

# 双折射位相差的拟合表达式及其应用

范志新 张志东

(河北工业大学应用数理系, 天津 300130)

**摘 要** 探讨双折射晶体的 o 光和 e 光的位相差的表达式, 对文献中常引用的表达式作近似展开, 得到一个适用性的拟合表达式及其拟合系数与晶体或液晶双折射率之间的关系, 并给出该表达式的简单应用。它可作为设计晶体旋转法测试液晶双折射和预倾角测试仪的原理。

**关键词** 液晶显示, 双折射, 预倾角, 位相差

在液晶显示器件中, 为防止施加电压时发生倾斜畴向错, 提高液晶盒成品率和显示的均匀性及器件的电光特性, 液晶分子需要有一定的预倾角<sup>[1]</sup>。精确测定液晶分子预倾角是很重要的。晶体旋转法预倾角测试仪由于测试精度高, 测试时间短而在研究中得到广泛的使用。该预倾角测试仪所依据的原理是一般文献中经常引用的 o 光和 e 光的位相差表达式<sup>[2, 3]</sup>。但是运用此表达式时, 却要求折射率为已知, 而液晶层厚度通常约为 50  $\mu\text{m}$ , 然而实际生产上的液晶层厚度仅大致为 10  $\mu\text{m}$ , 这样就不适应对液晶显示器件成品率检验的在线应用, 这也为研制与测试工作带来不便。本文探讨双折射晶体的 o 光和 e 光的位相差的表达式, 对常用表达式作近似展开, 得到一个适用性的由实验数据作最小二乘曲线拟合而得到的拟合表达式, 并给出其拟合系数与晶体或液晶的双折射率之间的关系和对该表达式的简单应用。它可作为设计晶体旋转法测试超薄层液晶显示器件的液晶双折射和预倾角测试仪的原理。

## 1 常用表达式

对于正单轴晶体, 以  $\alpha$  为入射角、 $\theta$  为光轴与入射面间的夹角, 文献中常引用的 e 光和 o 光的位相差表达式可写成

$$\delta(\alpha) = \frac{2\pi d}{\lambda} \left[ \frac{n_e n_o}{n^2} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{n_o^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{n_e^2 - n_o^2}{n^2} \cos \theta \sin \theta \sin \alpha \right] \quad (1)$$

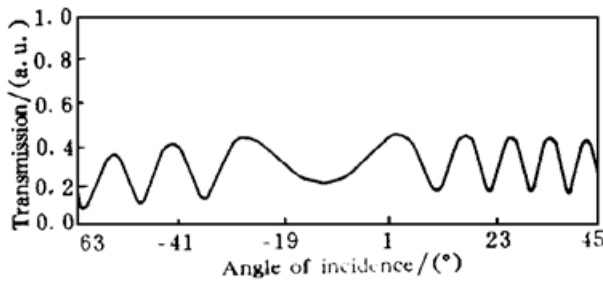
$$n^2 = n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta \quad (2)$$

式中  $n_o$  为 o 光折射率,  $n_e$  为 e 光折射率,  $\lambda$  为波长,  $d$  为晶体厚度, 对称极值点角度  $\alpha_m$  满足  $(d\delta/d\alpha)\alpha_m = 0$ , 即

$$\frac{n_e^2 - n_o^2}{n^2} \cos \theta \sin \theta + \sin \alpha_m \left[ \frac{n_e n_o}{n^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_m}} - \frac{1}{\sqrt{n_o^2 - \sin^2 \alpha_m}} \right] = 0 \quad (3)$$

将此式展开后取一级近似得到

$$\sin^2 \theta = - \frac{2n_o \sin \alpha_m}{(n_e + n_o) \sqrt{n_o^2 - \sin^2 \alpha_m}} \tag{4}$$



在已知  $n_e$  和  $n_o$  条件下, 由计算机找出对称极值点, 解方程(3) 得出  $\theta$ , 运用此表达式可以较为准确地测定预倾角。晶体双折射相干光透过率随入射角变化的实验曲线如图 1 所示。光源波长为 400 nm。

通过数值计算分析发现, 在  $\alpha_m < 25^\circ$ , 或  $\theta < 8^\circ$  的范围内, 有较简单的近似关系

$$\sin \alpha_m = - (n_e + n_o) \sin \theta' \tag{5}$$

Fig. 1 Transimission~ incidence angle curve

$n_o = 1.55774, n_e = 1.56731, \text{pretilt angle } 3.8^\circ$  对于液晶材料, 由(5) 式计算出的  $\theta'$  与由式(3) 计算出的  $\theta$  角度值结果相差小于  $0.1^\circ$ , 计算结果列于表 1。实际应用上, 液晶显示器件的预倾角都比较小, TN 型一般在  $3^\circ$  以下, STN 型在  $6^\circ$  左右, (5) 式是很适用的。

