

# 四频差动激光陀螺中的 S-P 各向异性效应

杨在富 袁晓东 张 斌 金世龙

(国防科技大学应用物理系, 长沙 410073)

**摘 要** 理论分析了四频差动激光陀螺中左、右旋椭圆偏振模式的非对称性。这种非对称性对激光陀螺性能的影响是至关重要的。而引起这种非对称性的物理因素是环型腔 S-P 相位和损耗的各向异性。

**关键词** 激光陀螺, 环形激光器, S-P 各向异性。

## 1 引 言

激光陀螺是利用光学 Sagnac 效应制作的一种敏感转速的光学元件, 它在许多方面具有机械式陀螺仪无可比拟的优点, 是捷联式惯性导航的理想器件。但众所周知, 激光陀螺具有闭锁效应<sup>[1]</sup>, 围绕如何解决锁区问题, 人们提出了各种各样的偏频方案, 四频差动激光陀螺即是其中的一种, 其结构如图 1 所示。

它的基本思想是: 利用水晶晶体对通过其光轴光线的旋光效应, 在环形激光器中产生相向运行的左旋一对模和右旋一对模, 此时相向运行的左旋一对模频率相等, 同时右旋一对模频率也相等, 在光路中再安装一个磁旋光元件(光学法拉弟效应), 则一对左旋模和一对右旋模在磁旋光器的作用下继续发生频率分裂(如图 2), 并且原则上法拉弟效应对左旋一对模和

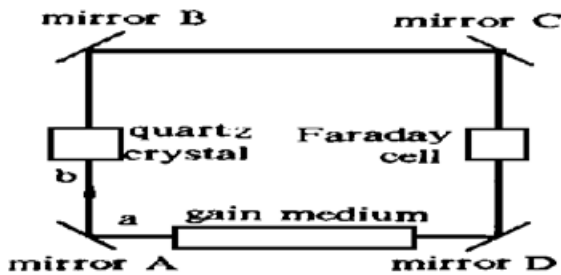


Fig. 1 The differential laser gyro

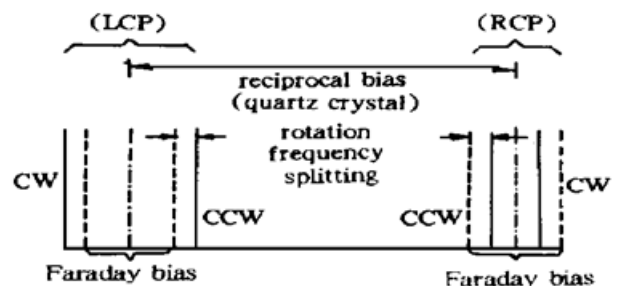


Fig. 2 The mode spectrum in a differential laser gyro

右旋一对模产生的频率分裂相等, 最终在转动作用下, 左、右旋模的拍频<sup>[1]</sup>:

$$\nu = \nu_H + \nu_R,$$

$$\nu_r = \nu_H - \nu_R$$

(1)

其中  $\nu_R = 4A\Omega/L\lambda$ ,  $A$ 、 $L$  和  $\lambda$  分别为环型激光器环路面积、谐振腔长和激光波长,  $\Omega$  为转动角速度在激光环路轴线方向的分量,  $\nu_H$  表示法拉弟效应产生的频率分裂。通过信号处理电路,

取:

$$\Delta v = v_l - v_r = 2v_R \quad (2)$$

即得到正比于转动角速度  $\Omega$  的陀螺信号。

从上述四频差动激光陀螺的工作原理可知, 环型激光器中圆偏振光工作锁区小<sup>[2]</sup>。采用光学偏频, 偏频量大, 不过锁区, 没有过锁区误差。陀螺没有机械活动部件, 抗冲击、振动能力强。围绕进一步提高陀螺的性能和精度, 本文作了一系列误差分析, 文中从理论上研究了环路的 S-P 各向异性造成的左右旋非对称性。

关于四频差动激光陀螺内的光场偏振, 人们一般认为是圆偏振模式<sup>[1, 2]</sup>, 而文献[3]中讨论了光场的椭圆偏振态, 但文中忽略了 S-P 相位的各向异性, 因此未能得出左、右旋模式的差异。

