

$k(k > 2)$ 光子 Jaynes-Cummings 模型中 自发辐射场的位相演化特性

李博峰

马爱群

(黑龙江省教育学院物理系, 哈尔滨 150080) (哈尔滨大学, 哈尔滨 150020)

张学如

(哈尔滨工业大学应用物理系, 哈尔滨 150001)

吕其光

(哈尔滨师范专科学校物理系, 哈尔滨 150080)

摘 要 应用 Pegg-Barnett(PB) 位相理论, 研究了 k 光子 Jaynes-Cummings(J-C) 模型中自发辐射场的位相演化特性, 计算了辐射场的位相几率分布函数与位相涨落, 给出了在极坐标中位相几率分布演化曲线。

关键词 k 光子 J-C 模型, 自发辐射, 位相特性。

1 引 言

PB 位相理论的建立, 解决了前人关于光场位相描述不自洽的困难^[1-3], 从而引起人们对于量子光场的位相特性研究的极大兴趣。人们应用这一理论广泛地研究了不同量子场的位相特性^[4-8]。这些研究表明, 不同物理系统场的位相性质是不同的。 k 光子 J-C 模型中自发辐射场这一重要问题, 至今还没有人问津。

本文应用 PB 位相理论研究了 k 光子 J-C 模型中自发辐射场处于激发态、基态和这两个态叠加态时场的位相随时间的演化特性, 具体计算了辐射场位相几率分布函数及位相涨落。

2 k 光子 J-C 模型自发辐射场的态矢^[9]

由于 J-C 模型是单模辐射场与单个二能级原子耦合的系统, 在旋波近似下, k 光子过程的哈密顿量为

$$H = \hbar\omega_0\sigma_3/2 + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(a^{+k}\sigma_- + a^k\sigma_+) \quad (1)$$

其中 a 、 a^\dagger 为场的消灭和产生算符, 满足对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$, σ_+ 、 σ_- 、 σ_3 为二能级原子泡利(Pauli)算符, g 为耦合系数, k 为原子上下能级间一次跃迁的光子数, ω_0 为原子的本征跃迁

频率。

当 $|\psi(0)\rangle = |-, z\rangle$, 即初始场处于相干态, 原子处在基态 $|-\rangle$, 这时体系的态矢量为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{\sqrt{(n+k)!}} \exp\left[-i\left(n+\frac{k}{2}\right)\omega t\right] \times \\ & \left[\left[\cos(\lambda_{n,k}t) - \frac{i\Delta}{2\lambda_{n,k}} \sin(\lambda_{n,k}t) \right] |-, n+k\rangle - \right. \\ & \left. ig \frac{\sqrt{(n+k)!/n!}}{\lambda_{n,k}} \sin(\lambda_{n,k}t) |+, n\rangle \right] + \\ & \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \exp\left[-i\left(n-\frac{k}{2}\right)\omega t + \frac{\Delta}{2}t\right] |-, n\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

当初始场处于相干态 $|z\rangle$, 原子处于激发态 $|+\rangle$, 即 $|\psi(0)\rangle = |+, z\rangle$, 那么

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \exp\left[-i\left(n+\frac{k}{2}\right)\omega t\right] \times \\ & \left[-ig \frac{\sqrt{(n+k)!/n!}}{\lambda_{n,k}} \sin(\lambda_{n,k}t) |-, n+k\rangle + \right. \\ & \left. \left[\cos(\lambda_{n,k}t) - \frac{i\Delta}{2\lambda_{n,k}} \sin(\lambda_{n,k}t) \right] |+, n\rangle \right] \end{aligned} \quad (3)$$

若场初始处于真空态 $|0\rangle$, 原子处于基态与激发态的相干叠加态, 即

$$|\psi(0)\rangle = \sigma |-, 0\rangle + \rho |+, 0\rangle \quad (4)$$

那么 $|\psi(t)\rangle = -i\rho \sin(\lambda_{0,k}t) (g\sqrt{k!}/\lambda_{0,k}) \exp(-ik\omega t/2) |-, k\rangle + \rho \exp(-ik\omega t/2)$

$$[\cos(\lambda_{0,k}t) - (i\Delta/2\lambda_{0,k}) \sin(\lambda_{0,k}t)] |+, 0\rangle + \sigma \exp(i\omega t/2) |-, 0\rangle \quad (5)$$

对于原子初始处于激发态, 则在 t 时刻体系的态矢量为 [(5) 式中的 $\rho = 1, \sigma = 0$]

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & -i \sin(\lambda_{0,k}t) (g\sqrt{k!}/\lambda_{0,k}) \exp(-ik\omega t/2) |-, k\rangle + \\ & \exp(-ik\omega t/2) [\cos(\lambda_{0,k}t) + (i\Delta/2\lambda_{0,k}) \sin(\lambda_{0,k}t)] |+, 0\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

