

# 关联噪声对单模激光动力学性质的影响\*

周小计 曹 力 吴大进

(华中理工大学物理系, 武汉 430074)

**摘 要** 应用线性近似方法, 计算了具有指数形式关联的两白噪声驱动下单模激光光强的关联函数、功率谱及关联时间。根据计算结果讨论了噪声间的关联程度和噪声间互关联时间对以上各量的影响, 并和噪声间具有  $\delta$  函数关联形式的情况进行了比较。

**关键词** 噪声, 关联形式, 关联函数, 功率谱, 关联时间。

## 1 引 言

激光器工作时总是伴随有涨落的出现, 因此研究噪声对激光统计性质的影响, 是近年来人们关注的重要课题<sup>[1-3]</sup>。自从 1991 年 Fulinski 和 Telejko 提出噪声间存在关联后<sup>[4]</sup>, 曹力和吴大进对关联噪声驱动的一维随机系统作了较详细的研究<sup>[5]</sup>, 朱士群将关联噪声引入激光系统<sup>[6-7]</sup>, 对加法和乘法噪声之间有关联的情况进行了研究。

描述激光系统的场的朗之万方程中, 有两种噪声。一种是自发辐射的量子噪声, 以加法噪声形式体现; 另一种是泵噪声, 以乘法噪声形式体现。人们把这两种噪声当白噪声来处理时, 通常也将它们之间的互关联设为  $\delta$  函数形式<sup>[6-8]</sup>, 即  $\lambda \sqrt{QD} \delta(t-t')$ 。 $\delta$  函数关联形式是一种理想的情形, 为了更接近于实际情况, 本文则采用指数关联形式  $(\frac{\lambda \sqrt{QD}}{2\tau} \exp[-|t-t'|/\tau])$ , 当其中的  $\tau \rightarrow 0$  时, 指数关联形式就过渡到  $\delta$  函数关联形式<sup>[9]</sup>。

文献[6]中已研究了激光的定态性质, 本文则侧重于研究其动力学性质: 即光强的关联函数、功率谱及关联时间。由于光场的朗之万方程中的非线性项使得计算上述动力学量时数学处理产生困难, 因此本文采用线性化近似方法来计算<sup>[1, 10]</sup>。线性化近似方法的可靠性问题, 在文献[1]中进行了讨论, 该文作者通过对线性化近似方法和数值模拟的比较以后, 得出当光强的平均值  $\langle I \rangle$  较大或较小时, 线性化近似方法得到的结论是可靠的。

具体地说, 本文计算了具有指数形式关联的两白噪声驱动下, 单模激光增益模型的光强关联函数、功率谱及关联时间。根据计算结果讨论了噪声间关联程度  $\lambda$  和互关联时间  $\tau$  对以上各量的影响, 并和噪声间具有  $\delta$  函数关联形式的情况进行了比较。

## 2 增益模型的光强关联函数及相对涨落

考虑单模激光增益模型为<sup>[3]</sup>:

\* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1997-05-14; 收到修改稿日期: 1997-10-06

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\zeta(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) \quad (1)$$

其中  $\zeta(t)$  和  $\eta(t)$  满足:

$$\langle \zeta(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = Q\delta(t-t'), \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = D\delta(t-t') \quad (2)$$

$$\langle \zeta(t)\eta(t') \rangle = \langle \zeta(t')\eta(t) \rangle = \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad -1 \leq \lambda \leq 1 \quad (3)$$

当(3)式中的  $\tau \rightarrow 0$  时, 就过渡到噪声间为  $\delta$  函数关联形式:

$$\langle \zeta(t)\eta(t') \rangle = \langle \zeta(t')\eta(t) \rangle = \lambda\sqrt{DQ}\delta(t-t') \quad (4)$$