## 2 物理模型

一个圆偏振光环型激光器由偶数个(本文为 4 个)反射镜片所组成(如图 1), 腔内有一个水晶旋光晶体并且充有增益介质。光线从  $a$  点出发, 首先经 A 镜片反射。由于镜片反射的 S-P 各向异性, 将其振幅反射率分别记为  $r_{SA}$ 、 $r_{PA}$ , 相位延迟分别记为  $\delta_{SA}$ 、 $\delta_{PA}$ 。根据光学偏振态的琼斯(Jones)矢量描述方法, 镜片 A 对光线偏振态(琼斯矢量)的变换矩阵为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{bmatrix} E_{Pb} \\ E_{Sb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{PA} i \exp(i\delta_{PA}) & 0 \\ 0 & -r_{SA} i \exp(i\delta_{SA}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{Pa} \\ E_{Sa} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中  $E_{Pj}$ 、 $E_{Sj}$  分别为电场在 P、S 方向的分量,  $j = a, b$ 。同理可得 B、C、D 镜片对光线琼斯矢量的变换矩阵。

在环形腔中使用的水晶片为一旋光晶体, 它对沿其光轴方向通过的光线具有旋转光线偏振方向的作用, 设旋转角度为  $\theta$ , 则水晶晶体对光线琼斯矢量  $\begin{bmatrix} E_P \\ E_S \end{bmatrix}$  的旋转矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}。$$

由于磁旋光元件的旋光角只有水晶旋光角  $\theta$  的  $10^{-3}$ , 因此它对光学偏振态的影响可以忽略。这种光线从  $a$  点出发, 沿环路运行一周再回到  $a$  点的总光学变换矩阵为

$$A' = \exp(i\delta_S) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \exp(i\delta_S) A = \exp(i\delta_S) g \begin{bmatrix} r_{P2} \exp(i\delta_2) & 0 \\ 0 & -r_{S2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{P1} \exp(i\delta_1) & 0 \\ 0 & -r_{S1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $g$  表示激光介质增益,  $r_{P2} = r_{PB}r_{PC}r_{PD}$ ,  $r_{S2} = r_{SB}r_{SC}r_{SD}$ ,  $r_{P1} = r_{PA}$ ,  $r_{S1} = r_{SA}$ ,  $\delta_2 = \delta_{PD} - \delta_{SD} + \delta_{PC} - \delta_{SC} + \delta_{PB} - \delta_{SB}$ ,  $\delta_1 = \delta_{PA} - \delta_{SA}$ ,  $\delta_S = \delta_{SD} + \delta_{SC} + \delta_{SB} + \delta_{SA}$ 。

模式在腔内自再现的条件要求<sup>[1]</sup>:

$$A \begin{bmatrix} E_{Pa} \\ E_{Sa} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} E_{Pa} \\ E_{Sa} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中  $|\lambda| = 1$ , 这由增益  $g$  保证。由于没考虑光场空间渡越的相位延迟, 所以  $\lambda$  一般为复数。仅当  $\det(A - \lambda I) = 0$  时才成立,  $I$  为单位矩阵, 于是得到:

$$\lambda_{\pm} = \frac{A_{11} + A_{22} \pm \sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}}}{2} \quad (6)$$

相应于  $\lambda_{\pm}$  的本征矢为( $\theta \neq 0$ ,  $\theta = 0$  时见特例 3):

$$\begin{bmatrix} E_{P\pm} \\ E_{S\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{12} \\ A_{11} - \lambda_{\pm} \end{bmatrix} \quad (7)$$

上式中的本征矢各分量一般不为纯实数或纯虚数, 也就是说椭圆偏振光的长短轴并非与 S、P 方向重合。将原坐标系旋转  $\varphi_{\pm}$  角度, 则在新坐标系中

$$\begin{bmatrix} E'_{P\pm} \\ E'_{S\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{\pm} & -\sin \varphi_{\pm} \\ \sin \varphi_{\pm} & \cos \varphi_{\pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{P\pm} \\ E_{S\pm} \end{bmatrix} \quad (8)$$