3 位相几率分布与位相涨落

根据 PB 位相理论, 定义一组正交完备的光场位相基矢

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{(s+1)^{1/2}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_m) |n\rangle, \quad \theta_m = \theta_0 + 2m\pi/(s+1) \quad (7)$$

式中 $(s+1)$ 为位相本征基矢张开的希尔伯特(Hilbert)空间的维数, θ_0 为参考位相。光场的厄米位相算符定义为

$$\Phi_0 = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \quad (8)$$

那么, $|\theta_m\rangle$ 和 θ_m 分别为位相算符中的本征态矢和本征值。在共振情况下, 若场处于真空态, 原子处于基态和激发态的相干叠加态, 应用(7)和(8)式, 可计算出其位相几率分布函数为

$$P(\theta_m, t) = |\langle \theta_m | \psi(t) \rangle|^2 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_m | \psi(t) \rangle = & \frac{1}{(s+1)^{1/2}} \sum_{n=0}^s \langle n | \exp(-in\theta_m) \left[-i\rho \sin(\lambda_{0,k}t) \frac{g\sqrt{k!}}{\lambda_{0,k}} \exp(-i\omega t/2) |-, k\rangle + \right. \\ & \left. \rho \exp(-i\omega t/2) \cos(\lambda_{0,k}t) |+, 0\rangle + \sigma \exp(i\omega t/2) |-, 0\rangle \right] = \end{aligned}$$

$$(s + 1)^{-1/2} \{ \exp(-ik\theta_m) [-i\rho \sin(\lambda_{0,k}t) \frac{g\sqrt{k!}}{\lambda_{0,k}} \exp(-i\omega t/2) | - \rangle + \rho \exp(-i\omega t/2) \cos(\lambda_{0,k}t) | + \rangle + \sigma \exp(i\omega t/2) | - \rangle] \} \quad (10)$$

$$P(\theta_m, t) = | \langle \theta_m | \Psi(t) \rangle |^2 = (s + 1)^{-1} \{ | -i\rho \exp(-ik\theta_m - i\omega t/2) \sin(\lambda_{0,k}t) \frac{g\sqrt{k!}}{\lambda_{0,k}} + \sigma \exp(i\omega t/2) |^2 + | \rho \exp(-i\omega t/2) \cos(\lambda_{0,k}t) |^2 \} \\ = [| -i \exp(-ik\theta_m - i\omega t/2) \rho \sin(gt) + \sigma \exp(i\omega t/2) |^2 + | \rho \exp(-i\omega t/2) \cos(gt) |^2] (s + 1)^{-1} \quad (11)$$

在连续谱极限 ($s \rightarrow \infty$) 下, θ_m 变成连续变量, 这时 $P(\theta, t)$ 为连续分布函数, 经运算有

$$P(\theta, t) = \frac{s+1}{2\pi} | \langle \theta | \Psi(t) \rangle |^2 = \frac{1}{2\pi} [1 - 2\rho\sigma \sin(gt) \sin(k\theta + \omega t)] \quad (12)$$

图 1 给出 $\rho = \sigma = \sqrt{2}/2$, $gt = \pi/4$, $\omega t = 1$ 时, 原子处于激发态和基态相干迭加态时的 $P-\theta$ 曲线。图 1(a)、图 1(b)、图 1(c) 和图 1(d) 分别对应 $k = 1, 2, 3$ 和 4。

