

双模环型激光增益噪声模型的非线性效应*

龙全¹⁾ 曹力^{2), 3)} 吴大进^{2), 3)} 李再光¹⁾

1), 华中理工大学激光技术国家实验室, 武汉 430074

2), 华中理工大学物理系, 武汉 430074

3), CCAST(世界实验室), 北京 100080

摘 要 讨论了一个双模环型激光增益噪声模型, 其中考虑了完全饱和效应且乘法噪声由增益系数涨落引起。在共振及两模具有相同泵参数时, 获得了光强联合定态分布的精确解析表达式。通过与现有的双模激光模型(其中乘法噪声由损失系数涨落引起)的比较, 发现乘法噪声系数的非线性效应减弱了乘法噪声给激光光强统计性质带来的反常特性, 并且这种减弱随着乘法噪声增强或损失系数减小而愈加明显。

关键词 双模环型激光, 乘法噪声, 增益涨落。

1 引 言

近年来随着实验的发展, 人们发现为了更准确地描述激光统计行为, 除了要引入量子加法噪声^{1, 2}外, 还必须考虑以下两个因素: 1) 更高阶饱和效应。由于随着激励水平上升饱和效应变得更重要^{3~9}, 因此考虑了完全饱和效应的激光模型比仅近似到三阶饱和效应的立方模型能适用于更高阈值区域; 2) 乘法噪声。已经证明乘法噪声是导致激光反常统计性质的根源^{8~15}。作者注意到乘法噪声可以由激光的损失或增益系数涨落引起。由于损失系数与激光的一阶复电场幅相乘, 因此其涨落仅引起一个具有线性系数的乘法噪声, 比如染料激光中的乘法噪声^{11~13}。而增益系数则与高于一阶的复电场幅相乘, 因而其涨落将会引起一个具有非线性系数的乘法噪声。目前具有线性系数乘法噪声的双模激光模型(其中饱和效应或者保留至三阶或者全部计入)已得到了广泛的研究, 而对于具有非线性系数乘法噪声的双模激光模型, 无论是在理论上还是在实验上都还没有开展对其统计性质的探讨。本文讨论一个计入了完全饱和效应并且乘法噪声由增益系数涨落引起的双模激光增益噪声模型在共振时光强的涨落特性。

2 场运动方程

由包含电场、原子反转及偶极矩之涨落力的 C 数 Langevin 方程¹⁶, 通过绝热消去可以

* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1997-05-28

得到一个非均匀展宽(气体)双模环型激光复电场振幅 $E_1(t)$ 、 $E_2(t)$ 的随机运动方程为

$$\frac{dE_1'}{dt} = -K_1'E_1' + F_1'(E_1', E_2') + g_1'(E_1', E_2')P'(t') + q_1'(t'), \quad (1)$$

$$\frac{dE_2'}{dt} = -K_2'E_2' + F_2'(E_1', E_2') + g_2'(E_1', E_2')P'(t') + q_2'(t'), \quad (2)$$

其中 $K_{1,2}'$ 、 $F_{1,2}'$ 和 $g_{1,2}'$ 分别为场模 1, 2 的损失系数、饱和项和乘法噪声系数, 且有 $F_{1,2}'(E_1', E_2') = F'E_{1,2}'/[1 + |E_{1,2}'|^2 + \xi|E_{2,1}'|^2]$ 以及 $g_{1,2}'(E_1', E_2') = F_{1,2}'(E_1', E_2')/F'$ 。参数 ξ 为模间耦合系数, 且有 $\xi = 1/[1 + (T\Delta)^2]$, 其中 T 为原子自然寿命, Δ 为腔频率对原子谱线中心的偏离。 F' 为增益系数, 且有 $F' = g^2 \sqrt{\pi D}/(ku)$, 其中 g 为场-原子耦合系数, ku 为多普勒宽度, D 为原子反转数。由于在实际中原子反转数一般不是一个常数, 它可以由原子系统的内噪声或原子泵入过程中的外界扰动引起涨落, 从而在激光增益中引入一个涨落部分 $F' \rightarrow F' + P'(t')$, 即(1)、(2)式中的乘法噪声 $P'(t')$ 。加法噪声 $q_{1,2}'(t')$ 是由量子自发辐射噪声引起。 $q_{1,2}'(t')$ 与 $P'(t')$ 都是白高斯噪声。具有零平均及关联 $\langle \dot{q}_i^*(t')q_j(s') \rangle = 2p'\delta_{ij}\delta(t'-s')$ 和 $\langle \dot{P}^*(t')P(s') \rangle = 2\mathcal{P}\delta(t'-s')$, 其中 $i, j = 1, 2$ 而 p' 和 \mathcal{P} 分别为加法和乘法噪声强度。