选择  $\varphi_{\pm}$  使得

$$\frac{E'_{S\pm}}{E'_{P\pm}} = \mp i\zeta_{\pm} \quad (9)$$

其中  $\zeta_{\pm}$  为实数,  $|\zeta_{\pm}| \leq 1$ 。由此可求得左、右旋模式的椭圆度

$$\epsilon_{\pm} = \frac{|E'_{P\pm}|^2 - |E'_{S\pm}|^2}{|E'_{P\pm}|^2 + |E'_{S\pm}|^2} = \frac{1 - \zeta_{\pm}^2}{1 + \zeta_{\pm}^2} \quad (10)$$

设

$$E_{P\pm} = u_{\pm} + iv_{\pm}, \quad E_{S\pm} = x_{\pm} + iy_{\pm} \quad (11)$$

将(9)、(11)式代入(8)式, 并展开可得

$$W_{\pm} \exp(i\delta_{\pm}) \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i\zeta_{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\pm} \cos \varphi_{\pm} + iv_{\pm} \cos \varphi_{\pm} - x_{\pm} \sin \varphi_{\pm} - iy_{\pm} \sin \varphi_{\pm} \\ u_{\pm} \sin \varphi_{\pm} + iv_{\pm} \sin \varphi_{\pm} + x_{\pm} \cos \varphi_{\pm} + iy_{\pm} \cos \varphi_{\pm} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中  $W_{\pm} \exp(i\delta_{\pm})$  即表示  $E'_{P\pm}$ ,  $W_{\pm}$  和  $\delta_{\pm}$  均为实数。令方程两边实部与虚部相等, 即得到关于  $W_{\pm}$ 、 $\delta_{\pm}$ 、 $\zeta_{\pm}$  和  $\varphi_{\pm}$  的一组方程:

$$\begin{aligned} W_{\pm} \cos \delta_{\pm} &= u_{\pm} \cos \varphi_{\pm} - x_{\pm} \sin \varphi_{\pm}, & W_{\pm} \sin \delta_{\pm} &= v_{\pm} \cos \varphi_{\pm} - y_{\pm} \sin \varphi_{\pm}, \\ \pm \zeta_{\pm} W_{\pm} \sin \delta_{\pm} &= u_{\pm} \sin \varphi_{\pm} + x_{\pm} \cos \varphi_{\pm}, & \mp \zeta_{\pm} W_{\pm} \cos \delta_{\pm} &= v_{\pm} \sin \varphi_{\pm} + y_{\pm} \cos \varphi_{\pm}, \end{aligned} \quad (13)$$

求解此方程组可得:

$$\varphi_{\pm} = \text{tg}^{-1} [(-\sigma_{\pm} \pm \sqrt{\sigma_{\pm}^2 + 4})/2] \quad (14)$$

$$\zeta_{\pm} = (-\omega_{\pm} \pm \sqrt{\omega_{\pm}^2 - 4})/2 \quad (15)$$

(14) 式中的“ $\pm$ ”分别代表左、右旋椭圆偏振光其长、短轴(或短、长轴)方向。(15) 式中的“ $\pm$ ”要根据  $|\zeta_{\pm}| \leq 1$  选取。将(14)、(15) 式中下标改为“ $\pm$ ”, 即可得  $\varphi$  和  $\zeta$ 。上式中  $\sigma_{\pm}$  和  $\omega_{\pm}$  的表达式为:

$$\sigma_{\pm} = \frac{-u_{\pm}^2 + x_{\pm}^2 - v_{\pm}^2 + y_{\pm}^2}{u_{\pm}x_{\pm} + v_{\pm}y_{\pm}} \quad (16)$$

$$\omega_{\pm} = \pm \frac{u_{\pm}^2 + x_{\pm}^2 + v_{\pm}^2 + y_{\pm}^2}{u_{\pm}y_{\pm} - v_{\pm}x_{\pm}} \quad (17)$$

从引言中四频差动激光陀螺的原理不难发现, 这种陀螺仪性能的好坏, 精度的高低一定程度上依赖于左、右旋的对称性。从上面计算结果中可以得到  $\varphi_+ - \varphi_-$  和  $\epsilon_+ - \epsilon_-$ , 它们分别表示同向传输的左、右旋椭圆偏振光长、短轴方向的非对称性和椭圆度的非对称性。关于

