的小型化;而结构Ⅰ适合于对谐振腔进行调谐,并且具有较强的模式鉴别能力。

参 考 文 献

- [1] Abrams R L. Coupling losses in hollow waveguide laser resonators. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1972, **QE-8**(11): 838~ 843
- [2] Degnan J J, Hall D R. Finite-aperture waveguide laser resonators. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1973, **QE-9**(9): 901~ 910
- [3] Hill C A, Hall D R. Coupling loss theory of single-mode waveguide resonators. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(9): 1283~ 1289
- [4] Avirillier S, Verdonck J. Coupling losses in laser resonators containing a hollow rectangular dielectric waveguide. *J. Appl. Phys.*, 1977, **48**(12): 4937~ 4941
- [5] Boulnois J L. Mode discrimination and coupling losses in rectangular-waveguide resonators with conventional and phase-conjugate mirrors. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(7): 853~ 860
- [6] Efrlichmann D, Habich U, Plum H D *et al.*. High power CO₂ laser with coaxial waveguide and diffusion cooling. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1993, **QE-29**(7): 2211~ 2219
- [7] Efrlichmann D, Habich U, Plum H D *et al.*. Azimuthal mode discrimination of annular resonators. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(33): 6582~ 6586
- [8] Bochum H. Near- and far-field properties of annular CO₂ waveguide lasers. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(15): 3349~ 3356
- [9] Abrams R, Chester A. Resonator theory for hollow waveguide lasers. *Appl. Opt.*, 1974, **13**(9): 2117~ 2125
- [10] Wittrock U, Weber H. Inside-pumped Nd:YAG tube laser. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(14): 1092~ 1094
- [11] 吕乃光编. 傅立叶光学. 北京:机械工业出版社, 1988.

Coupling Losses and Mode Properties in Annular Waveguide Laser Resonator

Wang Youqing Huang Xintang Chen Qingming Xu Qiyang
(National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 26 June 1998; revised 7 September 1998)

Abstract The theory of calculating the coupling losses in a coaxial waveguide laser resonator is introduced. Computations of the coupling losses for some TE modes of an annular waveguide, as a function of mirror curvature and position, are presented in the limit of large mirror aperture. It is shown that there exist three special configurations contributing to low coupling losses.

Key words annular waveguide laser, resonator, coupling loss.