式中  $I$  为激光光强;  $\lambda$  为衡量噪声关联程度的参数;  $Q$ 、 $D$  分别为乘法和加法噪声强度;  $\tau$  为噪声间的互关联时间;  $\beta = \frac{A}{\Gamma}$ ,  $A$  和  $\Gamma$  分别为自饱和系数和增益系数;  $K$  为损失系数。

将(1)式在稳态  $I_0 = (\Gamma - K)/\beta K$  附近线性化, 而  $I = I_0 + \delta(t)$ , 其中  $\delta(t)$  为微扰项, 可得:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = -\gamma\delta(t) + D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\zeta(t) + 2\sqrt{I_0}\eta(t) \quad (5)$$

式中  $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$ , 解(5)式得:

$$\delta(t') = \exp(-\gamma t') \left\{ \frac{D}{\gamma} [\exp(\gamma t') - 1] + \frac{2I_0}{1+\beta I_0} \int_0^{t'} \zeta(s) \exp(\gamma s) ds + 2\sqrt{I_0} \int_0^{t'} \eta(s) \exp(\gamma s) ds \right\} \quad (6)$$

根据归一化关联函数的定义:  $\lambda(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \{ [ \langle I(t+t')I(t') \rangle - \langle I(t') \rangle^2 ] / \langle I(t') \rangle^2 \}$

以及  $I = I_0 + \delta(t)$ , 可得到增益模型的关联函数为(只讨论  $\gamma \neq \tau^{-1}$  的情况):

$$\lambda(t) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[ \frac{QI_0}{(1+\beta I_0)^2} + D - \frac{2\lambda\sqrt{QDI_0}}{(1+\beta I_0)(\gamma^2\tau^2 - 1)} \right] \exp(-\gamma|t|) + \frac{4\lambda\tau\sqrt{QDI_0}}{I_0(1+\beta I_0)(\gamma^2\tau^2 - 1)} \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) \quad (7)$$

由(7)式可得光强的相对涨落:

$$\lambda(0) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[ \frac{QI_0}{(1+\beta I_0)^2} + D + \frac{2\lambda\sqrt{QDI_0}}{(1+\beta I_0)(\gamma\tau + 1)} \right] \quad (8)$$

### 3 单模激光光强的功率谱及关联时间

对(7)式作傅里叶变换, 可以得到光强的功率谱为:

$$S(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + \gamma^2} \left[ \frac{Q}{(1+\beta I_0)^2} + \frac{D}{I_0} - \frac{2\lambda\sqrt{QDI_0}}{I_0(1+\beta I_0)(\gamma^2\tau^2 - 1)} \right] + \frac{8\lambda\sqrt{QDI_0}}{I_0(1+\beta I_0)(\gamma^2\tau^2 - 1)} \frac{1}{(\omega^2 + \tau^{-2})} \quad (9)$$

根据光强关联时间的定义式  $T = \int_0^\infty \Phi(t) dt$ , 其中  $\Phi(t) = \lambda(t)/\lambda(0)$ , 由(7)式和(8)式可得归一

化光强关联时间:

$$T = \frac{1}{\gamma} + \frac{4\lambda\tau \sqrt{QDI_0}}{I_0(1 + \beta I_0)(\gamma\tau + 1)\gamma\lambda(0)} \quad (10)$$

## 4 结 论

### 4.1 关于光强相对涨落

光强的相对涨落  $\lambda(0)$  随噪声间关联程度  $\lambda$  的变化曲线, 如图 1 所示。图中曲线是根据(8)式画出的, 曲线 1 对应  $\tau = 0$ , 曲线 2 对应  $\tau = 0.05$  s, 曲线 3 对应  $\tau = 0.15$  s。由图可知, 对于正关联( $\lambda > 0$ ), 光强相对涨落  $\lambda(0)$  比  $\lambda = 0$  时要大, 且随着  $\lambda$  的增大而增大, 而  $\tau \neq 0$  时的  $\lambda(0)$  却比  $\tau = 0$  时的  $\lambda(0)$  要小, 且随  $\tau$  的增大而减小。反之, 当噪声间具有负关联( $\lambda < 0$ ) 时, 与  $\lambda > 0$  的情况正好相反。因此, 可以得出如下结论: 当噪声间具有负关联时, 光强的相对涨落减小, 这表明线性化近似方法的适用范围扩大。