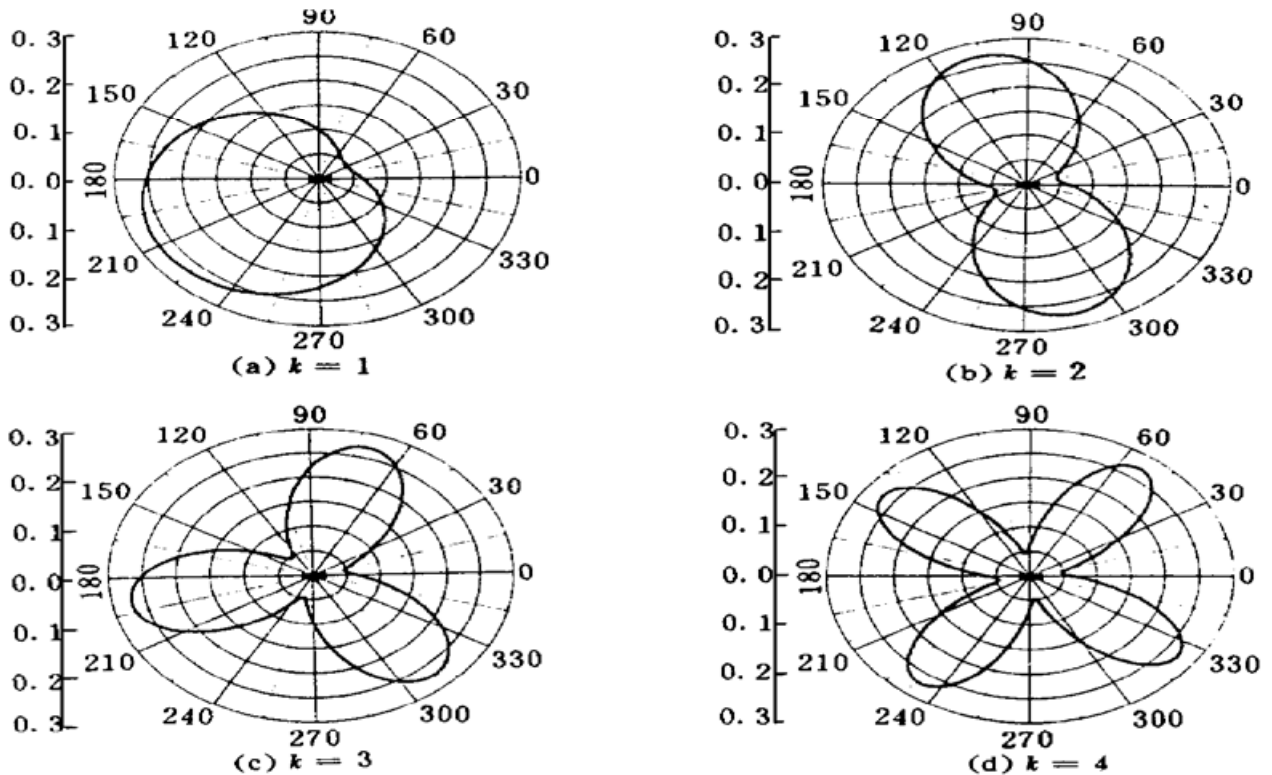


Fig. 1 Curves of evolution of the phase probability distribution when atom is initially in the superposition state which involving an ground state and an excited state, $\rho = \sigma = \sqrt{2}/2$, $gt = \pi/4$, $\omega t = 1$ and for (a) $k = 1$, (b) $k = 2$, (c) $k = 3$, (d) $k = 4$

1) 当 $\sigma = 0$, $\rho = 1$, 即原子处在激发态时, $P(\theta, t) = 1/2\pi$, 在曲线上可以看出, 任一时刻, $P-\theta$ 曲线为圆, 这表明辐射场的相位完全是随机的。

2) 当 $\sigma = 1$, $\rho = 0$, 即原子处在基态时, $P(\theta, t) = 1/2\pi$, 同样可以看出, 曲线为一圆, 这也同样表明辐射场的相位完全是随机的。

3) 当 ρ, σ 均不为零时, 即原子处在基态和激发态相干迭加态时,

$$P(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} [1 - 2\rho\sigma \sin(gt) \sin(k\theta + \omega t)] \quad (13)$$

显然有 $\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} P(\theta) d\theta = 1$, 是归一化的。在共振条件下, 从(12)式可以看出在 $gt = m\pi$ 时, $P(\theta, t) = 1/2\pi$, 即辐射场的位相分布是随机的, P - θ 曲线为一圆。当 $gt \neq m\pi$ 时, $P(\theta, t)$ 显然是类 k 叶或类 $2k$ 叶玫瑰曲线。

原子处于激发态和基态相干迭加时, 利用(13)式得辐射场的位相期望值和位相涨落为

$$\langle \Phi \rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta \frac{1}{2\pi} \{1 - 2\rho\sigma \sin(gt) \sin[k\theta + \omega t]\} d\theta = \theta_0 + \pi + (2\rho\sigma/k) \sin(gt) \cos[k\theta_0 + \omega t] \quad (14)$$

$$\langle \Phi^2 \rangle = (\theta_0 + \pi)^2 + \frac{4(\theta_0 + \pi)}{k} \rho\sigma \sin(gt) \cos[k\theta_0 + \omega t] + \frac{4}{k^2} \rho^2 \sigma^2 \sin^2(gt) \cos^2[k\theta_0 + \omega t] \quad (15)$$

$$\langle \Phi \rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta^2 \frac{1}{2\pi} \{1 - 2\rho\sigma \sin(gt) \sin[k\theta + \omega t]\} d\theta = \theta_0^2 + 2\theta_0\pi + \frac{4}{3}\pi^2 + \frac{4\rho\sigma}{k} \sin(gt) (\theta_0 + \pi) \cos[k\theta_0 + \omega t] - \frac{4\rho\sigma}{k^2} \sin(gt) \sin[k\theta_0 + \omega t] \quad (16)$$

$$\Delta\langle \Phi \rangle = \langle \Phi^2 \rangle - \langle \Phi \rangle^2 = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{4}{k^2} \rho\sigma \sin(gt) \sin[k\theta_0 + \omega t] - \frac{4\rho^2\sigma^2}{k^2} \sin^2(gt) \cos^2[k\theta_0 + \omega t] \quad (17)$$

