

运用泽尼特多项式的相位去包裹算法

韦春龙

(上海大学(嘉定校区)电子工程系, 上海 201800)

陈明仪

(上海大学(嘉定校区)机械工程系, 上海 201800)

王之江

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 提出了一种新的相位去包裹算法, 主要针对光学光滑表面以及由于少数低调制度点、散斑点、噪声或灰尘(以下简称误差点)引起的去包裹失败的情形。该算法运用泽尼特(Zernike)多项式对误差点区域进行拟合, 通过一定阈值的设置, 将误差点清除并予以拟合, 具有计算快速的特点。

关键词 干涉术, 条纹分析, 泽尼特多项式, 去包裹算法。

1 引 言

条纹图分析中存在两个最重要的算法: 一是相位提取算法; 一是相位去包裹算法(Phase unwrapping)。由于相位去包裹问题的复杂性和具体应用的特殊性, 近年来, 愈来愈引起了研究者的关注。已出现了许多基于各自问题的算法。其中, 较有代表性的有“支切”(Branch cut)算法及其改进算法^[1-4], 细胞自动机算法^[5-7], 二阶相位差分算法^[8,9], 最小价格匹配和稳态婚姻算法^[10,11], 基于数据相关系统(DDS)的算法^[12], 基于马尔可夫随机场模型的并行算法^[13], 运用赛可罗夫正则化理论的算法^[14]以及离散余弦变换的算法^[15]。

这些算法主要针对散斑条纹图以及噪声较大的情形, 而对于光学光滑表面以及低调制度点、散斑点、噪声或灰尘点为数不多的条纹图情形, 显得繁琐耗时, 并不很实用。

众所周知, 泽尼特多项式^[16]以其优良特性已广泛地应用于波前数据拟合的分析中。本文将进一步应用于相位去包裹问题, 有效地将可能引起相位去包裹失败的低调制度点、个别散斑点、噪声或灰尘点予以滤除, 同时拟合之, 消除了其对最终测试结果的影响。由于对误差点的处理主要局限于其所在区域, 因此, 本文算法具有较快的计算速度。

2 波前在离散点上的泽尼特多项式的表达

2.1 离散点上正交多项式的构造

泽尼特多项式仅在连续单位圆上是正交的, 而在单位圆上和圆内离散点上不是正交的。

在实际的应用过程中, 所遇到的多是离散的情形。因此, 有必要构造在离散点上正交的多项式。Malacala^[17]首先运用 Gram-Schmidt 正交化方法构造了一组在离散点上正交的、基于泽尼特多项式的多项式, 并用其表达波前函数。即

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^L B_j V_j(\rho, \theta) \quad (1)$$

式中 $W(\rho, \theta)$ 为某点波前, $V_j(\rho, \theta)$ 为在离散点上的正交多项式, 由此有

$$\sum_{j=1}^N V_j(\rho_i, \theta_i) V_p(\rho_i, \theta_i) = F \delta_{jp} \quad (2)$$

式中 F 为常数, N 为数据点的最大个数。

设 $U_j(\rho, \theta)$ 为泽尼特多项式, 则由 Gram-Schmidt 正交化方法, 得

$$V_j = U_j + \sum_{s=1}^{j-1} D_{js} V_s, \quad j = 1, 2, 3, \dots, L \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N V_j V_p = \sum_{i=1}^N U_j U_p + D_{jp} \sum_{i=1}^N V_p^2 = 0 \quad (4)$$

$$D_{jp} = \sum_{i=1}^N U_j V_p / \sum_{i=1}^N V_p^2 \quad (5)$$

可见, 由(3)式和(5)式即可得在离散点上正交的多项式 V_j 。

2.2 最小二乘拟合

设 W_i^* 为被测实际波前, 则定义均方差 S 为

$$S = \sum_{i=1}^N [W_i^* - W(\rho_i, \theta_i)]^2 \quad (6)$$

$$W(\rho_i, \theta_i) = \sum_{j=1}^L B_j V_j(\rho_i, \theta_i) \quad (7)$$

作最小二乘求导,

$$\partial S / \partial B_p = 0, \quad (p = 1, 2, 3, \dots, L) \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^L B_j \sum_{i=1}^N V_j V_p - \sum_{i=1}^N W_i^* V_p = 0 \quad (9)$$