Table 1  $\theta' - \theta$  calculation comparison

		$\alpha_m / (^\circ)$	- 50	- 40	- 30	- 25	- 20	- 15	- 10	- 5
quartz	$\theta' / (^\circ)$		14.31	11.97	9.29	7.84	6.34	4.79	3.21	1.61
	$n_o = 1.5442$	$\theta / (^\circ)$	13.75	11.67	9.15	7.76	6.30	4.77	3.21	1.61
	$n_e = 1.5533$	$\Delta\theta / (^\circ)$	0.56	0.30	0.14	0.08	0.04	0.02	0.00	0.00
liquid crystal	$\theta' / (^\circ)$		14.01	11.72	9.09	7.67	6.20	4.69	3.14	1.58
	$n_o = 1.5064$	$\theta / (^\circ)$	13.43	11.40	8.95	7.59	6.16	4.67	3.14	1.58
	$n_e = 1.6573$	$\Delta\theta / (^\circ)$	0.58	0.32	0.14	0.08	0.04	0.02	0.00	0.00

## 2 拟合表达式

将(2) 式写成

$$n^2 = n_o^2 [1 + (n_e^2 - n_o^2) \sin^2 \theta / n_o^2] \tag{6}$$

利用(5) 式, 再利用  $x \ll 1$  时,  $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2+\dots$  和  $1/(1+x) \approx 1-x$ , 将(1) 式对  $\sin \alpha$  在  $\sin \alpha_m$  点作展开, 令  $\delta(\alpha) = 2\pi f(\alpha)$ , 则

$$f(\alpha) = \frac{d}{\lambda} \left[ \frac{n_e n_o}{n^2} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{n_o^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{(n_e^2 - n_o^2)}{n^2} \cos \theta \sin \alpha \right] \approx \frac{d}{\lambda} (n_e - n_o) \left[ \left( 1 + \frac{\sin^2 \alpha_m}{2n_o^2} \right) - \frac{\cos^2 \alpha_m}{2n_o^2} \left( 1 + \frac{3 \sin^2 \alpha_m}{2n_o^2} \right) (\sin \alpha - \sin \alpha_m)^2 + \dots \right] \tag{7}$$

根据所测的实验曲线数据, 用计算机作最小二乘曲线拟合, 给出一个多项式表达式

$$F(X) = A_1 + A_2 X + A_3 X^2 + A_4 X^3 + A_5 X^4 \tag{8}$$

一般  $A_1 > |A_3| > |A_2|, |A_4|, |A_5| \neq 0$ , 对比(7) 式, 得

$$X = \sin \alpha - \sin \alpha_m \tag{9}$$

$$A_1 \approx \frac{d}{\lambda} (n_e - n_o) \left[ 1 + \frac{\sin^2 \alpha_m}{2n_o^2} \right] \tag{10}$$

$$A_3 \approx - \frac{d(n_e - n_o)}{2\lambda n_o^2} \cos^2 \alpha_m \left[ 1 + \frac{3 \sin^2 \alpha_m}{2n_o^2} \right] \tag{11}$$

由(10)、(11)两式解出

$$n_o \approx [(1/2)(-A_1/A_3)\cos^2\alpha_m + \sin^2\alpha_m]^{1/2} \quad (12)$$

$$n_e \approx n_o + A_1\lambda/d \quad (13)$$

### 3 简单的应用

通常液晶材料产品说明书仅给出在 589 nm 波长下的  $n_e$  和  $\Delta n$  之值, 预倾角测试仪光源波长也常选用 589 nm。当液晶薄层仅为 10  $\mu\text{m}$  时, 一般液晶材料 ( $n_e$  和  $\Delta n$  不很大) 用 589 nm 波长测量, o 光和 e 光的位相差较小, 在入射角变化范围为  $-80^\circ \sim 80^\circ$  时, 也仅得到一个极大值, 干涉峰形很平, 难以确定对称点的角度, 测量预倾角  $\theta$  的误差很大。而用 500 nm 和 400 nm 波长测量时, 则能分别得到两个和三个极大值, 对称点角度选择的准确性可大大提高, 因此就有必要测试相应波长下的  $n_o$  和  $n_e$  的数据, 才能较准确计算出预倾角  $\theta$ , 从而拓宽晶体旋转法预倾角测试仪测试预倾角的适用范围。

对于(1)式, 当  $\delta = 2k\pi$  时, ( $k = 0, 1, \dots$ ), 透过光强度有极大值; 而当  $\delta = (2k + 1)\pi$  时, ( $k = 0, 1, \dots$ ), 透过光强度有极小值。器件的液晶层厚度用干涉法、千分尺或读数显微镜测定, 用单色仪选定测试波长。先由已知在 589 nm 波长下的  $n_e$  和  $\Delta n$  之值估算出(或凭经验选取)  $A_1$  值, 取  $k$  值为小于  $A_1$  的最大的正整数, 通过实验测量到对称极值点两侧的光强度取极大值或极小值的一系列数据( $k, \alpha_k$ ), ( $k - 1/2, \alpha_k - 1/2$ ), ( $k - 1, \alpha_{k-1}$ ) 等等, 用此数据组作表达式(8)的拟合, 将拟合表达式中的系数  $A_1$ 、 $A_3$  代入式(12)、(13)、(5)式, 解出  $n_e$ 、 $n_o$  及  $\theta$  值。

