

扩散平面光波导的传递函数方法

冯 莹¹⁾ 李湘荣²⁾ 李海洋²⁾ 周建平²⁾

1), 国防科学技术大学应用物理系, 长沙 410073
2), 国防科学技术大学航天技术系, 长沙 410073

摘 要 引入一种计算光波导传播特性的新方法——传递函数方法。给出了公式推导, 计算了扩散各向同性及扩散各向异性平面光波导的传播特性, 并与其它方法所得结果进行了比较。结果表明用传递函数方法处理折射率渐变分布的光波导问题, 计算相对简单, 可以得到精确的数值结果。

关键词 光波导, 传递函数方法, 折射率渐变分布。

1 引 言

利用钛扩散或质子交换(退火质子交换)技术制作的 LiNbO_3 光波导器件, 在光纤通信、光纤传感器、信息光学及非线性光学等领域有着重要和广泛的应用。尽管这些波导器件的制作技术已经成熟, 但基于理论分析、器件优化设计及拓宽应用的需要, 对这类具有渐变折射率分布的光波导传播特性的研究, 仍然不断受到关注。由于这类问题的波动方程没有严格的解析解, 人们提出了许多近似解析方法和数值方法求解, 如有效折射率法^[1], 基于试探函数的变分法^[2], 光线传输法^[3], 有限差分法^[4], 有限元法^[5]等。但一些方法的适用范围有限, 所得结果的精度往往还需要进一步修正。在处理各向异性波导和二维渐变折射率分布的扩散沟道波导时, 有限元等数值方法能够获得高精度, 但存在着所需单元多、计算量大的问题。

本文介绍一种计算光波导传播特性的新方法——传递函数方法(TFM), 这种方法是近年来在力学领域里发展起来的^[6-8]。作为一种数值方法, 与解光波导问题时用的较多的有限元法(FEM)比起来, 传递函数方法具有计算工作量小、精度高等特点, 可以直接求解矢量波动方程和二维渐变折射率光波导问题。文中首先将传递函数方法用来分析扩散平面光波导, 也作为后续计算二维渐变折射率分布的扩散沟道光波导的基础。推导了扩散各向异性平面光波导的传递函数解的计算公式, 并将数值算例的结果与其它方法的计算结果进行了比较。

2 基本理论

2.1 基本方程

随时间谐振的电磁场在无源、无损耗的介质中传播时, 满足下列形式的麦克斯韦方程:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (1)$$

式中, ω 为角频率, ϵ 为介电常数, 考虑包括各向异性介质在内的一般情况时, ϵ 为一个二阶张量。对于非磁性介质, 有 $\mu = \mu_0$, μ_0 为真空中的磁导率。设电磁场沿 z 向传播, 且 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 与传播方向和时间的依赖关系具有 $\exp[i(\beta z - \omega t)]$ 的形式, 其中 β 为电磁场沿 z 方向的传播常数。在介电常数发生突变的分界面上, 上述麦克斯韦方程必须遵从的边界条件为:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \cdot (\epsilon_1\mathbf{E}_1 - \epsilon_2\mathbf{E}_2) &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

其中 \mathbf{e}_n 为交界面处的单位法向矢量。

2.2 变分关系

首先根据麦克斯韦方程及边界条件, 确立光波导问题的变分关系。当讨论仅限于各向同性介质光波导时, 只需建立标量形式的变分关系。但对许多有源或无源集成光波导结构来讲, 往往需要考虑它的各向异性及非均匀性, 因此, 针对扩散各向异性光波导的一般性情况, 本文中采用了对磁场矢量的变分关系, 这种对矢量场的变分可以用来分析晶体各向异性引起的混合模特性, 其形式为^[9]:

$$\delta L = 0$$

$$L = \int \nabla \times \mathbf{H}^* \cdot \epsilon^{-1}(x, y) (\nabla \times \mathbf{H}) d\Omega + \alpha \int \nabla \cdot \mathbf{H}^* \cdot (\nabla \cdot \mathbf{H}) d\Omega - \omega^2 \int \mathbf{H}^* \cdot \mu \mathbf{H} d\Omega \quad (3)$$

