

实际大气中激光闪烁的概率分布

饶瑞中 王世鹏 刘晓春 龚知本

(中国科学院安徽光学精密机械研究所大气光学研究室, 合肥 230031)

摘 要 根据湍流大气中激光对数强度的最低几阶中心矩建立了一种最大似然概率分布模型, 该模型可以方便和准确地描述实际概率分布。根据实验结果分析了激光对数强度的概率分布的偏斜度和陡峭度的特征。发现在弱起伏条件下, 对数强度的概率分布一般接近于正态分布, 当偏离正态分布时, 概率密度分布的偏斜度总是为负, 陡峭度总是为正。

关键词 光传播, 大气湍流, 闪烁, 概率分布。

1 引 言

激光在湍流大气传播过程中的强度起伏一直是波在随机介质中传播研究的一个重要问题。研究表明^[1]: 在弱起伏条件下, 强度起伏的概率密度分布服从对数正态分布(亦即对数强度服从正态分布), 在强起伏条件下则服从指数分布。然而许多实际问题介于弱、强起伏条件之间, 此时尚不能从波传播的物理过程获得明确的分布形式。一些研究者根据各种假设提出了多种分布模型, 如 $I-K$ 分布^[2]、Beckmann 分布^[3]等。但这些分布模型的可靠程度只有在低阶矩的基础上才能进行检验。因此物理意义不很明确、数学表达式也很复杂的分布模型并非十分必要。

事实上, 人们可以只利用实验数据的可靠的最低几阶统计矩, 根据概率分布的最大似然性原理就能获得一种简单的分布形式, 它可以方便地从实验数据拟合出来。然后以正态分布为标准、用实际概率分布的偏斜度和陡峭度来描述它与正态分布的偏差, 就能获得实际概率分布的较为清晰的图像。该方法通过实验数据的分析得到了验证。本文的实验观测在 500 m 的传输距离上进行, 所用光源是波长为 $0.6328 \mu\text{m}$ 的基模 He-Ne 激光, 采样频率为 1.3 kHz。每次实验持续进行 24 h, 每次采集 135168 个样本点, 相邻两次采集相隔 10 min, 这样总采集次数为 144。由于经历了全天的变化, 闪烁指数跨越了近两个量级, 涵盖了弱起伏条件的主要范围, 并且有一些超出了弱起伏条件的范围。

2 对数强度的概率密度分布

由于理论上认为弱起伏条件下对数强度起伏的概率密度分布服从正态分布(以下的分析都以对数强度为研究对象)。根据强度的实验样本值可以求得对数强度 $\ln I$ 的任意级次 k 的中

心矩 μ_k 。若对数强度 $\ln I$ 的平均值为 $\overline{\ln I}$ ，概率密度分布为 $p(\ln I)$ ，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ln I - \overline{\ln I})^k p(\ln I) d \ln I = \mu_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

通常，实验数据的高阶矩的精度是较低的，只有较低级次的矩才可能比较可靠。在最低几阶矩中，一阶矩为零，与均值相联系，决定了概率分布主要部分的位置；二阶矩为方差，决定了正态分布的形状；而三阶矩和四阶矩分别决定了相对于正态分布的偏斜度和陡峭度。如果利用一至四阶矩的数值建立起分布模型便可相当充分地反映出概率分布的实际形状，而不必涉及级次很高的矩值。

已知最低四阶中心矩的最大似然概率密度分布可以表达为^[4]：

$$p(\ln I) = \exp \left[\sum_{i=0}^4 \lambda_i (\ln I - \overline{\ln I})^i \right] \quad (2)$$

它应满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\ln I) d \ln I = \mu_0 = 1 \quad (3)$$

由归一化条件和四个矩方程构成五个未知系数 λ_0 、 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 和 λ_4 的非线性积分方程组。直接的求解是很困难的，但如果借助于五阶矩 μ_5 和六阶矩 μ_6 ，再根据概率密度分布(2)式的形式推断它在无穷大时以指数趋于零，因此有

$$\lim_{\ln I \rightarrow \pm\infty} (\ln I - \overline{\ln I})^k p(\ln I) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

