

# 以球面波为参考光的体全息图 衍射特性研究\*

李晓春 何庆声 邬敏贤 严瑛白 金国藩  
(清华大学精密仪器系, 北京 100084)

**摘 要** 研究以球面波为参考光时体全息图的相对衍射效率问题, 从理论计算中发现, 当以球面波为参考光时, 体全息图的串扰(cross-talk)性能比用平面波时要略好一些, 文章对此进行了分析解释并给出了实验验证。根据分析及实际读出的存储图像, 发现球面参考光相对于平面参考光也不引起像质退化。这些特性表明了体全息存储器对于参考光平行度调节的要求并不十分严格。此外, 文章还给出了以球面波为参考光时体全息图相对衍射效率的近似解析计算公式。

**关键词** 体全息, 角度选择性, 串扰。

## 1 引 言

相对于传统的数据存储方法来说, 体全息数据存储技术可提供更大的存储容量和更快的数据传输速率<sup>[1]</sup>, 因而近年来得到了人们广泛的关注和深入研究, 目前利用体全息存储方法记录 10,000 幅高分辨率全息图已有实验报道<sup>[2]</sup>。从物理上说, 体全息存储器的大容量主要得自于体全息图严格的布拉格选择性。按照基于平面波参考光的多重体全息图串扰理论分析<sup>[3]</sup>, 要分辨开相邻的两幅存储全息图, 则相邻两参考光间的夹角最小应为  $\Delta\theta = \lambda/t$ , 其中  $\lambda$  为光波波长,  $t$  为存储介质厚度。在实际的存储系统中, 由于光学元件的各种像差以及准直系统失调的存在, 参考光波前必定存在某种程度的畸变。假设参考光不再是一平面波, 而是球面波, 球心距存储介质的距离为  $d$ , 那么在常用的  $90^\circ$  存储方案中, 参考光所包含的平面波分量间具有一张角  $\Delta\theta \approx t/d$ 。若此张角必须小于  $\Delta\theta$ , 那么就要求球面波波前半径最小应为  $d_{\min} = t^2/\lambda$ 。取  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $t = 10 \text{ mm}$ , 则  $d_{\min} = 200 \text{ m}$ 。显然, 要得到波前曲率如此小的参考光, 实际中通常是很困难的。

为研究参考光波前畸变对体全息存储器性能的影响, 作为一种特例, 本文研究以球面波为参考光的体全息图衍射效率随读出参考光偏转角变化的规律。

## 2 以球面波为参考光的体全息图衍射特性

如图 1 所示, 全息图记录区域被限定在  $|z| < t/2$  范围内, 并设记录区域在  $x$ 、 $y$  方向无

\* 国家自然科学基金(69673033)和国防预研基金(96J20.10.1.JW0118)资助项目。

收稿日期: 1997-04-06; 收到修改稿日期: 1997-07-08

限大<sup>[4]</sup>。球面参考光球心距记录介质中心为  $d$ , 记录时的参考波  $R_w$  之球心在  $z$  轴上的  $(0, 0, -d)$  处, 读出时参考波  $R_r$  之球心绕  $x$  轴在  $yz$  平面内转过一小角度  $\theta$ 。考虑信号光中入射到  $yz$  平面的一个平面波分量  $S$ , 其传播方向与  $z$  轴夹角为  $\theta_s$ 。设介质记录的为相位型全息图, 则介电常数的调制可写为<sup>[3, 4]</sup>

$$\Delta\epsilon(\mathbf{r}) = R_w^*(x, y, z)S(y, z) \quad (1)$$

按照标量衍射理论<sup>[5]</sup>, 在观察点  $\mathbf{r}_p$  处的衍射场由如下体积积分给出:

$$E_d(\mathbf{r}_p) = \int_V R_r(\mathbf{r}) \Delta\epsilon(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) d^3\mathbf{r} \quad (2)$$