由正交化条件, 得

$$B_p = \sum_{i=1}^N W_i^* V_p / \sum_{i=1}^N V_p^2 \quad (10)$$

由此即得波前的正交表达式系数。

2.3 离散点上波前的泽尼特多项式表达

虽然在离散点上泽尼特多项式不是正交的, 但是波前仍旧可以用泽尼特多项式表达。即

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^L A_j U_j(\rho, \theta) \quad (11)$$

$$V_j = U_j + \sum_{i=1}^{j-1} C_{ji} U_i, \quad j = 1, 2, 3, \dots, L, \quad C_{jj} = 1, \quad V_1 = U_1 \quad (12)$$

比较(3)和(12)式, 可得

$$\begin{aligned} C_{21} &= D_{21}, & C_{31} &= D_{32}C_{21} + D_{31}, \\ C_{32} &= D_{32}, & C_{41} &= D_{43}C_{31} + D_{42}C_{21} + D_{41}, \end{aligned}$$

$$C_{ji} = \sum_{s=1}^{j-1} D_{j,j-s} C_{j-s,i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, j-1, \quad C_{jj} = 1$$

已知系数 B_j 、 C_{ji} 后, 可以求得 A_j 。将(12)式代入(1)式, 得

$$W(\rho, \theta) = B_1 U_1 + \sum_{j=2}^L B_j \left(U_j + \sum_{i=1}^{j-1} C_{ji} U_i \right) \quad (14)$$

重新整理, 得

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^{L-1} (B_j + \sum_{i=j+1}^L B_i C_{ij}) U_j + B_L U_L \quad (15)$$

与(11)式比较, 得

$$A_j = B_j + \sum_{i=j+1}^L B_i C_{ij}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, L-1, \quad A_L = B_L \quad (16)$$

3 算法原理

3.1 相位去包裹分析

在条纹图分析中, 由于所测相位由正切函数计算所得, 其值域包裹于 $[-\pi, +\pi]$ 主值之间。Itoh 首先给出了传统去包裹算法的数学描述^[18]。

由正切函数计算所得的相位值可以看作是对被测相位的包裹运算结果, 即

$$W_l[\Phi(n)] = \Phi_p(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

其中 $\Phi_p(n)$ 为主值, l 为不同包裹运算符标记。(17) 式等价于

$$W_l[\Phi(n)] = \Phi(n) + 2\pi k_l(n) \quad (18)$$

其中 $k_l(n)$ 为一整数序列, 满足以下条件

$$-\pi \leq W_l[\Phi(n)] \leq \pi \quad (19)$$

$$\text{记} \quad \Delta\Phi(n) = \Phi(n) - \Phi(n-1), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (20)$$

$$\text{则相位主值差} \quad \Delta W_l[\Phi(n)] = \Delta\Phi(n) + 2\pi\Delta k_l(n) \quad (21)$$

$$\text{对其作包裹运算} \quad W_2\{\Delta W_l[\Phi(n)]\} = \Delta\Phi(n) + 2\pi[\Delta k_l(n) + k_2(n)] \quad (22)$$

因为 W_2 产生的值处于 $\pm\pi$ 之间, 若 $-\pi \leq \Delta\Phi(n) \leq \pi$, 那么, $2\pi[\Delta k_l(n) + k_2(n)] = 0$, 因此, $\Delta\Phi(n) = W_2\{\Delta W_l[\Phi(n)]\}$, 从而,

$$\Phi(m) = \Phi(0) + \sum_{n=1}^m W_2\{\Delta W_l[\Phi(n)]\} \quad (23)$$

(23) 式表明, 通过相位主值差的包裹运算的求和, 可以进行相位去包裹。当由于不适当取样, 存在低调制度点, 噪声或灰尘等使 $-\pi \leq \Delta\Phi(n) \leq \pi$ 不满足时, 则引起相位去包裹与路径有关效应, 不能进行正确去包裹。因此, 正确去包裹的关键在于识别和清除那些不满足 $-\pi \leq \Delta\Phi(n) \leq \pi$ 的点, 阻止其误差的传播。

Goldstein 首先给出了识别去包裹与路径有关的公式^[1]

$$d = \sum_{i=1}^4 \Delta\Phi(i) = \begin{cases} 0, & \text{与路径无关;} \\ \neq 0, & \text{与路径有关。} \end{cases} \quad (24)$$

式中 $\Delta\Phi(i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 为一正方形的相邻点相位差取整值。应该指出的是, 严格地说, 这一公式是正确去包裹的必要条件, 但非充分条件。Bone 给出了类似的结论^[8]。然而在大多数应用中, 只要满足该式, 则相应的相位点可进行正确去包裹。