其中 Ω 为 $x-y$ 平面内的一个区域; α 为一常数, 它的作用是引入约束函数, 以消除寄生的非物理解; * 表示转置共轭; 磁场矢量

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(x, y, z) &= [H_x \quad H_y \quad H_z]^T = \\ &[h_x(x, y) \quad h_y(x, y) \quad ih_z(x, y)]^T \exp[i(\beta z - \omega t)]\end{aligned}\quad (4)$$

其中 ih_z 为纯虚数, 即 h_z 为实数。对单轴晶体, 其主轴系的对角介电张量元素 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$, 为简单起见, 本文只考虑晶体光轴在 $x-y$ 面内的情况, 此时介电张量矩阵中非对角线元素不为零的项为 $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$, 即有

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

另外, 令

$$\mathbf{h} = [h_x(x, y) \quad h_y(x, y) \quad h_z(x, y)]^T \quad (6)$$

这一表示将使下面对变分关系的具体公式推导表达变得简洁。

2.3 平面波导模场的边界条件

对于平面波导, 设其折射率沿深度 x 方向分布。即 $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, 从而有

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}(x, z) \\ h_x &= h_x(x) \\ h_y &= h_y(x) \\ h_z &= h_z(x)\end{aligned}\quad (7)$$

介电常数不连续的界面处模场应满足的连续条件为

$$[h_x^2 \quad h_y^2 \quad h_z^2]^T = [h_x^1 \quad h_y^1 \quad h_z^1]^T \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta(p_{22}^2 - p_{22}^1)/p_{22}^2 & \beta(p_{12}^1 - p_{12}^2)/p_{22}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{33}^1/p_{33}^2 & 0 \\ 0 & 0 & p_{22}^1/p_{22}^2 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}_1 \quad (9)$$

其中上下标 1、2 对应着两种不同折射率的介质, 且有

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix} = \epsilon^{-1} \quad (10)$$

当 $\epsilon_{12} \neq 0$ 时, 平面波导中存在混合模, 三个磁场向量间相互有耦合关系。当 $\epsilon_{12} = 0$ 时, 波导中存在着两种不同偏振态的模式, 即 TE 模和 TM 模。

对 TE 模有

$$h_y \equiv 0 \quad (11)$$

对 TM 模则有

$$h_x \equiv h_z \equiv 0 \quad (12)$$

3 传递函数解

将平面波导沿其折射率的分布方向 (x 方向) 化分为一系列的一维单元, 其形式如图 1 所示。其中, ζ 为单元 i 内的局部坐标, 单元 i 的长度为 $2a_i$, 则 ζ 的取值范围为 $[-a_i, a_i]$, 将此区域记为 Ω 。单元 i 内介电常数 ϵ_i 和磁场矢量 \mathbf{h}_i 都为 ζ 的函数, 即

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon(\zeta), \\ \mathbf{h}_i &= \mathbf{h}_i(\zeta) \end{aligned} \quad (13)$$

Fig. 1 Element division of the planar waveguide

将(4)、(10)式代入(3)式并整理得

$$\delta \left\{ \sum_i \int_{\Omega} \mathbf{h}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{h}_i' + 2\mathbf{h}_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_i^T (2\mathbf{C}_i + \mathbf{D}_i) \mathbf{h}_i \right\} d\Omega_i = 0 \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i' &= \frac{d\mathbf{h}_i}{dx} = \frac{d\mathbf{h}_i}{d\zeta} \\ \mathbf{A}_i &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p_{33}^i & 0 \\ 0 & 0 & p_{22}^i \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta p_{22}^i & \beta p_{12}^i & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 & -\beta^2 p_{12}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_i &= \begin{bmatrix} \beta^2 p_{22}^i - \omega^2 \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 p_{11}^i - \omega^2 \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

展开(14)式的变分可以得到

$$[-\mathbf{A}_i \mathbf{h}_i'' + (\mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_i) \mathbf{h}_i' + (\mathbf{C}_i^T + \mathbf{C}_i + \mathbf{D}_i) \mathbf{h}_i] = 0 \quad (15)$$