尽管 $E_{1,2}$ 是无量纲的, 但由于参数 $K_{1,2}'$ 、 F' 、 p' 、 \mathcal{P} 具有量纲 s^{-1} , 因此为了下面与其他模型进行比较, 首先利用一个变量变换

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= (p'/2F')^{-1/2}E_{1,2}', & K_{1,2} &= (p'/2F')^{-1/2}K_{1,2}', \\ F &= (p'/2F')^{-1/2}F', & t &= (p'/2F')^{1/2}t', \end{aligned} \quad (3)$$

把(1)、(2)式转化为一个全无量纲化的场方程

$$\frac{dE_1}{dt} = -K_1E_1 + F_1(E_1, E_2) + g_1(E_1, E_2)P(t) + q_1(t), \quad (4)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = -K_2E_2 + F_2(E_1, E_2) + g_2(E_1, E_2)P(t) + q_2(t), \quad (5)$$

其中饱和项和乘法噪声系数分别为

$$\begin{aligned} F_{1,2}(E_1, E_2) &= \frac{FE_{1,2}}{1 + (|E_{1,2}|^2 + \xi|E_{2,1}|^2)/F}, \\ g_{1,2}(E_1, E_2) &= \frac{E_{1,2}}{1 + (|E_{1,2}|^2 + \xi|E_{2,1}|^2)/F}, \end{aligned} \quad (6)$$

相应的加法噪声和乘法噪声的关联分别为

$$\langle \dot{q}_i^*(t)q_j(s) \rangle = 2p\delta_{ij}\delta(t-s), \quad \langle \dot{P}^*(t)P(s) \rangle = 2p''\delta(t-s) \quad (7)$$

其中 $i, j = 1, 2$ 且有 $p = 2$, $p'' = [p'/2F']^{-1/2}\mathcal{P}$ 。由于模型(4)~(7)式计入了完全饱和效应且乘法噪声由增益涨落引起, 因此把这个模型称为增益噪声饱和模型(GNSM)。目前已有的双模激光模型中乘法噪声的系数与增益噪声饱和模型中的不同, 都是线性的, 即 $g_{1,2}(E_1, E_2) = E_{1,2}$ 。因而这些模型中的乘法噪声可以被理解为由损失系数 $K_{1,2}$ 的涨落引起 $K_{1,2} \rightarrow K_{1,2} + P(t)$ (在实验中损失系数的涨落可以通过加在置于腔中的声光调制器上的噪声电压或喷入腔中的染料流中的扰动引起^[11~13])。从而已有的模型可以称为损失噪声模型, 又根据饱和项 $F_{1,2}(E_1, E_2)$ 的形式可进一步分为: 1) 损失噪声立方模型(LNCM), 其饱和项保留至三阶场幅即 $F_{1,2}(E_1, E_2) = F[1 - (|E_{1,2}|^2 + \xi|E_{2,1}|^2)/F]E_{1,2}$; 2) 损失噪声饱和模型(LNSM), 其饱和项与增益噪声饱和模型的不同。