这种非对称性对陀螺性能的影响, 作者将有另文分析。

### 3 计算结果

由于一般情况下计算结果的解析表达式非常复杂, 只能借助于计算机解出其数值结果, 在此之前先分析几个特例。

特例 1:  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  时,  $A$  为实矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} gr_{P1}r_{P2} \cos \theta & -gr_{P2}r_{S1} \sin \theta \\ gr_{P1}r_{S2} \sin \theta & gr_{S1}r_{S2} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

由(6)式得:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}g[(r_{P1}r_{P2} + r_{S1}r_{S2}) \cos \theta \pm i \sqrt{4r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2} \sin^2 \theta - (r_{P1}r_{P2} - r_{S1}r_{S2})^2 \cos^2 \theta}] \quad (19)$$

根据(19)式, 若在环形谐振腔中得到椭圆偏振光,  $\theta$  需满足如下条件:

$$\tan^2 \theta > \frac{(r_{P1}r_{P2} - r_{S1}r_{S2})^2}{4r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2}} \quad (20)$$

在此条件下将(7)式化为(11)式的形式可得:

$$\left. \begin{aligned} u_{\pm} &= gr_{P2}r_{S1} \sin \theta, \\ v_{\pm} &= 0, \\ x_{\pm} &= \frac{1}{2}g(r_{P1}r_{P2} - r_{S1}r_{S2}) \cos \theta \\ y_{\pm} &= \mp \frac{1}{2}g \sqrt{4r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2} \sin^2 \theta - (r_{P1}r_{P2} - r_{S1}r_{S2})^2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(21)式代入(16)式得:

$$\sigma_+ = \sigma_- = \frac{2(r_{P1}r_{S2} - r_{S1}r_{P2}) \operatorname{tg} \theta}{r_{P1}r_{P2} - r_{S1}r_{S2}} \quad (22)$$

根据(14)式, 显然  $\varphi_+ = \varphi_-$ 。

(21)式代入(17)式得:

$$\omega_+ = \omega_- = - \frac{2(r_{P1}r_{S2} + r_{S1}r_{P2})}{\sqrt{4r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2} - (r_{P1}r_{P2} - r_{S1}r_{S2})^2 \cot^2 \theta}} \leq -2, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (23)$$

根据(15)式, 显然  $\zeta_+ = \zeta_-$ , 因此  $\epsilon_+ = \epsilon_-$ 。也就是说, 在  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , 且  $\theta$  满足(20)式的条件下, 在环形腔内  $a$  点可形成左右旋完全对称的椭圆偏振光。

特例 2: 水晶晶体旋光角  $\theta = \pi/2$  时, 类似特例 1, 依次可得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -gr_{P2}r_{S1} \exp(i\delta_2) \\ gr_{P1}r_{S2} \exp(i\delta_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{A_{12}A_{21}} = \pm ig \sqrt{r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2} \exp[i(\delta_1 + \delta_2)/2]} \quad (25)$$

$$u_{\pm} = gr_{P2}r_{S1} \cos \delta_2, \quad x_{\pm} = \pm g \sqrt{r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2} \sin[(\delta_1 + \delta_2)/2]} \quad (26)$$

$$v_{\pm} = gr_{P2}r_{S1} \sin \delta_2, \quad y_{\pm} = \mp g \sqrt{r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2} \cos[(\delta_1 + \delta_2)/2]}$$

对于  $\varphi_{\pm}$ , 当  $\delta_1 \neq \delta_2$  时,

$$\sigma_{\pm} = \pm \frac{r_{P2}r_{S1} - r_{P1}r_{S2}}{\sqrt{r_{P1}r_{P2}r_{S1}r_{S2} \sin[(\delta_2 - \delta_1)/2]}} \quad (27)$$

此时  $(\varphi_+ - \varphi_-)$  只是  $(\delta_2 - \delta_1)$  的函数, 其关系曲线如图 3 所示。当  $r_{P2}r_{S1} = r_{P1}r_{S2}$  时,  $\sigma_{\pm} = 0$ ,  $\varphi_+ = \varphi_- = \pm \pi/4$ ,  $\varphi_+ - \varphi_- = 0$ 。当  $\delta_2 = \delta_1$  时, 根据(7)、(24)和(25)式, 得