式中  $V$  表示全息图所占体积,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)$  为自由空间点扩散函数<sup>[6]</sup>:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = \frac{1}{j\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} \exp(j\frac{2\pi}{\lambda}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|) \approx \frac{1}{j\lambda(z_p - z)} \exp[j\frac{2\pi}{\lambda}(z_p - z) + j\frac{\pi}{\lambda} \frac{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}{z_p - z}] \quad (3)$$

第二步是熟悉的傍轴近似。在同样近似下, 球面参考波  $R_w$  可表达如下:

$$R_w(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda(z + d)} \exp(j\frac{2\pi}{\lambda}z + j\frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{z + d}) \quad (4)$$

对于记录数千页信息的全息存储器来说, 单幅全息图的衍射效率很小<sup>[7, 8]</sup>, 因此可以认为读出参考光无明显衰减, 这样在读出偏转角  $\theta$  很小时,  $R_r$  可写为

$$R_r(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda(z + d)} \exp\{j\frac{2\pi}{\lambda}[-y\theta + z(1 - \frac{\theta^2}{2})]\} \times \exp\{j\frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + [y(1 - \frac{\theta^2}{2}) + z\theta]^2}{z + d}\} \quad (5)$$

平面信号光表达式为:

$$S(y, z) = \exp\{j(2\pi/\lambda)[yu_y + z(1 - u_y^2/2)]\} \quad (6)$$

其中  $u_y = \sin \theta \ll 1$ 。将(1)式及(3~ 6)式代入(2)式, 并忽略由于球面参考波的发散而引起的介电常数调制深度的变化, 可得:

$$E_d(\mathbf{r}_p) = \frac{\exp(j2\pi z_p/\lambda)}{\lambda^2 d^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-l/2}^{l/2} dz \frac{1}{j\lambda(z_p - z)} \times \exp\{j\frac{2\pi}{\lambda}[y(u_y - \theta) + z(-\frac{\theta^2}{2} - \frac{u_y^2}{2})] + j\frac{\pi}{\lambda} \frac{(z^2 - y^2)\theta^2 + 2yz\theta}{z + d}\} \times \exp[j\frac{\pi}{\lambda} \frac{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}{z_p - z}] \quad (7)$$

对以光折变晶体为记录介质的存储器, 体全息图厚度通常大于数毫米, 因而全息图的布拉格角选择范围在  $10^{-3}$  rad 量级或者更小, 这样在(7)式的指数项中就可忽略掉  $\theta^2$  项, 而仅保留到  $\theta$  的一次项。经过这样的简化, 然后再利用下述积分公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(aw^2 + 2bw)] dw = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \exp[j\operatorname{sgn}(\frac{a\pi}{4}) - j\frac{b^2}{a}], \quad a, b \text{ 为实数, 且 } a \neq 0 \quad (8)$$

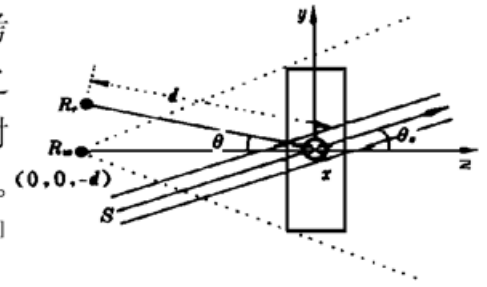


Fig. 1 Record and readout of a volume hologram by using a spherical reference wave

即可完成(7)式中对  $x$ 、 $y$  两项的积分, 最后得到:

$$E_d(\mathbf{r}_p) = \frac{1}{\lambda^2 d^2} \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ y_p u_y + z_p \left( 1 - \frac{u_y^2}{2} \right) \right] - j \frac{2\pi\theta}{\lambda} (y_p - z_p u_y) \right\} \times \int_{-(t/2)}^{(t/2)} \exp \left[ -j \frac{2\pi\theta z}{\lambda} \left( u_y - \frac{y_p - z_p u_y + z u_y}{z + d} \right) \right] dz \quad (9)$$