对应于增益噪声饱和模型的两模光强联合分布 $W(I_1, I_2, t)$ 所满足的 Fokker-Planck 方

程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a} = & - \frac{\partial}{\partial I_1} \{ [2(-K_1 I_1 + F I_1 S_1 + p I_1 S_1^3 + \xi p I_1 I_2 S_1^3 / F - \xi p I_1 I_2 S_1^2 S_2 / F + p) W] - \\ & \frac{\partial}{\partial I_1} [2(p I_1^2 S_1^2 + p I_1) W] - \frac{\partial}{\partial I_2} (2p I_1 I_2 S_1 S_2 W) \} - \\ & \frac{\partial}{\partial I_2} \{ [2(-K_2 I_2 + F I_2 S_2 + p I_2 S_2^3 + \xi p I_1 I_2 S_2^3 / F - \xi p I_1 I_2 S_2^2 S_1 / F + p) W] - \\ & \frac{\partial}{\partial I_2} [2(p I_2^2 S_2^2 + p I_2) W] - \frac{\partial}{\partial I_1} (2p I_1 I_2 S_1 S_2 W) \} \end{aligned} \quad (8)$$

其中光强 $I_{1,2} = |E_{1,2}|^2$ 且 $S_{1,2} = 1/[1 + (I_{1,2} + \xi I_{2,1})/F]$ 。在共振($\Delta = 0$)及两模有相同损失系数时,即 $\xi = 1$ 和 $K_1 = K_2 = K$ 时,方程(8)有精确的定态解析解

$$\begin{aligned} W_{st}(I_1, I_2) = & N^{-1} \left(1 + \frac{p F}{2p} + v + \frac{I_1 + I_2}{F} \right)^\alpha \left(1 + \frac{p F}{2p} - v + \frac{I_1 + I_2}{F} \right)^\beta \times \\ & \left(1 + \frac{I_1 + I_2}{F} \right) \exp \left[- \frac{K}{p} (I_1 + I_2) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

其中 N 为归一化常数,

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{KF^2 p}{2p^2} + \frac{F^2}{2p} + \frac{KF^3 p}{4vp^3} + \frac{F^3 p}{4vp^2} + \frac{KF^2 p}{2vp^2} + \frac{Fp}{2vp} - \frac{Fp}{Fvp + 2v^2 p}, \\ \beta = & \frac{KF^2 p}{p^2} + \frac{F^2}{p} - \alpha - 1, \quad v = \left[\frac{Fp}{p} + \frac{F^2 p}{4p^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

为计算对应于按(9)式分布的光强各阶矩,引进一个变量变换

$$x = I_1 + I_2, \quad y = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad (10)$$

在这个变换下定积分元

$$\int_0^\infty dI_1 \int_0^\infty dI_2 = \int_0^\infty x dx \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy, \quad (11)$$

这个变换的好处是它使得具有 $W(I_1 + I_2)$ 形式的分布的各阶矩计算变得更简便,因为它实际上把一个二重积分简化成一个一重积分,由(11)式可得光强平均值、不含时自关联和互关联

$$\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty x W_{st}(x) dx \quad (12)$$

$$C_{11}(0) = C_{22}(0) = \frac{\langle I_1^2 \rangle}{\langle I_1 \rangle^2} - 1 = \frac{1}{N \langle I_1 \rangle^2} \int_0^\infty x^3 W_{st}(x) dx - 1, \quad (13)$$

$$C_{12}(0) = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} - 1 = \frac{1}{N \langle I_1 \rangle^2} \int_0^\infty x^3 W_{st}(x) dx - 1, \quad (14)$$

其中 $N = \int_0^\infty x W_{st}(x) dx$ 且 $W_{st}(x) = W_{st}(I_1, I_2)$ 。在远高于阈值时,即泵参数 $a = F - K \gg$

1 时,可以证明有如下渐近行为

$$\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle \rightarrow \frac{aF}{2K}, \quad C_{11}(0) = C_{22}(0) \rightarrow \frac{1}{3}, \quad C_{12}(0) \rightarrow -\frac{1}{3}, \quad (15)$$