3.2 新算法描述

3.2.1 方形孔径情形

本文提出的算法首先假定在条纹图中, 存在至少一条可用传统算法正确去包裹的水平线或垂直线。以此线为基准线, 垂直此线作传统相位去包裹, 可得一相邻直线, 如果基准线与该线所构成的任意相邻正方形相位点满足(24)式 $d = 0$, 则认为该线已正确去包裹, 并以该线为基准线继续下一相邻直线的去包裹。如果基准线与该线所构成的任意相邻正方形相位点不满足(24)式 $d = 0$, 则认为该线存在误差点。对基准线和该线上所有点作泽尼特多项式拟

合, 得相应的系数 A_j 。设定一阈值 T , 若恢复相位点与之差, 即 $|\Phi_i - \sum_{j=1}^L A_j U_j(\rho_i, \theta_i)| > T$, 则该点视为误差点, 用 $\sum_{j=1}^L \overline{A_j} U_j(\rho_i, \theta_i)$ 取代之, 阻止误差的传播。如此重复直至边界。

3.2.2 圆形孔径情形

圆形孔径情形较为复杂, 本文算法提出在上面方形孔径去包裹算法基础上予以实现。

首先作圆孔径内接正方形, 然后作方孔径的相位去包裹, 之后, 再作方孔径内所有点的泽尼特多项式拟合得系数 A_j ; 对方孔径以外的各弓形内的点, 类似方孔径情形作相位去包裹。若所恢复的相位, $|\Phi_i - \sum_{j=1}^L \overline{A_j}(\rho_i, \theta_i) U_j(\rho_i, \theta_i)| > T$, 则该点视为误差点, 以 $\sum_{j=1}^L \overline{A_j}(\rho_i, \theta_i) U_j(\rho_i, \theta_i)$ 替代之。如此重复直至所有点相位得以去包裹。

3.3 新算法步骤

由于圆孔径情形相位去包裹算法已包含方孔径情形, 故以下仅给出圆孔径情形去包裹算法步骤:

- 1) 在圆孔径内作内接正方形;
- 2) 首先寻找到一条经传统算法去包裹后正确的水平线或垂直线作为基准线;
- 3) 垂直该基准线作传统算法去包裹得相邻一直线 Φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$;
- 4) 判断以上两直线的任意相邻四相位点是否满足 $d = 0$; 若满足, 则如此继续下一行, 否则, 作算法 5) ~ 6) 步;
- 5) 对基准线和该直线上所有点作泽尼特多项式拟合, 得 A_j ;
- 6) 设定一阈值 T , 当 $|\Phi_i - \sum_{j=1}^L A_j U_j(\rho_i, \theta_i)| > T$, 视为坏点, 并用 $\sum_{j=1}^L \overline{A_j} U_j(\rho_i, \theta_i)$ 取代 Φ_i ;
- 7) 重复算法 3) ~ 6) 步直至正方形边界;
- 8) 作正方形内所有点的泽尼特多项式拟合, 得 $\overline{A_j}$, 若 $|\Phi_i - \sum_{j=1}^L \overline{A_j}(\rho_i, \theta_i) U_j(\rho_i, \theta_i)| > T$, 则视为误差点, 以 $\sum_{j=1}^L \overline{A_j}(\rho_i, \theta_i) U_j(\rho_i, \theta_i)$ 取代之;
- 9) 作正方形外四个弓形区域的相位去包裹。
先垂直正方形的边线作相位去包裹, 若 $|\Phi_i - \sum_{j=1}^L \overline{A_j}(\rho_i, \theta_i) U_j(\rho_i, \theta_i)| > T$, 则视为误差点, 以 $\sum_{j=1}^L \overline{A_j}(\rho_i, \theta_i) U_j(\rho_i, \theta_i)$ 取代之, 并继续下一行或列。如此重复直至边界。

3.4 误差点选取的讨论

在误差点选取的过程中, 漏选或误选的情形是可能发生的。一旦这一情形发生后, 则在漏选或误选点附近产生不正确的相位去包裹。由于误差的放大, 即出现 2π 的跳变, (24) 式很快将其探测出来, 进一步的拟合处理阻止了误差的传播。因此, 不正确的去包裹被局限于小的区域。当对正方形内所有点作泽尼特多项式拟合之后, 上述不正确的去包裹区域亦被清除 (见算法第 8) 步)。