将(8)式变形为下式:

$$\lambda(0) = \frac{2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\sqrt{Q}}{1 + \beta I_0} - \sqrt{\frac{D}{I_0}} \right)^2 + \frac{2\sqrt{QDI_0}(1 + \lambda + \gamma\tau)}{(1 + \beta I_0)I_0(1 + \gamma\tau)} \right] \quad (11)$$

令上式中  $\tau \rightarrow 0$ , 得到  $\delta$  函数关联形式下的光强相对涨落:

$$\lambda(0) = \frac{2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\sqrt{Q}}{1 + \beta I_0} - \sqrt{\frac{D}{I_0}} \right)^2 + \frac{2\sqrt{QDI_0}(1 + \lambda)}{(1 + \beta I_0)I_0} \right] \quad (12)$$

由(11)式、(12)式可知, 无论  $\lambda$  在  $-1$  到  $1$  之间如何变化, 光强的相对涨落总为正值。

当噪声间为完全负关联 ( $\lambda = -1$ ) 时,  $\lambda(0)$  随噪声强度  $Q$  的变化曲线如图 2 所示。图中曲线 1 是根据(12)式画出的  $\delta$  函数关联形式下的情形, 曲线 2 和 3 是在指数关联形式下根据(11)式画出的, 曲线 2 对应  $\tau = 0.05$  s, 曲线 3 对应  $\tau = 0.15$  s。在  $\delta$  函数关联形式下, 若  $Q = Q_m = (1 + \beta I_0)^2 D / I_0$ ,  $\lambda(0) = 0$ , 当  $Q$  远离  $Q_m$  时,  $\lambda(0)$  增大。这说明在完全负关联时, 某一特定噪声强度下可使光强相对涨落为 0。噪声间为指数关联形式时,  $\lambda(0)$  在  $Q = Q_m = (D/I_0)[(1 + \beta I_0)/(\gamma\tau + 1)]^2$  处出现极小值,  $\lambda(0)$  不可能为零, 当  $Q < Q_m$  时,  $\lambda(0)$  随  $Q$  的

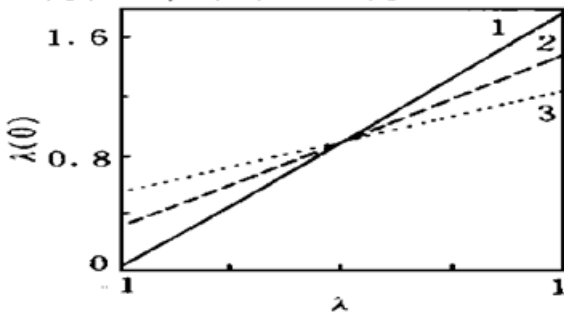


Fig. 1 The light intensity fluctuation  $\lambda(0)$  against the noise correlation strength  $\lambda$ . The curve 1 with  $\tau = 0$ , curve 2 with  $\tau = 0.05$  s and curve 3 with  $\tau = 0.15$  s are drawn from equation (8). The values of parameters are:  $\Gamma = 20$  s<sup>-1</sup>,  $K = 10$  s<sup>-1</sup>,  $\beta = 1$ ,  $D = 2$  s<sup>-1</sup>,  $Q = 10$  s<sup>-1</sup>