3 与以往模型比较

损失噪声立方模型和损失噪声饱和模型分别在文献[14]和[15]中已得到了研究。本节将增益噪声饱和模型与损失噪声立方模型和损失噪声饱和模型比较以确定乘法噪声系数的非线性效应。在忽略乘法噪声的情况即 $p'' = 0$ 时, 损失噪声立方模型回归到文献[2]中的立方模型, 损失噪声饱和模型和增益噪声饱和模型回归到文献[4]中的饱和模型, 此时三个模型之间, 除了饱和效应使后者给出更大平均光强外, 在不含时光强关联上几乎无差别(不论损失 K 为多大)。但在考虑乘法噪声 p'' 时情况就不同了, 将看到乘法噪声系数形式上的不同会对光强涨落有很大影响。

图 1 给出了对于不同乘法噪声 p'' (损失 K 一定) 下光强平均值、光强下含时自关联和互关联 $C_{11}(0)$ 和 $C_{12}(0)$ 随泵参数 a 的变化。从图 1(a) 可见与损失噪声饱和模型相似, 增益噪声饱和模型的平均光强 $\langle I \rangle$ 大于损失噪声立方模型的 $\langle I \rangle$, 这主要是饱和效应的结果。但增益噪声饱和模型的 $\langle I \rangle$ 小于损失噪声饱和模型的 $\langle I \rangle$, 这是乘法噪声系数非线性效应的结果。而且增益噪声饱和模型的 $\langle I \rangle$ 对乘法噪声 p'' 的依赖关系不如损失噪声饱和模型那样明显, 后者随 p'' 增大而增大而前者对于不同的 p'' 值仅在阈值附近稍有不同, 在阈值上则几乎与 p'' 无关, 由(15)式也可看到这一点。

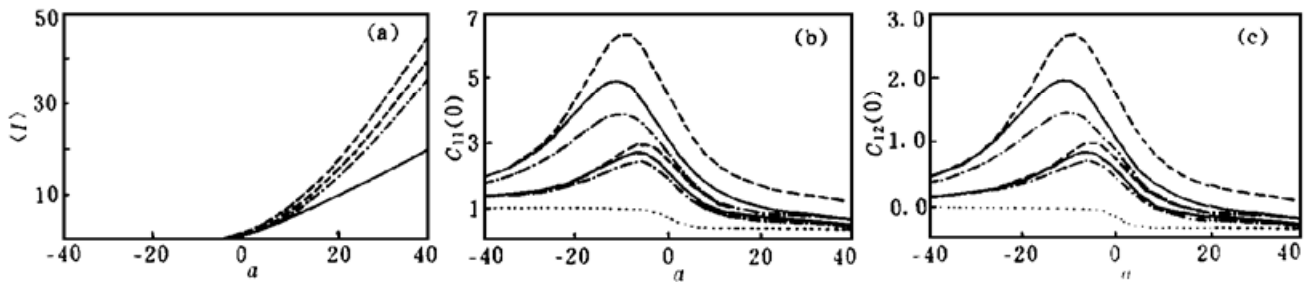


Fig. 1 Variation of the (a) mean, (b) time-independent normalized autocorrelation and (c) cross correlation of laser intensities versus the pump parameter for different multiplicative noise strengths with fixed loss. $K = 50$, $p'' = 0, 5, 10$ (from bottom to top). Dot line: LNCM, LNSM and GNSM at $p'' = 0$, solid line: LNCM, dashed line: LNSM, dot-dashed line: GNSM. In (a) the curves of GNSM and LNCM respectively superpose at different p'' when above threshold

由图 1(b)、图 1(c) 可见, 增益噪声饱和模型的不含时光强关联 $C_{11}(0)$ 和 $C_{12}(0)$ 与损失噪声饱和模型的^[15] 正相反, 相比损失噪声立方模型不是反常增大而是减小了。而且增益噪声饱和模型不仅峰高度更低, 尾巴也更短些。还看到在阈值以下增益噪声饱和模型并不象损失噪声饱和模型那样迅速地随泵参数 a 减小而趋近于损失噪声立方模型。这一点也是乘法噪声系数非线性效应的表现, 通过把增益噪声饱和模型和损失噪声饱和模型中的分式项 $FE_{1,2}/(F + I_{1,2} + \xi I_{2,1})$ 在小光强处展开为 $[1 - (I_{1,2} + \xi I_{2,1})/F]E_{12}$ 并与损失噪声立方模型比较即可看出。另外, 三个模型之间的差异还随 p'' 增大而扩大。