3.5 新旧算法特点简要分析

“支切算法”当配对的两极点相差太远时, 一方面可能产生两极点的配对错误而导致去包裹失败; 另一方面, 寻找配对点将导致过大的计算量。细胞自动机算法由于基于循环算法, 收敛缓慢, 而难以实用; 二阶相位差分算法需要计算二阶相位差分及施行屏蔽(mask)操作和

耗时的填充算法; 最小价格匹配和稳态婚姻算法运用了计算机科学的基本算法, 但本质上仍为“支切算法”; DDS 算法运用自回归移动平均模型, 求取自回归系数相当费时; 基于马尔可夫随机场模型的并行算法须用到耗时的循环算法; 运用赛可罗夫正则化理论的算法及离散余弦变换的算法都要用到余弦变换, 不仅计算量大且由于变换而引入的误差降低了测量精度。

以上算法对误差点的处理皆可认为是全局性的。因此, 对非误差点的处理增加了相应的计算量。本文算法主要对误差点进行处理, 从而大大减少了计算量, 具有快速的特点。

4 实 验

我们在一台斐索(Fizeau)干涉仪上采用相移干涉术对一平面镜进行了测试。图 1 显示采用传统去包裹算法的相位恢复表面。图中凹凸块样和条状样表明进行了不正确的去包裹。图 2 显示采用本文算法进行去包裹得到的结果, 可见, 表面变得平整。图 3 给出了对应图 1 沿 y 方向的相位线。从中可见, 由于不正确的去包裹, 出现了一些接近 2π 的跳变。图 4 给出了对应图 2 的相应正确情形。

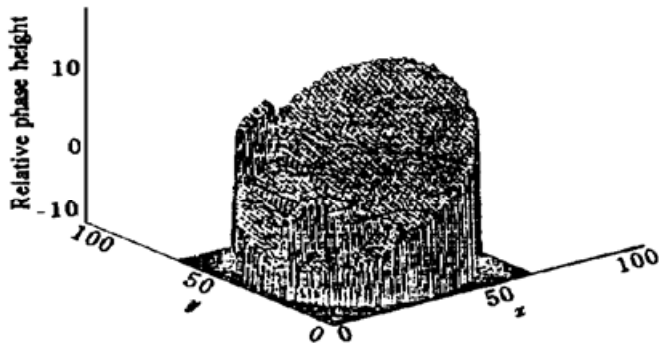


Fig. 1 Phase map with the conventional phase unwrapping algorithm

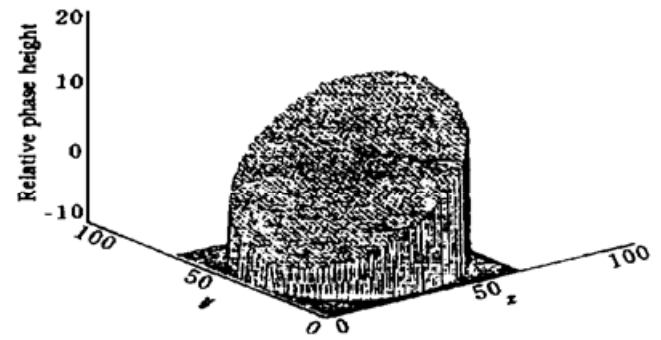


Fig. 2 Phase map with the new phase unwrapping algorithm

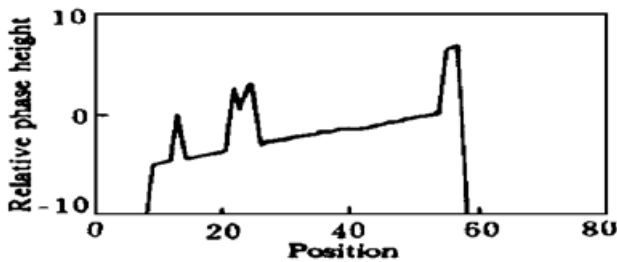


Fig. 3 Phase heights with a line along y direction

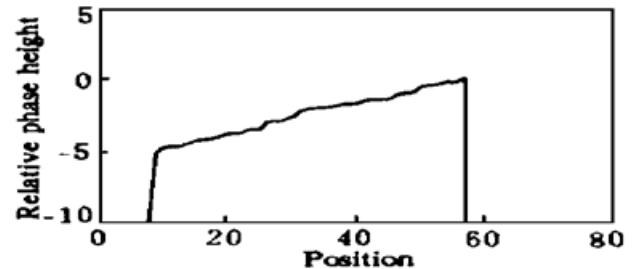


Fig. 4 Phase heights with a line along y direction

结 论 本文给出了一种运用泽尼特多项式的去包裹算法。描述了处理方孔径和圆孔径两种情形的具体步骤。该算法主要针对光学光滑表面以及低调制度点, 散斑点, 噪声或灰尘较少的情形。在本算法中假定条纹图中至少存在一条可用传统去包裹算法正确去包裹的水平线或垂直线, 这对于绝大多数应用而言, 是完全能够满足的。由于本算法的拟合处理过程主要局限于误差点区域, 因此具有较快计算速度的特点。