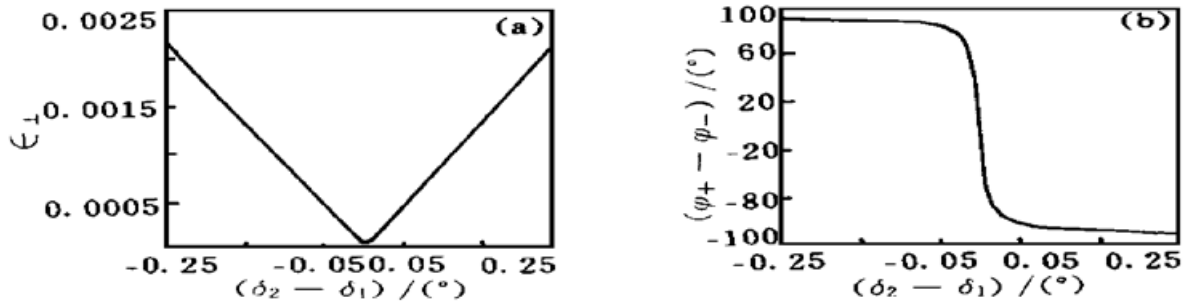


Fig. 3 (a) Ellipticity of the right and left elliptically polarized modes in the differential laser gyro (DILAG)  $\epsilon_+$ 、 $\epsilon_-$  vs  $(\delta_2 - \delta_1)$ . (b) The direction difference  $(\psi_+ - \psi_-)$  vs  $(\delta_2 - \delta_1)$ . Parameters are  $\theta = 90^\circ$ ,  $r_{P1} = 0.99980$ ,  $r_{S1} = 0.99998$ ,  $r_{P2} = 0.99965$ ,  $r_{S2} = 0.99996$

$$\frac{E_{S\pm}}{E_{P\pm}} = \mp i \left( \sqrt{\frac{r_{P1}r_{S2}}{r_{P2}r_{S1}}} \right) \tag{28}$$

显然此时  $\psi_+ = \psi_- = 0$  或  $\pi/2$ 。

对于  $\zeta_{\pm}$ , 将(26)式代入(17)式得:

$$\omega_+ = \omega_- = - \frac{r_{P2}r_{S1} + r_{P1}r_{S2}}{\sqrt{r_{S1}r_{P1}r_{S2}r_{P2}} \cos [(\delta_2 - \delta_1)/2]} \leq -2 \tag{29}$$

由此知  $\zeta_+ = \zeta_-$ , 故  $\epsilon_+ = \epsilon_- = \epsilon$ 。在此情况下  $\epsilon$  也只是  $(\delta_2 - \delta_1)$  的函数, 其关系曲线如图 3 所示。特别当  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  时, 根据(28)式得:

$$\epsilon_+ = \epsilon_- = \left| \frac{r_{P2}r_{S1} - r_{P1}r_{S2}}{r_{P2}r_{S1} + r_{P1}r_{S2}} \right| \tag{30}$$

此时若  $r_{P2}r_{S1} = r_{P1}r_{S2}$ , 则  $\zeta_{\pm} = 1$ ,  $\epsilon_{\pm} = 0$ , 在环形腔内  $a$  点形成理想的圆偏振光。

特例 3:  $\theta = 0$  时, 由(4)式:

$$A = \begin{bmatrix} gr_{P1}r_{P2} \exp [i(\delta_1 + \delta_2)] & 0 \\ 0 & gr_{S1}r_{S2} \end{bmatrix} \tag{31}$$

本征值  $\lambda_1 = gr_{P1}r_{P2} \exp [i(\delta_1 + \delta_2)]$ ,  $\lambda_2 = gr_{S1}r_{S2}$ , 其相应归一化本征矢

$$\begin{bmatrix} E_{P1}^0 \\ E_{S1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_{P2}^0 \\ E_{S2}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