使用分部积分法可以得到下列方程组：

$$\begin{cases} \mu_0 \lambda_1 + 2\mu_1 \lambda_2 + 3\mu_2 \lambda_3 + 4\mu_3 \lambda_4 = 0 \\ \mu_1 \lambda_1 + 2\mu_2 \lambda_2 + 3\mu_3 \lambda_3 + 4\mu_4 \lambda_4 = -\mu_0 \\ \mu_2 \lambda_1 + 2\mu_3 \lambda_2 + 3\mu_4 \lambda_3 + 4\mu_5 \lambda_4 = -2\mu_1 \\ \mu_3 \lambda_1 + 2\mu_4 \lambda_2 + 3\mu_5 \lambda_3 + 4\mu_6 \lambda_4 = -3\mu_2 \end{cases} \quad (5)$$

在解得上述方程后系数 λ_i 可以通过数值积分求得。

更一般地，如果实验数据 x (其均值为 \bar{x}) 可以可靠地利用到 $2n - 2$ ($n \geq 2$) 阶矩，则相应的最大似然概率密度分布可以表达为：

$$p(x) = \exp \left[\sum_{i=0}^n \lambda_i (x - \bar{x})^i \right] \quad (6)$$

相应地系数方程组为：

$$\sum_{j=1}^n j \mu_{i+j-2} \lambda_j = - (i-1) \mu_{i-2}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (7)$$

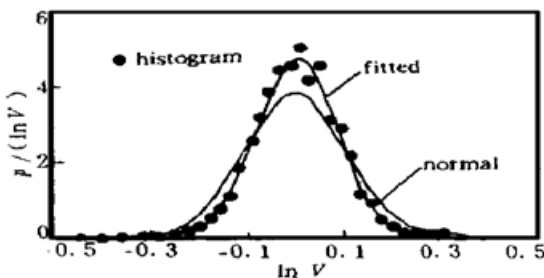


Fig. 1 An example fitting of probability density distribution using first 4 moments according to the maximum likelihood principle. The distribution histogram (points) and a normal distribution with the same mean and variance are also presented for comparison

图 1 是利用概率密度分布(2)式对实验数据拟合的一个具体例子。图中 V 表示探测器输出的光强信号的电压值，“•”代表从 135168 个样本值直接获得的概率密度分布柱形图，正态分布和根据本文提出的模型所拟合的分布都以实线绘出相比较。可以看出，这种分布模型可以很好地描述实际分布。

对大量实验数据的分析表明，大部分实验基本上都满足弱起伏条件，激光对数强度起伏的概率分布一般都

接近正态分布。但在某些情况下,对数强度的概率分布明显偏离了正态分布。这种偏离可通过概率分布的偏斜度和陡峭度清楚地表现出来。

3 概率密度分布的偏斜度和陡峭度

概率分布的偏斜度 γ_1 和陡峭度 γ_2 分别定义为^[5]:

$$\gamma_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}, \quad \gamma_2 = \mu_4/\mu_2^2 - 3 \quad (8)$$

偏斜度反映了概率分布相对于均值的非对称性。如果概率分布对于均值是对称的(如正态分布)则偏斜度为零,反之则偏斜度不为零。如果偏斜度为负,则意味着,平均说来,低于均值的事件出现的概率小于高于均值的事件出现的概率,但低于均值的事件与均值的绝对偏离却要大于高于均值的事件与均值的绝对偏离;反之亦然。陡峭度反映了概率分布相对于正态分布的集中程度。如果陡峭度为正则概率分布比正态分布更为集中,反之则比正态分布发散。

在以下关于偏斜率和陡峭度特性的分析中,以激光传播的起伏强度为参考,起伏强度通常用闪烁指数 β^2 (即强度起伏的归一化方差 $(\overline{I^2} - \overline{I})^2/\overline{I}^2$) 来表示。图 2 中的左右两部分分别表示 1997 年冬季和夏季闪烁指数与对数强度概率分布的偏斜度的关系。总的来说,数据比较分散。在冬季尚存在着一种较为可见的趋势:当起伏强度很小时,随起伏强度的增加偏斜度的绝对值越来越大,在一定的起伏强度下达到最大;而后随起伏强度的增加反而越来越小。夏季对数强度概率分布的偏斜度与起伏度的关系比冬季更为复杂,数据更为发散,看不出明显的趋势。总的来说,大部分情况下偏斜度的绝对值都比冬季要小,似乎与起伏强不存在明显的依赖关系。