在图 2 中绘出了对于不同损失 K (乘法噪声 p'' 一定) 下光强平均值 $\langle I \rangle$ 、光强不含时自关联和互关联 $C_{11}(0)$ 和 $C_{12}(0)$ 随泵参数 a 的变化。同损失噪声饱和模型一样^[15], 增益噪声饱和模型随 K 增大而趋于损失噪声立方模型。这一现象可以由增益噪声饱和模型的分式项(9)式在 $K \rightarrow \infty$ 时的极限形式与损失噪声立方模型的光强分布^[14]一致来说明。

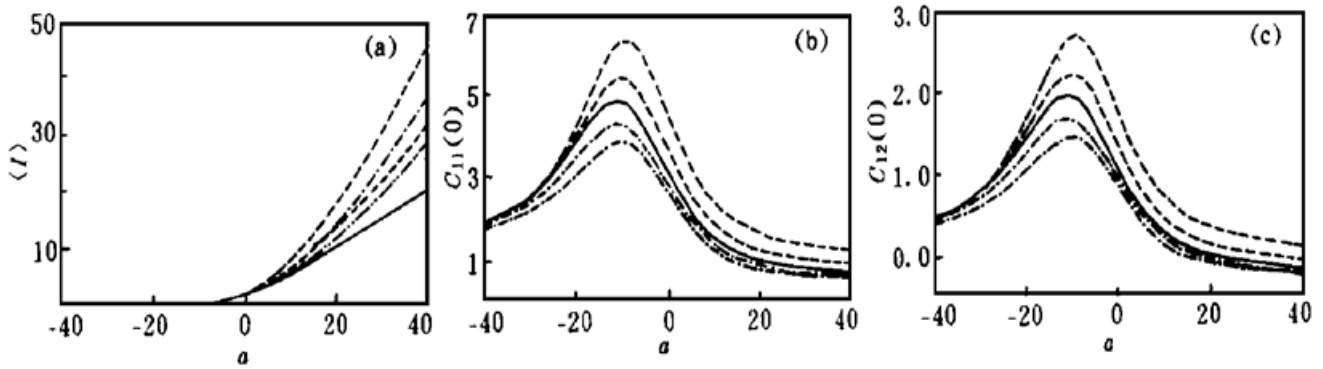


Fig. 2 Variation of the (a) mean, (b) time-independent normalized autocorrelation and (c) cross correlation of laser intensities versus the pump parameter for different losses with fixed multiplicative noise strengths. $p'' = 10$, (1) $K = 50$, (2) $K = 100$. Solid line: LNCM, dashed line: LNSM, dot-dashed line: GNSM

结 论 通过比较增益噪声饱和模型和损失噪声饱和模型可以看到乘法噪声系数的非线性效应, 而通过比较增益噪声饱和模型和损失噪声立方模型可以看到饱和效应和乘法噪声系数非线性效应同时作用的结果。发现激光系统的统计性质不仅与饱和效应有关, 而且还受制于乘法噪声引入的方式(是损失涨落引起的还是增益涨落引起的), 即乘法噪声系数是线性的还是非线性的。由上面的分析可得: 1) 乘法噪声系数的非线性效应使得平均光强对乘法噪声强度变化的敏感程度下降, 或 p'' 对 $\langle I \rangle$ 的影响力减弱了; 2) 对同等的乘法噪声强度, 由增益涨落引起的乘法噪声与由损失涨落引起的乘法噪声相比, 给出较小的光强不含时自关联和互关联, 即光强涨落要小; 3) 在其他参数一定、损失 K 非常大时, 乘法噪声系数非线性效应和饱和效应都可以忽略。由此可以得出一个结论, 即乘法噪声系数的非线性效应减弱了引入乘法噪声给激光光强统计性质(尤其是在阈值附近)带来的反常特性, 并且这种减弱随着乘法噪声增强或损失系数减小而愈加明显。