将(15)式写成传递函数的形式, 有

$$\frac{d}{dx}\eta_i(x) = F_i\eta_i(x) \quad (16)$$

其中,

$$\eta_i = \begin{bmatrix} h_i \\ \frac{dh_i}{dx} \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} O & I \\ A_i^{-1}(C_i^T + C_i + D_i) & A_i^{-1}(B_i^T - B_i) \end{bmatrix}$$

这里, O 为零矩阵, I 为单位矩阵, 下同。

引进恒等式

$$M_i\eta_i(-a_i) + N_i\eta_i(a_i) = \gamma_i \quad (17)$$

其中,

$$M_i = \begin{bmatrix} I & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad N_i = \begin{bmatrix} O & O \\ I & O \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} h_i(-a_i) \\ h_i(a_i) \end{bmatrix}$$

由于 F_i 关于 ζ 连续, 当 a_i 足够小时, 所取单元 i 内的折射率分布可用其中值代替, 这时 F_i 为常数矩阵, 从而由(16)、(17)式可得下列形式的解

$$\eta_i(x) = \exp(F_i x) K_i \gamma_i \quad (18)$$

其中,

$$K_i = [M_i \exp(-F_i a_i) + N_i \exp(F_i a_i)]^{-1} \quad (19)$$

将连续条件(8)、(9)式简记为

$$\eta_i(a_i) = Q(\beta)\eta_{i+1}(-a_{i+1}) \quad (20)$$

代入(18)式得

$$\exp(F_i a_i) K_i \gamma_i = Q(\beta) \exp(F_{i+1} a_{i+1}) K_{i+1} \gamma_{i+1} \quad (21)$$

最后将各界面方程联立, 运用与有限元方法相同的组装技术, 并注意到 F_i 、 K_i 与 α 、 β 、 ω 有关, 可得

$$R(\alpha, \beta, \omega) \gamma = 0 \quad (22)$$

其中, $\gamma = \{\gamma_1^T, \gamma_2^T, \dots\}^T$, R 由式(21)组集得到。

由(22)式可知, 选定合适的约束参数 α , 使 γ 存在非零解时应有

$$\det[R(\beta, \omega)] = 0 \quad (23)$$

(23)式即为传播常数 β 与圆频率 ω 之间的关系。得到 γ 的非零解之后将其回代入(18)式, 即可得到模场的分布情况。

以上讨论是针对混合模的一般性情况进行的。TE 模和 TM 模是它的特例, 处理时只须考虑(11)式、(12)式, 此时公式的推导和计算将变得非常简单。

4 数值结果

4.1 折射率阶跃型分布的平板波导

首先考虑一个简单的阶跃型折射率分布平板波导作为算例, 以验证方法的精度。这个平板波导存在着严格的解析解, 其结构如图2所示, 其中 n_g 、 n_s 、 n_c 分别表示薄膜层、衬底和覆盖层的折射率, w 为薄膜层厚度。各参数取值分别为: $n_g = 1.5$, $n_c = n_s = 1.4$, $w = 1.0 \mu\text{m}$, $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ 。

解超越方程可以得到波导 TE₀ 模的有效折射率的精确值 $n_e = \beta/k_0 = 1.457728$, 其中 k_0

为真空中波数。表 1 中列出了用本文的方法和有限元法^[10] 分别求解 n_e 所得计算结果和所取单元数的比较。可见, 用有限元法计算要取 800 个单元才收敛^[10], 用传递函数方法只需 3 个单元就得了到精确解。

Table 1. Comparison of effective index values using the TFM with FEM

Mesh	TFM	FEM ^[10]
3	1.457728	
50		1.457614
100		1.457707
400		1.457727
800		1.457728