图 3 中的左右两部分分别表示 1997 年冬季和夏季闪烁指数与对数强度概率分布的陡峭度的关系。同偏斜度一样,总的来说,数据比较分散。在冬季尚存在着一种较为可见的趋势:当起伏强度很小时,随起伏强度的增加陡峭度越来越大,在一定的起伏强度下达到最大;而后随起伏强度的增加反而越来越小。夏季对数强度概率分布的陡峭度与起伏强度的关系比冬季更为复杂,数据更为发散,看不出明显的趋势。总的来说,大部分情况下陡峭度都比冬季要小,与起伏强度不存在明显的依赖关系。

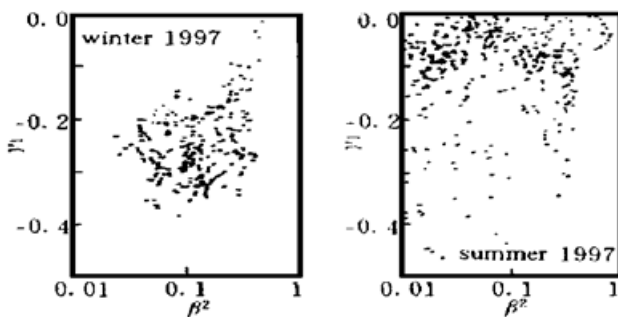


Fig. 2 The relation between the scintillation index and the skewness of the probability density distribution of the log-intensity in the winter (left) and in the summer (right), 1997

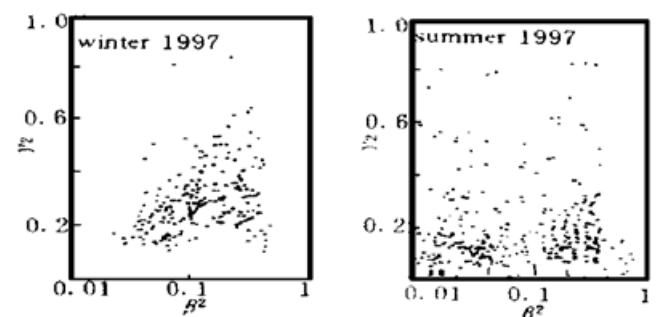


Fig. 3 The relation between the scintillation index and the kurtosis of the probability density distribution of the log-intensity in the winter (left) and in the summer (right), 1997

从图 2 和图 3 不难看出,陡峭度与起伏强度的变化关系和相应的偏斜度的绝对值与起伏强度的变化的趋势基本相同,这说明当对数强度起伏概率分布偏离正态分布时,其对称性与

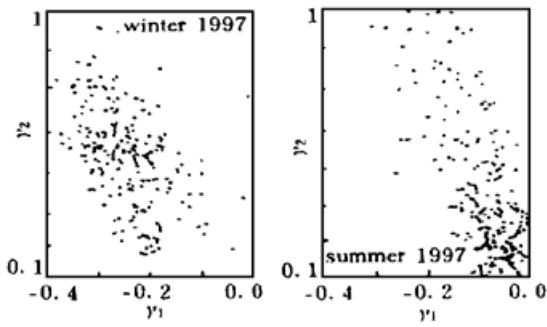


Fig. 4 The relation between the skewness and the kurtosis of the probability density function of the log-intensity in the winter (left) and in the summer (right), 1997

集中程度同时发生改变。在图 4 中的左右两部分分别绘出了冬季、夏季偏斜度和陡峭度的关系，可以看出，偏斜度和陡峭度的对数存在着较为明显的线性关系，亦即随着概率分布偏离正态分布的程度的增加，陡峭度的增加比偏斜度的增加更为急剧。另外也可以看出，在冬季和夏季，偏斜度和陡峭度的对数的线性关系也存在着明显的差别，夏季陡峭度随偏斜度的绝对值增加比冬季更快。由于冬季和夏季的数据都来自三个月份，说明两个季节的湍流状态存在着明显的差异。

图 2 和图 3 以及本文所有的实验结果表明，无论是冬季或夏季、白天或夜晚，对于对数强度起伏的概率密

度分布，当其偏离正态分布时，偏斜度总是为负，亦即低于均值的概率小于高于均值的概率，陡峭度总是为正，亦即实际分布比正态分布更为向均值集中。这与数值计算的结论相吻合^[6]。

4 概率密度分布与湍流特性

由于偏斜度和陡峭度的绝对值越大意味着概率分布越偏离于正态分布，上述偏斜度和陡峭度的冬季行为说明，当起伏强度很小，随起伏强度的增加，对数强度起伏的概率分布越偏离于正态分布。这是局地均匀各向同性介质中波的传播理论所预期的结果。当起伏强度较大时，随起伏强度的增加对数强度起伏的概率分布越接近于正态分布。这与局地均匀各向同性介质中波的传播理论所预期的结果相抵触。而偏斜度和陡峭度的夏季行为说明，对数强度起伏的概率分布似乎不依赖于起伏强度，这也与局地均匀各向同性介质中波的传播理论所预期的结果不符。