参 考 文 献

- [1] S. Singh, Statistical properties of single-mode and two-mode ring laser. *Phys. Rept.*, 1984, **108**(4) : 217~ 273
- [2] M. M. Tehranni, L. Mandel, Coherence theory of the ring laser. *Phys. Rev. (A)*, 1978, **17**(2) : 677 ~ 702
- [3] S. Zhu, J. Yin, Saturation effect in a laser at steady state. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7) : 4969~ 4973
- [4] S. Zhu, Saturation effects in a two-mode ring laser. *Phys. Rev. (A)*, 1994, **50**(1) : 1710~ 1715
- [5] L. Cao, D. J. Wu, L. Ling, First-order-like transition for colored saturation models of dye laser: Effects of quantum noise. *Phys. Rev. (A)*, 1994, **49**(1) : 506~ 516
- [6] L. Ling, L. Cao, D. J. Wu, First-order-like transition for colored-noise saturation models of dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **48**(1) : 739~ 745
- [7] L. Cao, D. J. Wu, X. L. Luo, Effects of saturation in the transient process of dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9) : 6838~ 6856; *ibid*, 1993, **47**(1) : 57~ 70
- [8] S. Zhu, A. W. Yu, R. Roy, Statistical fluctuations in laser transients. *Phys. Rev. (A)*, 1986, **34** (5) : 4333~ 4346
- [9] M. Agudo, E. Hernandez-Garcia, M. San Miguel, Dye-laser fluctuations: Comparison of colored loss-noise and white gain-noise models. *Phys. Rev. (A)*, 1988, **38**(11) : 5670~ 5677

- [10] L. Cao, D. J. Wu, X. L. Luo, Effects of Multiplicative colored noise in the growth of dye laser radiation: The projective operator method. *Z. Phys. (B)*, 1994, **93**(2) : 251~ 258
- [11] M. R. Young, S. Singh, Statistical properties of a laser with multiplicative noise. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(1) : 21~ 23
- [12] P. Lett, Investigation of first-passage-time problems in the two-mode dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1986, **34**(3) : 2044~ 2057
- [13] P. Lett, L. Mandel, Investigation of time-dependent correlation properties of the bidirectional dye ring laser. *Opt. Soc. Am. (B)*, 1985, **2**(10) : 1615~ 1624
- [14] S. Zhu, Steady-state analysis of a two-mode laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(11) : 8148~ 8153
- [15] X. P. Zhou, W. J. Gao, S. Zhu, Saturation effects in a two-mode ring laser with both additive and multiplicative noise. *Phys. Lett. (A)*, 1996, **213**(1) : 43~ 48
- [16] H. Haken, *Laser Theory*, ed. S. Flugge, New York, Springer, 1984, Encyclopedia of Physics, Vol. XXV/2C, 39

Nonlinear Effects in a Two-Mode Ring Gain-Noise Laser Model

Long Quan¹⁾ Cao Li^{2), 3)} Wu Dajin^{2), 3)} Li Zaiguang¹⁾

1), National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074

2), Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074

3), CCAST (World Laboratory), Beijing 100080

(Received 28 May 1997)

Abstract A two-mode ring gain-noise laser model taking account of full saturation effects with multiplicative noise induced by gain fluctuations is concerned. An exact analytical expression for laser intensity distribution is obtained on resonance with equal mode pump parameters. It is found, through a comparison with the currently used models where multiplicative noise arises from loss fluctuations, that the occurrence of nonlinear multiplicative noise coefficient weakens the anomalous characteristics brought about to the laser intensity statistical properties by introducing multiplicative noise, and this kind of weakening is more apparent for larger multiplicative noise or smaller laser loss.

Key words two-mode ring laser, multiplicative noise, gain fluctuations.