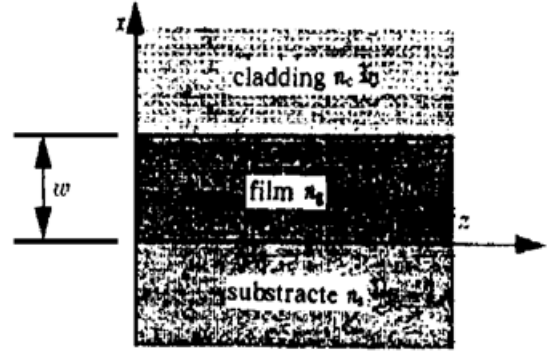


Fig. 2 Schematic structure of the plate waveguide

4.2 折射率连续分布的平面波导

扩散平面光波导具有非对称的渐变折射率分布, 先考虑各向同性介质波导的情况。为便于比较, 本文所取扩散光波导的折射率分布及计算参数与文献[11]一致, 即有:

$$\begin{aligned} n^2(x) &= n_s^2 + (n_g^2 - n_s^2) \exp(-x/D_x), & x > 0 \\ n^2(x) &= n_c^2, & x < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

其中 n_s 为衬底的折射率, n_c 为覆盖层折射率, n_g 为波导芯层的最大折射率, D_x 为扩散深度。用传递函数方法计算得到波导的 TE₀ 模的归一化传播常数 $B = [(\beta/k_0)^2 - n_s^2]/(n_g^2 - n_s^2)$ 列于表 2, 表 2 也给出了 B 的精确结果^[11] 及 Goyal 等人加上修正的近似方法的结果^[11] 和 Ferdinand 等人的有限元法计算结果^[10]。计算中波导各参数取值如下: $n_g^2 - n_s^2 = 0.187$, $n_s = 2.177$, $n_c = 1.0$, $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$, 归一化频率 $V = k_0 b \sqrt{n_g^2 - n_s^2}$, 其中 k_0 为真空中波数, b 为波导深度。对于扩散波导, 在定义归一化频率时, 可认为 $b = D_x$ 。从表 2 可看到, 与 Goyal 等人经修正的近似方法的结果和文献[10]中有限元法的结果比起来, 本文方法的结果与精确值更接近, 尤其是对低阶模。就计算过程而言, 文献[10]中划分了 800 个单元, 用本文方法得到表 2 的结果只需划分 50 个单元。

Table 2. Normalized propagation for the TE mode

V	Exact	TFM	Goyal ^[11]	FEM ^[10]
2.0	0.104954	0.104956	0.105028	0.104
2.5	0.171442	0.171493	0.171520	
3.0	0.229188	0.229206	0.229260	0.227
3.5	0.278650	0.278729	0.278717	
4.0	0.321179	0.321199	0.321235	0.318
5.0	0.390292	0.390393	0.390366	
6.0	0.444075	0.444185	0.444110	
7.0	0.487244	0.487365	0.487272	
8.0	0.522776	0.522899	0.522800	

4.3 扩散各向异性平面波导

这里研究的扩散各向异性平面波导为 y 切 x 传 LiNbO₃ 波导, 光轴位于 x - y 平面, 与 x 轴的夹角为 θ , 波导层内寻常光和非常光的折射率分布为

$$\left. \begin{aligned} n_o(x) &= n_{os} + \Delta n_{o}g(x), & x > 0 \\ n_e(x) &= n_{es} + \Delta n_{e}g(x), & x > 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中 $g(x) = \exp[-(x/D_x)^2]$ 为高斯函数, D_x 为扩散深度, n_{os} 、 n_{es} 分别为衬底寻常光和非常光的折射率。 Δn_o 、 Δn_e 分别为寻常光和非常光在波导芯层和衬底之间最大折射率差。覆盖层为空气, 折射率 $n_c = 1.0$ 。波导区域介电张量矩阵的非零元素则分别为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= n_e^2(x) \cos^2 \theta + n_o^2(x) \sin^2 \theta \\ \epsilon_{22} &= n_o^2(x) \cos^2 \theta + n_e^2(x) \sin^2 \theta \\ \epsilon_{33} &= n_o^2(x) \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{21} = [n_e^2(x) - n_o^2(x)] \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

用传递函数方法计算了 $D_x = 5.0 \mu\text{m}$ 时前四阶 TE 模的有效折射率及 $D_x = 3.0 \mu\text{m}$ 时前两阶 TE 模的有效折射率, 与有限元方法^[10]和多层近似法(MAM)^[12]的计算结果同列于表3。计算中波导各参数分别取为: $\theta = 0^\circ$, $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, $n_{es} = 2.20$, $n_{os} = 2.286$, $\Delta n_o = \Delta n_e = 0.01$ 。从表3中可以看出, 对这一扩散各向异性波导问题, 本文方法的结果与 Ferdinand 等人的有限元结果很接近, 但有限元法需要取800个单元, 本文方法只需200个单元结果即收敛得很好。