对上述实验结果可作出下述可能的解释：尽管偏斜度和陡峭度随起伏强度呈上述变化趋势，但由于其绝对值都比较小，可以认为与正态分布的偏离不大。在冬季，起伏强度很小的情况一般发生在夜晚，湍流可能未得到充分的发展，其状态与局地均匀各向同性差距较大，因此对数强度起伏较为偏离正态分布；而在白天起伏强度一般很大，湍流得到了较为充分的发展，其状态有较大的可能满足局地均匀各向同性的条件，对数强度起伏反而接近正态分布。而在夏季，白天和夜晚的起伏强度的差别要小于两者在冬季的差别，湍流一般都能得到较充分的发展，所以大部分情况下概率分布较为接近正态分布。

上述解释基于对湍流的发展特性所作的假定，即认为在较大的起伏强度下湍流得到了较为充分的发展，而在较小的起伏强度下湍流未能得到充分的发展。对这种假设的可靠性可参照对数强度起伏的频谱特性作一简单的探讨。

根据光波在局地均匀各向同性湍流大气中的传播理论，对数强度起伏的频谱在频率很高时呈标度律，即指数变化规律： $W_{\ln I}(f) \propto f^{\alpha_0}$ ，对应的频率范围称之为无标度区间，标度指数 α_0 应为 $-8/3$ ^[11]。根据标度指数的实测值 α 与理论值 α_0 的差别，可以对局地均匀各向同性湍流的假设作一大致的判断。如果实测值与理论值存在较大的差别，则大气湍流显然不能视为局地均匀各向同性。

图 5 的左右两部分分别描绘了 1997 年冬季、夏季功率谱的无标度区间的标度指数 α 与理

论值 α_0 的绝对偏差(图中放大 3 倍)和闪烁指数的关系,可以看出,无论冬季或夏季,在各种起伏强度下,标度指数 α 都可能与理论值 α_0 存在很大的差别。在冬季,虽然数据存在着较大的离散性,但随着闪烁指数的增大,标度指数 α 与理论值 α_0 的绝对偏差随之减小。这说明关于较大的起伏强度下湍流得到了较为充分的发展的假设在冬季具有一定的可靠性。而在夏季,数据存在着更大的离散性,尽管没有很明显的规律,但随着闪烁指数的增大,标度指数 α 与理论值 α_0 的绝对偏差有着一定的增大趋势,这说明关于较大的起伏强度下湍流得到了较为充分的发展的假设在夏季是不合适的。

而图 6 关于冬季和夏季对数强度起伏的概率密度的偏斜度和功率谱的无标度区间的标度指数 α 与理论值 α_0 的绝对偏差(图中放大 3 倍)的直接关系,则更能说明问题。从图中可以看出,在冬季虽然数据存在着较大的离散性,但随着标度指数 α 与理论值 α_0 的绝对偏差的增大,概率密度的偏斜度的绝对值也存在着较为明显的增大趋势;而在夏季,数据存在着更大的离散性,随着标度指数 α 与理论值 α_0 的绝对偏差的增大,对大部分数据,概率密度的偏斜度的绝对值一般较小,没有明显的增大趋势,却反而有着不明显的减小趋势。

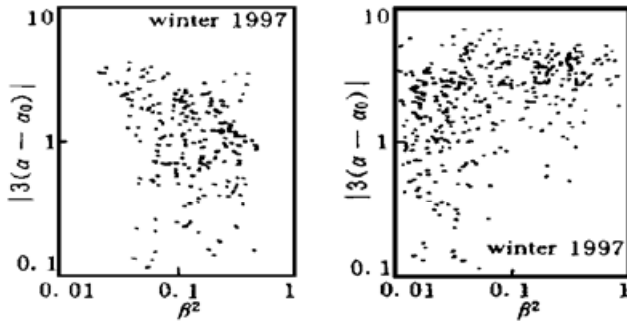


Fig. 5 The relation between the absolute deviation the scaling exponent of the power spectrum from the theoretical value and the scintillation index in the winter (left) and in the summer (right), 1997