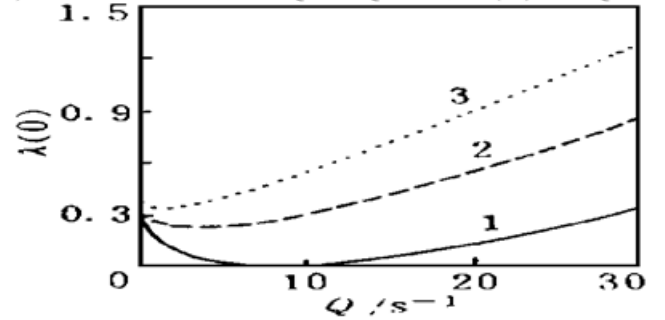


Fig. 2 The light intensity fluctuation  $\lambda(0)$  against the noise correlation strength  $Q$ . The curve 1 is drawn from equation (12) for delta function correlation, curve 2 with  $\tau = 0.05$  s and curve 3 with  $\tau = 0.15$  s are drawn from equation (11) for exponential function correlation. The values of parameters are:  $\Gamma = 20$  s<sup>-1</sup>,  $K = 10$  s<sup>-1</sup>,  $\beta = 1$ ,  $D = 2$  s<sup>-1</sup>,  $\lambda = -1$

增大而减小, 当  $Q > Q_m$  时,  $\lambda(0)$  随  $Q$  的增大而增大; 从图 2 还可看出,  $\tau$  越大,  $\lambda(0)$  随  $Q$  变化的曲线越高, 说明噪声间互关联时间  $\tau$  增大会使相对涨落变大, 线性近似的适用范围变小。

#### 4.2 关于光强关联函数

由(7)式可知, 当噪声间关联程度  $\lambda > 0$  时, 光强关联函数  $\lambda(t)$  比  $\lambda = 0$  时要大, 且随  $\lambda$  的增大而增大; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda(t)$  比  $\lambda = 0$  时要小, 且随  $\lambda$  的减小而减小。

当(7)式中  $\tau \rightarrow 0$  时, 可得到  $\delta$  函数关联形式下的光强关联函数:

$$\lambda(t) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[ \frac{Q I_0}{(1 + \beta I_0)^2} + D + \frac{2\lambda \sqrt{Q D I_0}}{(1 + \beta I_0)} \right] \exp(-\gamma |t|) \quad (13)$$

由(13)式可知,  $\lambda(t)$  只有一个时标, 而指数关联形式下, 由(7)式可知,  $\lambda(t)$  具有二个时标。

在  $\delta$  函数关联形式下,  $\lambda(t)$  的初始斜率:

$$F(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{2}{I_0} \left[ \left( \frac{\sqrt{Q I_0}}{1 + \beta I_0} - \sqrt{D} \right)^2 + \frac{2\sqrt{Q D I_0}}{1 + \beta I_0} (1 + \lambda) \right],$$

$F(t)$  与  $\lambda$  有关, 当  $\lambda \neq -1$  时, 系统不会出现初始平台, 但当  $\lambda = -1$  且  $Q = (1 + \beta I_0)^2 (D/I_0)$  时, 会出现初始平台。

在指数关联形式下,  $F(t) = -\left[ \frac{2Q}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{2D}{I_0} \right]$ ,  $\lambda(t)$  不会出现初始平台。 $F(t)$  与  $\lambda$  无关, 这是因为在对(7)式中的  $t$  求导且令  $t \rightarrow 0$  后, 含有  $\lambda$  的两项正好相消。因此通过分析可以预言, 若将泵噪声视为 O-U 噪声, 则求  $F(t)$  时, 含有不同时标的与  $Q$  有关的项也正好相消,  $F(t)$  中就只剩下与  $D$  有关的一项, 而量子噪声非常小, 这时  $F(t) \rightarrow 0$ , 光强关联函数  $\lambda(t)$  就会出现初始平台。

#### 4.3 关于光强功率谱

由(9)式可知, 在噪声间为指数关联形式时, 若噪声间为正关联 ( $\lambda > 0$ ), 功率谱的峰值比  $\lambda = 0$  时要高, 且随  $\lambda$  的增大而增大; 当  $\lambda < 0$ , 功率谱的峰值比  $\lambda = 0$  时要低, 且随  $\lambda$  的减小而减小。