Table 3. Effective index of TE modes

$D_x / \mu\text{m}$	TE mode	TFM	FEM ^[11]	MAM ^[12]
3.0	0	2.20581987	2.20582	2.20583
	1	2.20159323	2.20159	2.20160
5.0	0	2.20736010	2.20736	2.20783
	1	2.20427368	2.20427	2.20430
	2	2.20185171	2.20184	2.20187
	3	2.20028515	2.20028	2.20027

结束语 把一种新的数值方法——传递函数方法引入了光波导的计算。从扩散各向异性平面波导的一般情况出发, 推导出传递函数解的计算公式, 分别计算了折射率阶跃型分布的平板波导、扩散各向同性及扩散各向异性平面波导的传播特性。与有限元法的计算结果比较表明, 用传递函数方法分析计算扩散平面光波导问题具有精度高、计算工作量小、节省计算机时、可以将导波模场用形式上的解析式表达出来等特点, 证明传递函数方法用于光波导的分析计算是完全可行且具有优势的。

高伯龙院士对本文的工作给予了指点和十分有益的讨论, 并悉心验证了公式的推导和计算结果, 在此深表谢意。

参 考 文 献

- [1] G. B. Hocker, W. K. Burns. Mode dispersion in diffused channel waveguides by the effective index method. *Appl. Opt.*, 1977, **16**(1) ·113~ 118
- [2] A. Sharma. P. Bindal. Analysis of diffused planar and channel waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1993, **QE-29**(1) ·150~ 153
- [3] J. A. Fleck, Jr., M. D. Feit. Beam propagation in uniaxial anisotropic media. *J. Opt. Soc. Amer.*,

- 1983, **73**(7) ·920~ 926
- [4] E. Schweig, W. B. Bridges. Computer analysis of dielectric waveguides: A finite difference method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1984, **MTT-32**(5) ·531~ 541
- [5] N. Mabaya, P. E. Lagasse, P. Vandembuleke. Finite element analysis of optical waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1981, **MTT-29**(6) ·600~ 605
- [6] B. Yang, C. A. Tan. Transfer-functions of one dimensional distributed parameter systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1992, **59**(4) ·1009~ 1014
- [7] B. Yang. Distributed transfer function analysis of complex distributed systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1994, **61**(1) ·84~ 92
- [8] J. P. Zhou, B. Yang. A distributed transfer function method for analysis of cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1995, **33**(9) ·1698~ 1708
- [9] B. M. Azizur Rahman, J. Brian Davies. Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1984, **MTT-32**(8) ·922~ 928
- [10] F. A. Katsriku, B. M. A. Rahman, K. T. V. Grattan. Finite element analysis of diffused anisotropic optical waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 1996, **14**(5) ·780~ 786
- [11] I. C. Goyal, R. L. Gallawa, A. K. Ghatak. Methods of analyzing planar optical waveguides. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(1) ·30~ 32
- [12] K. Yamanouchi, T. Kamiya, K. Shibayama. New leaky surface waves in anisotropic metal-diffused optical waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1978, **MTT26**(4) ·298~ 305

Transfer Function Analysis of Diffused Planar Optical Waveguides

Feng Ying¹⁾ Li Xiangrong²⁾ Li Haiyang²⁾ Zhou Jianping²⁾

{ 1), Department of Applied Physics, National University of Defense Technology, Changsha 410073
2), Department of Aerospace Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073 }

(Received 3 October 1997; revised 7 January 1998)

Abstract A new numerical method-transfer function method-for analysis and calculation of optical waveguides is presented. By using this method, the characteristics of propagation for diffused planar waveguides are calculated and compared with the finite element method. The results show that it is a relatively simple and exact method for using transfer function method to deal with the optical waveguides with graded refractive index profile.

Key words optical waveguide, transfer function method, graded refractive index profile.