此时环形激光陀螺中存在的是完全线偏振光, 不是本文所讨论的内容。

对于更一般的情况, 这是只给出部分数值结果, 如下面图 4、图 5 所示。从某种角度讲, 它将比解析表达式更加直观。

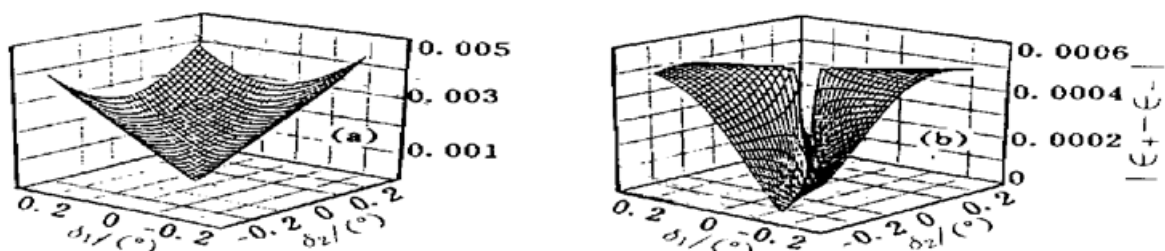


Fig. 4 (a) Ellipticity of the right elliptically polarized mode in the DILAG  $\epsilon_+$  vs  $\delta_1$  and  $\delta_2$ . (b) Ellipticity difference  $|\epsilon_+ - \epsilon_-|$  vs  $\delta_1$  and  $\delta_2$ . Parameters are the same as those in Fig. 3 except for  $\theta = 45^\circ$

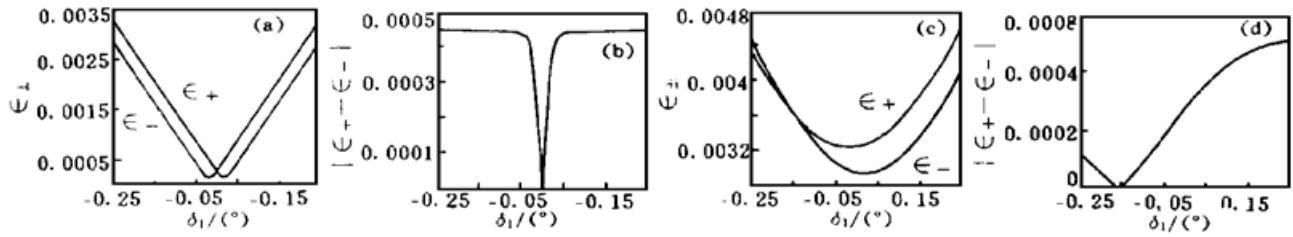


Fig. 5 (a) The ellipticity  $\epsilon_+$ 、 $\epsilon_-$  and (b) Ellipticity difference  $|\epsilon_+ - \epsilon_-|$  vs  $\delta_1$  while  $\delta_2 = 0^\circ$ . (c) Ellipticity  $\epsilon_+$ 、 $\epsilon_-$  and (d) ellipticity difference  $|\epsilon_+ - \epsilon_-|$  vs  $\delta_1$  while  $\delta_2 = 0.25^\circ$ . Other parameters are the same as those in Fig. 4

**结 论** 利用光学琼斯矢量方法, 全面分析了平面腔结构四频差动激光陀螺中的 S-P 各向异性所产生的左、右旋椭圆偏振光长、短轴方向及椭圆度的非对称性。当满足条件  $\theta = \pi/2$ ,  $r_{P2}r_{S1} = r_{P2}r_{S1}$ ,  $\delta_1 = \delta_2$  时, 四频差动激光陀螺在增益介质处的光学偏振态为理想的圆偏振。

### 参 考 文 献

- [1] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti *et al.*, The ring laser gyro. *Rev. Mod. Phys.*, 1985, **57**(1) : 61~ 104
- [2] 高伯龙, 李树堂, 激光陀螺. 长沙: 国防科技大学出版社, 1984. 19~ 30
- [3] 高伯龙, 水晶片的几个光学性能(一). 国防科技大学学报, 1982, (1) : 59~ 72
- [4] E. 赫克特, A. 赞斯著, 秦克诚, 詹达三, 林福成译, 光学. 北京: 人民教育出版社, 1979. 510~ 516

## The S-P Anisotropy Effects in Differential Laser Gyros

Yang Zaifu Yuan Xiaodong Zhang Bin Jin Shilong

(Department of Applied Physics, The National University of Defence Technology, Changsha 410073)

(Received 28 May 1997; revised 22 September 1997)

**Abstract** A theoretical study of the mode difference between the left and right elliptically polarized light in the differential laser gyro is presented. This difference is critical for the differential laser gyro operation and it is caused by the S-P phase and Q anisotropy of the ring cavity.

**Key words** laser gyro, ring laser, S-P anisotropy.