对于  $\lambda > 0$ , 功率谱只为单峰;  $\lambda < 0$ , 功率谱可以为单峰或双峰, 证明如下:

功率谱(9)式的极值由方程  $\partial s / \partial \omega = 0$  决定, 作者发现  $\omega = 0$  始终是一极值点, 其余极值点由下面方程给出:

$$\beta_1 y^2 + \beta_2 y + \beta_3 = 0 \quad (14)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} y = \omega^2, & \quad \beta_1 = \frac{D}{I_0} + \frac{Q}{(1 + \beta I_0)^2} \\ \beta_2 = \frac{1}{\tau^2} \left[ \beta_1 + \frac{2\lambda \sqrt{D Q I_0}}{I_0 (1 + \beta I_0)} \right], & \quad \beta_3 = \frac{1}{\tau^4} \left[ \beta_1 + \frac{2\lambda \sqrt{D Q I_0}}{I_0 (1 + \beta I_0)} (1 + \gamma^2 \tau^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$\beta_1$ 、 $\beta_2$  一定大于 0。当  $\lambda \geq 0$ , 则  $\beta_3 > 0$ , 根据笛卡尔法则, (14) 式无正实根; 当  $\lambda < 0$ , 若  $\beta_3 > 0$ , 则(14) 式无正实根, 若  $\beta_3 < 0$ , 由(14) 式可知  $y$  有一正实根, 而  $y = \omega^2$ , 因此(9) 式的  $\omega$  有 3 个极值, 此时功率谱为双峰。

根据上述分析, 可以画出噪声间关联程度  $\lambda$  和噪声间关联时间  $\tau$  的参数图, 如图 3 所示, 图中曲线  $c$  是令(15) 式  $\beta_3 = 0$  画出的, 它是功率谱由单峰变为双峰的临界曲线。图中 I 区, 功率谱为单峰; II 区, 功率谱为双峰。

为了验证上面分析的正确性, 对应于图 3 中  $\tau = 0.15 \text{ s}$  这条竖直线, 分别在 I 区、II 区取 A、B 两点, 画出的功率谱如图 4 所示。图中曲线 1 为单峰(即图 3 中 A 点,  $\lambda = -0.2$ ), 曲线 2 为双峰(图 3 中 B 点,  $\lambda = -0.6$ )。由图 4 还可看出, 当  $\tau$  取一定值时, 在噪声间为负关联的情况下, 功率谱会随着  $\lambda$  的减小由单峰变为双峰。

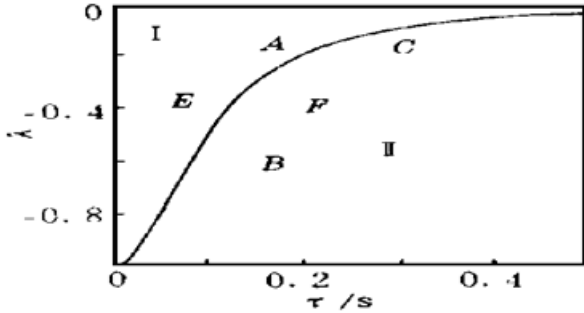


Fig. 3 Parameter plane of the noise correlation strength  $\lambda$  and the noise cross-correlation time  $\tau$ . The curve  $c$  drawn according to  $\beta_3 = 0$  [Eq. (15)] is a critical line of regions I and II. Regions I, II correspond to one, two peaks in power spectrum respectively. The values of parameters are:  $\Gamma = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $K = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 1$ ,  $D = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $Q = 10 \text{ s}^{-1}$