由(14)式和(17)式可以看出, 位相平均值 $\langle \Phi \rangle$ 和位相涨落 $\Delta\langle \Phi \rangle$ 均与参考位相 θ_0 有关。由于原子和场的相互作用, 使得 $\langle \Phi \rangle$ 在 $(\theta_0 + \pi)$ 上下随时间作周期性变化; $\Delta\langle \Phi \rangle$ 在 $\pi^2/3$ 上下随时间作周期性变化。在 $gt = m\pi$ 时, $\langle \Phi \rangle$ 和 $\Delta\langle \Phi \rangle$ 分别为定值 $(\theta_0 + \pi)$ 和 $\pi^2/3$ 。伴随着 k 的增大, 涨落和期望值越来越趋于 $(\theta_0 + \pi)$ 和 $\pi^2/3$ 。

结 论 本文应用 PB 厄米位相理论, 讨论了 k 光子 J-C 模型中辐射场的位相演化特性。结果表明, 当原子处在激发态或基态时, 其位相分布函数 $P(\theta, t) = 1/2\pi$, P - θ 曲线为圆, 辐射场的位相完全是随机的; 当原子处在基态和激发态相干迭加态, 当 $gt = m\pi$ 时, 其位相分布函数 $P(\theta, 0) = 1/2\pi$, 曲线同样是一个圆, 即辐射场的位相分布是随机的; 当 $gt \neq m\pi$ 时, 显然是类 k 叶或类 $2k$ 叶玫瑰曲线, 曲线呈周期性变化。场的位相平均值和位相涨落分别与参考位相 θ_0 的选择有关, 由于原子与场的相互作用, 它们分别围绕一定值 $(\theta_0 + \pi)$ 和 $(\pi^2/3)$ 作周期性变化。在 $gt = m\pi$ 时, 为定值 $(\theta_0 + \pi)$ 和 $(\pi^2/3)$, 随着 k 值的增大, 涨落和平均值渐趋于 $(\theta_0 + \pi)$ 和 $(\pi^2/3)$ 。

参 考 文 献

- [1] T. Pegg, S. M. Barnett, Unitary phase operator in quantum mechanics. *Europhys. Lett.*, 1988, **6**(6) : 483~ 485
- [2] S. M. Barnett, D. T. Pegg, On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1) : 7~ 19
- [3] T. Pegg, S. M. Barnett, Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(3) : 1665~ 1675
- [4] A. Vaccaro, D. T. Pegg, Phase properties of squeezed states of light. *Opt. Commun.*, 1989, **70**(6) : 529~ 534
- [5] Nath, P. Kumer, Phase properties of squeezed number states. *J. Mod. Opt.*, 1991, **39**(8) : 1655~ 1658
- [6] A. V. Chov, B. K. Murzakhmetov, Photon statistics of two mode squeezed number states. *Phys. Lett. (A)*, 1993, **176**(1) : 33~ 40
- [7] 郭 宏, 郭光灿, 光场位相统计性质. *物理学报*, 1993, **42**(6) : 918~ 924
- [8] H. X. Meng, C. L. Chai, Phase properties of coherent light in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett. (A)*, 1991, **155**(8, 9) : 500~ 505
- [9] Yun-Jie Xia, Guang-can Guo, Squeezing of spontaneous emission in the k -photon ($k > 2$) Jaynes-Cummings mode. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, **7**(10) : 2113~ 2118

Properties of Phase Evolution of Spontaneous Emission in the k -Photon ($k > 2$) Jaynes-Cummings Model

Li Bofeng

(Department of Physics, Heilongjiang Province College of Education, Harbin 150080)

Ma Aiqun

(Harbin College, Harbin 150020)

Zhang Xueru

(Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Lu Qiguang

(Department of Physics, Harbin Teachers' College, Harbin 150080)

(Received 8 January 1998; revised 4 May 1998)

Abstract The properties of phase evolution of spontaneous emission in the k -photon ($k > 2$) Jaynes-Cummings model are studied by using PB phase theory. The phase probability distribution and variance are calculated. The curves of evolution of the phase probability distribution are given on a polar diagram.

Key words k -photon Jaynes-Cummings model, spontaneous emission, phase property.