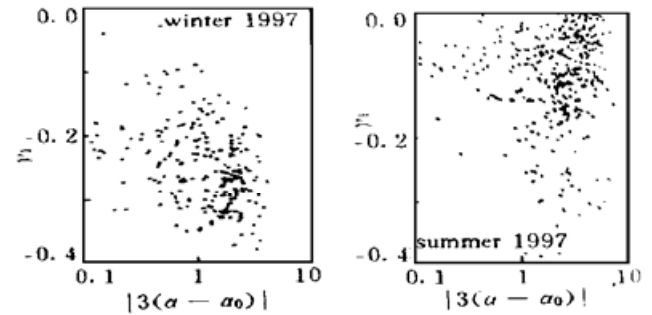


Fig. 6 The relation between the absolute deviation the scaling exponent of the power spectrum from the theoretical value and the skewness of the probability density distribution of the log-intensity in the winter (left) and in the summer (right), 1997

这些现象一方面说明冬季和夏季的大气湍流确定存在着明显的差别,另一方面也说明实际大气湍流相当复杂,虽然在一般情况下可按局地均匀各向同性的假设进行处理,但更为可靠的处理必须进行全面的分析。

结 论 根据对数强度起伏的概率密度分布的实验结果和上述参照对数强度起伏的功率谱无标度区间的标度指数所进行的有关大气湍流讨论,可以得到以下几点结论:

1) 根据对数强度的最低几阶中心矩所建立的最大似然概率分布模型可以方便和准确地描述实际概率分布。

2) 对于实际湍流大气的光传播,由闪烁指数的大小判定起伏强度,并不能可靠地划分理论适用的有效范围。其有效性在于局地均匀各向同性的假设。在由闪烁指数判定的弱起伏条件下,对数强度起伏的统计特征会出现较大的变化。

3) 对数强度起伏的概率密度分布的偏斜度和陡峭度随起伏强度的变化特性以及偏斜度和陡峭度的关系,可以表征湍流的宏观特性。

4) 对数强度起伏的概率密度分布在弱起伏条件下大部分的概率分布接近于正态分布,

当其偏离正态分布时, 偏斜度一般为负, 亦即低于均值的概率小于高于均值的概率, 陡峭度一般为正, 亦即实际分布比正态分布更为向均值集中。

5) 弱起伏条件下, 对数强度起伏的概率密度分布服从正态分布时, 功率谱无标度区间的标度指数仍可能远远偏离理论值。这说明概率密度分布的特征尚不足以全面反映湍流本身的起伏特性。

6) 某些情况下概率密度分布和功率谱都远远偏离理论结果, 说明它们都和湍流本身的状态直接相关。因而概率分布的模型的建立必须与湍流场的性质相联系。我们注意到, 现有的概率分布模型的建立都没有直接联系到湍流场本身的特性。

参 考 文 献

- [1] J. W. Strohben. *Laser Beam Propagation in the Atmosphere*, Berlin: Springer-Verlag, 1978. 129~170
- [2] L. C. Andrews, R. L. Phillips. Mathematical genesis of the I - K distribution for random optical fields. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1986, **3**(11) : 1912~ 1919
- [3] R. J. Hill, R. G. Frehlich. Probability distribution of irradiance for the onset of strong scintillation. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1997, **14**(7) : 1530~ 1540
- [4] B. Roy Frieden. *Probability, Statistical Optics, and Data Testing*, Berlin, Springer-verlag, 1983 : 270~ 279
- [5] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, Washington D. C. : National Bureau of Standards, 1965. 928
- [6] S. M. Flatte, C. Bracher, G. Wang. Probability-density functions of irradiance for waves in atmospheric turbulence calculated by numerical simulation. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(7) : 2080~ 2092

Probability Distribution of Laser Irradiance Scintillation in a Real Turbulent Atmosphere

Rao Ruizhong Wang Shipeng Liu Xiaochun Gong Zhiben
(Laboratory of Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)
(Received 18 November 1997)

Abstract A probability distribution model for the light log-intensity fluctuation in turbulent atmosphere was introduced by taking consideration of the skewness and the kurtosis. The model is suitable for fitting the probability distribution from experimental data. It was found experimentally that under the weak fluctuation condition the probability distribution is close to a normal distribution when the turbulence is well developed, otherwise the distribution will deviate from the normal distribution and the skewness of the log-intensity probability distribution is always negative and the kurtosis positive.

Key words light propagation, turbulence, scintillation, probability distribution.