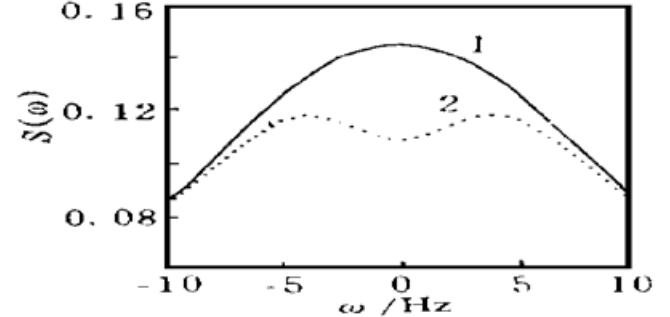


Fig. 4 The effects of the noise correlation strength  $\lambda$  on the power spectrum of light intensity  $S(\omega)$  [Eq. (9)]. The curve 1 corresponds to one peak (point A with  $\lambda = -0.2$  in Fig. 3); curve 2 corresponds to two peaks (point B with  $\lambda = -0.6$  in Fig. 3). The values of other parameters are:  $\Gamma = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $K = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 1$ ,  $D = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $Q = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\tau = 0.15 \text{ s}$

为了看出噪声间的互关联时间  $\tau$  对功率谱极值个数的影响, 对应于图 3 中  $\lambda = -0.4$  这条水平直线分别在 I 区、II 区取 E、F 两点, 画出的功率谱如图 5 所示。图中曲线 1 为单峰(即图 3 中 E 点,  $\tau = 0.05 \text{ s}$ ), 曲线 2 为双峰(图 3 中 F 点,  $\tau = 0.2 \text{ s}$ )。根据图 5 还可看出, 对于一定的  $\lambda$ , 功率谱会随着  $\tau$  的增大由单峰变为双峰。

当(9)式中  $\tau \rightarrow 0$  时, 就得到  $\delta$  函数关联形式下的光强功率谱:

$$S(\omega) = [4/(\omega^2 + \gamma^2)] \{Q/(1 + \beta I_0)^2 + D/I_0 + 2\lambda \sqrt{QDI_0/[I_0(1 + \beta I_0)]}\} \quad (16)$$

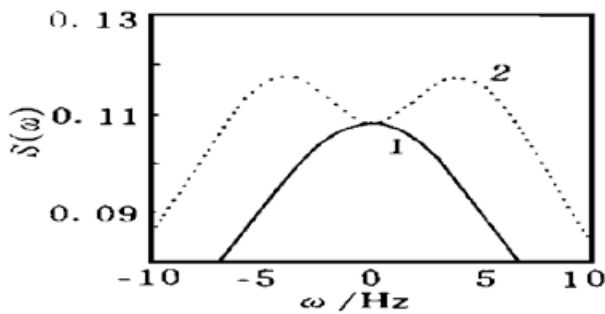


Fig. 5 The effects of the noise cross-correlation time  $\tau$  on the power spectrum of light intensity  $S(\omega)$  [Eq. (9)]. The curve 1 corresponds to one peak (point E with  $\tau = 0.05 \text{ s}$  in Fig. 3); curve 2 corresponds to two peaks (point F with  $\tau = 0.2 \text{ s}$  in Fig. 3). The values of other parameters are:  $\Gamma = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $K = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 1$ ,  $D = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $Q = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\lambda = -0.4$

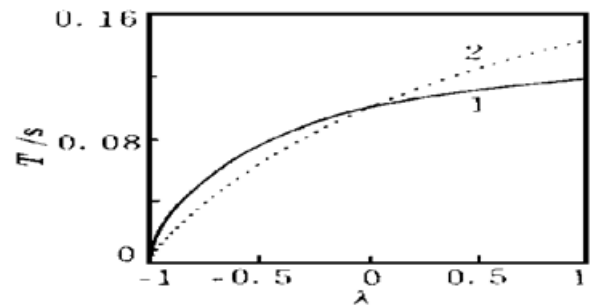


Fig. 6 The light intensity correlation time  $T$  against the noise correlation strength  $\lambda$ . The curve 1 with  $\tau = 0.05 \text{ s}$  and curve 2 with  $\tau = 0.15 \text{ s}$  are drawn from equation (10). The values of parameters are:  $\Gamma = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $K = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 1$ ,  $D = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $Q = 10 \text{ s}^{-1}$