作者感谢浙江大学光科系现代光学仪器国家重点实验室白剑博士在实验中的帮助和有益的讨论。

参 考 文 献

- [1] R. M. Goldstein, H. A. Zebker, C. L. Werner. Satellite radar interferometry: two-dimensional phase

- unwrapping. *Radio Sci.*, 1988, **23**(4) : 713~ 720
- [2] L. D. Barr, V. C. du Foresto, J. Fox *et al.*. Large-mirror testing facility at the national optical astronomy observatories. *Opt. Eng.*, 1991, **30**(9) : 1405~ 1413
- [3] J. M. Huntley. Noise-immune phase unwrapping algorithm. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(15) : 3263~ 3270
- [4] R. Cusack, J. M. Huntley, H. T. Goldrein. Improved noise-immune phase unwrapping algorithm. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(5) : 781~ 789
- [5] D. C. Ghiglia, G. A. Mastin, L. A. Romero. Cellular-automata method for phase unwrapping. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **4**(1) : 267~ 280
- [6] A. Spik, D. W. Robinson. Investigation of the cellular automata method for phase unwrapping and its implementation on an array processor. *J. Modern Opt.*, 1990, **4**(1) : 25~ 37
- [7] M. Servin, R. Rodriguez-vera, A. J. Moore. A robust cellular processor for phase unwrapping. *J. Modern Opt.*, 1994, **41**(1) : 119~ 127
- [8] D. J. Bone. Fourier fringe analysis: the two-dimensional phase unwrapping problem. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(25) : 3627~ 3632
- [9] J. A. Quiroga, A. Gonzalez-cano, E. Bernabeu. Phase-unwrapping algorithm based on an adaptive criterion. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(14) : 2560~ 2563
- [10] J. Buckland, J. M. Huntley, S. R. E. Turner. Unwrapping noisy phase maps by use of a minimum-cost-matching algorithm. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(23) : 5100~ 5108
- [11] J. A. Quiroga, A. Gonzalez-cano, E. Bernabeu. Stable-marriages algorithm for preprocessing phase maps with discontinuity sources. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(23) : 5029~ 5038
- [12] S. M. Pandit, N. Jordache, G. A. Joshi. Data-dependent systems methodology for noise-insensitive phase unwrapping in laser interferometric surface characterization. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(10) : 2585~ 2592
- [13] J. L. Marroquin, M. Tapia, R. Rodriguez-vera *et al.*. Parallel algorithm for phase unwrapping based on Morkiv random fields models. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1995, **12**(12) : 2578~ 2585
- [14] J. L. Marroquin, M. Rivera. Quadratic regularization functionals for phase unwrapping. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1995, **12**(11) : 2393~ 2400
- [15] D. C. Ghiglia. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1) : 107~ 117
- [16] D. Malacara. *Optical Shop Testing*, New York, Wiley, 1978
- [17] D. Malacara, J. M. Carpio-Valadez, J. J. Sanchez-Mondragon. Wavefront fitting with discrete orthogonal polynomials in a unit radius circle. *Opt. Eng.*, 1990, **29**(6) : 672~ 675
- [18] K. Itoh. Analysis of the phase unwrapping algorithm. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(14) : 2470

Phase Unwrapping Algorithm with Zernike Polynomials

Wei Chunlong

(Department of Electronic Engineering, Shanghai University (Jiading Campus), Shanghai 201800)

Chen Mingyi

(Department of Mechanical Engineering, Shanghai University (Jiading Campus), Shanghai 201800)

Wang Zhijiang

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 28 May 1997; revised 2 September 1997)

Abstract A new phase unwrapping algorithm is presented. It is mainly used in the cases of optical smooth surface with few low modulation and speckle points, no heavy noise. The algorithm is based on Zernike polynomials. It fits the data into Zernike polynomials and filters the unreasonable data through a threshold. The new algorithm shows high speed calculation.

Key words interferometry, fringe pattern analysis, Zernike polynomials, phase unwrapping.