Table 2. Results of the  $n_o$ ,  $n_e$

wavelength		400 nm		500 nm		589 nm	
comparison		given value <sup>[6]</sup>	measured value	given value	measured value	given value	measured value
quartz sample 1 $d = (1180 \pm 2) \mu\text{m}$	$\alpha_m/(\circ)$	—	$-12.0 \pm 0.1$	—	$-11.9 \pm 0.1$	—	$-11.8 \pm 0.1$
	$n_o$	1.55774	1.5580	1.54878	1.5492	1.544246	1.5446
	$n_e$	1.56731	1.5675	1.55805	1.5585	1.553355	1.5537
	$\theta/(\circ)$	3.8	$3.8 \pm 0.1$	3.8	$3.8 \pm 0.1$	3.8	$3.8 \pm 0.1$
liquid crystal 2 $d = (59 \pm 2) \mu\text{m}$	$\alpha_m/(\circ)$	—	$-9.3 \pm 0.1$	—	$-9.2 \pm 0.1$	—	$-9.1 \pm 0.1$
	$n_o$	—	1.5116	—	1.5088	1.5064	1.5066
	$n_e$	—	1.6641	—	1.6592	1.6573	1.6574
	$\theta/(\circ)$	—	$2.9 \pm 0.1$	—	$2.9 \pm 0.1$	—	$2.9 \pm 0.1$
liquid crystal 3 $d = (15 \pm 2) \mu\text{m}$	$\alpha_m/\text{deg.}$	—	$1.6 \pm 0.5$	—	$-1.6 \pm 1.0$	—	$-1.5 \pm 3.0$
	$n_o$	—	1.5108	—	1.5056	—	1.4997
	$n_e$	—	1.6633	—	1.6556	—	1.6446
	$\theta/(\circ)$	—	$0.5 \pm 0.5$	—	$0.5 \pm 1.0$	—	$0.5 \pm 3.0$

应用拟合表达式(8)及拟合系数与  $n_e$ 、 $n_o$  的关系式(12)、(13)式, 对石英样品和不同盒厚的一些液晶样品进行实验, 表 2 列出应用拟合表达式计算  $n_e$ 、 $n_o$  及  $\theta$  值的部分结果, 其中石英样品不同波长下的  $n_e$ 、 $n_o$  值查表可知<sup>[4]</sup>, 液晶样品 2 在 589 nm 波长下的  $n_e$ 、 $n_o$  值为已知, 其它波长下的  $n_e$ 、 $n_o$  值未知。作为一种简便的测试方法, 本实验结果不够准确, 误差主要来源于

对  $d$ 、 $\lambda$  及  $\alpha$  测量的不准和该拟合表达式的过于近似。所用预倾角测试仪为长春物理所研制的液晶参数综合测试仪, 从表 2 实验结果可以看出, 对于液晶层约为  $50\ \mu\text{m}$ 、光源波长为  $589\ \text{nm}$  条件下预倾角测试精度为  $\pm 0.1^\circ$ , 双折射率测试精度可达  $0.4\%$ ; 对于液晶层厚约为  $10\ \mu\text{m}$ 、光源波长为  $589\ \text{nm}$  条件下预倾角测试精度仅为  $\pm 3^\circ$ , 双折射率测试精度也无法得到保证。而采用较短波长光源测试  $10\ \mu\text{m}$  厚液晶盒, 预倾角测试精度得到提高, 能达到  $0.5^\circ$ 。可设想, 如果采用波长更短的紫光作光源, 用相应对紫光灵敏的光电倍增管探测器, 用本文所给出的拟合表达式和关系式, 可望研制出对  $10\ \mu\text{m}$  厚液晶薄层适用的、精度也能达  $\pm 0.1^\circ$  的预倾角测试仪, 而且在不用特制液晶盒情况下还可用于对双折射率作粗略的测试。

### 参 考 文 献

- [1] 黄锡珉, 黄辉光, 李之熔译. 液晶器件手册, 北京: 航空工业出版社, 1992: 261~ 262
- [2] J. J. Bonvent, *Liquid Crystals*, 1995, **18**(5): 725
- [3] T. J. Scheffer, J. Nehring, Accurate determination of liquid-crystal tilt bias angles. *J. Appl. Phys.*, 1977, **48**(5): 1783~ 1792
- [4] 母国光, 战元令, 光学, 重庆: 人民教育出版社, 1978. 651

## Fitting Expression of the Birefringence Phase Retardation and Its Use

Fan Zhixin      Zhang Zhidong

(Department of Applied Mathematics and Physics,  
Hebei University of Technology, Tianjin 300130)

(Received 18 November 1996; revised 16 June 1997)

**Abstract** The phase retardation expression of ordinary and the extraordinary light in birefringence crystal is discussed. The common used expression is expanded a suitable fitting expression and the relations between its coefficient and the birefringence index are obtained. The use of the fitting expression is given. It can be a principle for designing liquid crystal and the pretilt angle tester using the method of crystal rotation.

**Key words** liquid crystal display, birefringence, pretilt angle, phase retardation.