由极值方程  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \omega} = 0$  可知, (16) 式只有  $\omega = 0$  一个极值点, 功率谱只会出现单峰。

#### 4.4 关于光强关联时间

光强关联时间  $T$  随  $\lambda$  的变化曲线, 如图 6 所示。图中曲线是根据(10) 式画出的, 曲线 1 对应  $\tau = 0.05$  s, 曲线 2 对应  $\tau = 0.15$  s。由图 6 可以看出,  $T$  随  $\lambda$  的增大而增大, 并且, 当  $\lambda > 0$  时,  $T$  随噪声间互关联时间  $\tau$  的增大而增大, 反之, 当  $\lambda < 0$  时,  $T$  随  $\tau$  的增大而减小。

### 参 考 文 献

- [1] E. Hernandez-Garcia, R. Toral, M. San Minguel. Intensity correlation functions for the colored gain-noise model of dye lasers. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(11) : 6823~ 6830
- [2] Shiqun Zhu, Jianping Yin. Saturation effect in a laser at steady state. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7) : 4969~ 4973
- [3] Shiqun Zhu. Steady-state analysis of a single-model laser with correlations between additive and multiplicative noise. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(3) : 2405~ 2408
- [4] A. Fulinski, T. Telejko. On the effect of interference of additive and multiplicative noises. *Phys. Lett. (A)*, 1991, **152**(1~ 2) : 11~ 14
- [5] Li Cao, Dajin Wu. Stochastic dynamics for systems driven by correlated noises. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **185**(1) : 59~ 64  
Dajin Wu, Li Cao, Shengzhi Ke. Bistable kinetic model driven by correlated noises: steady-state analysis. *Phys. Rev. (E)*, 1994, **50**(4) : 2496~ 2502  
Li Cao, Dajin Wu, Shengzhi Ke. Bistable kinetic model driven by correlated noises: unified colored-noise approximation. *Phys. Rev. (E)*, 1995, **52**(3) : 3228~ 3231
- [6] 朱士群, 印建平, 陈玉华. 噪声之间的耦合对一维激光场的影响. *光学学报*, 1994, **14**(9) : 951~ 955
- [7] 汪 瑾, 朱士群. 噪声之间的正负耦合对激光场的影响. *光学学报*, 1997, **17**(7) : 884~ 888
- [8] Xueqin Wei, Li Cao, Dajin Wu. Effects of correlated noises on statistic property of single-mode laser. *Chin. Phys. Lett.*, 1996, **13**(8) : 583~ 586
- [9] Ya Ja, Jiarong Li. Steady-state analysis of a bistable system with additive and multiplicative noises. *Phys. Rev. (E)*, 1996, **53**(6) : 5786~ 5792
- [10] Zhonglong Wang, Li Cao, Dajin Wu. The time-dependent moments and correlation functions of the intensity of a single-model dye laser. *Commun. Theor. Phys.*, 1995, **24**(1) : 27~ 36

## Effects of Correlated Noises on Dynamic Properties of a Single-Mode Laser

Zhou Xiaoji    Cao Li    Wu Dajin

(Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 14 May 1997; revised 6 October 1997)

**Abstract** The expressions for correlation functions, power spectrum and correlation time of the intensity of a single-mode laser driven by two white noises with an exponential function correlation form were calculated by linear approximation method. According to the calculated results, the effects of correlation strength and correlation time between noises on the above quantities are discussed, and are compared with the situation of a delta function correlation form between noises.

**Key words** noise, correlation form, correlation function, power spectrum, correlation time.