第一个指数因子的意义如下: 若  $\theta = 0$ , 即用原始记录时的球面参考波再来读体全息图, 则读出衍射波恰为所记录的信号光  $S$ 。若  $\theta \neq 0$ , 那么读出重建波传播方向相对于原信号光产生一角偏移量:  $-\theta$ 。如前述, 由于通常  $\theta$  很小, 因此读出衍射光主要是沿原信号光方向传播的, 即近似满足  $y_p \approx z_p u_y$ 。取观察点  $\mathbf{r}_p$  使其满足  $y_p = z_p u_y$ , 这样由(9)式可得衍射效率如下:

$$\eta(\theta) = |E_d(\mathbf{r}_p)|^2 / |R_r|^2 \propto |J|^2 \quad (10)$$

其中

$$J = \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left[ -j \frac{2\pi u_y \theta}{\lambda} q \left( 1 - \frac{q}{q + D_t} \right) \right] dq \quad (11)$$

$$D_t = d/t \quad (12)$$

若  $D_t \rightarrow \infty$ , 即参考光为平面波的情况, 由(10)式、(11)式可得  $\eta(\theta) \propto \text{sinc}^2(tu_y \theta / \lambda)$ , 此时体全息图的角度选择范围为:

$$\Delta\theta = \lambda / (tu_y) = \lambda / (t \sin \theta) \quad (13)$$

图 2 给出了按(10)式、(11)式计算得到的相对衍射效率随读出偏转角  $\theta$  的变化曲线, 其中对球面波取  $D_t = 5$ , 图中对偏转角  $\theta$  用平面波时的布拉格选择角  $\Delta\theta$  ((13)式)进行了归一化。可以看出, 与使用平面波时的情况不同, 当以球面波为参考光时,  $\eta$  随  $\theta$  变化曲线的包络出现振荡, 但此振荡包络总在  $\text{sinc}^2$  函数包络线的下面。

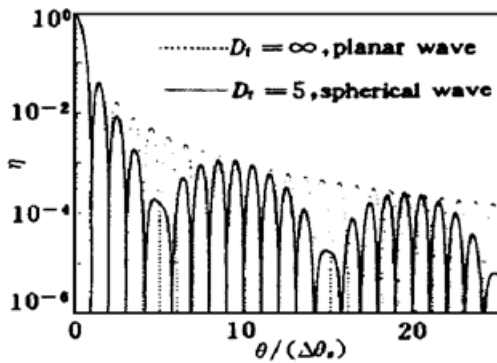


Fig. 2 Relative diffraction efficiency  $\eta$  versus reading beam's deflection angle  $\theta$

对于角度多重体全息存储器来说, 为抑制串音噪声, 通常的做法是通过降低全息图存储的角密度<sup>[2]</sup>。设相邻两全息图的参考光束间的夹角为  $\eta$ - $\theta$  曲线上第一极小值所对应偏转角的 4 倍<sup>[2]</sup>, 考虑到实际载有信息的物光总包含一定角范围的平面波, 由图 2 可见, 对于平面参考光情况, 在读取某幅存储全息图时, 最大串音噪声是由相邻存储全息图产生的, 噪声强度约为信号强度的 0.8%。对于  $D_t = 5$  的球面参考光情况, 由于相邻全息图恰处于  $\eta$ - $\theta$  曲线包络的谷值处, 因而最大串音噪声由相邻及次相邻存储全息图产生, 前者引起的噪声强度约为信号强度的 0.2%, 后者引入的约为信号强度的 0.1%。由此对比可见, 当以球面波为参考光时, 体全息图的串扰性能比使用平面波时更好。

从下面的事实可以解释球面参考波降低串扰的原因。当用一偏转角为  $\theta$  的球面波  $R_r$  读出已记录的相位全息图  $R_w^* S$  时, 则由位于  $z$  处的一薄层全息图形成的衍射场( $\theta^2$  项已被省略)为

$$R_r(x, y, z) R_w^*(x, y, z) S(y, z) = \frac{1}{\lambda^2 d^2} \exp \left( -j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\theta}{1 + z/d} y \right) \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ y u_y + z \left( 1 - \frac{u_y^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (14)$$

可见, 若  $\theta = 0$ , 则读出的为原始记录信号波  $S$ 。若偏转角  $\theta \neq 0$ , 则由于第一项指数因子的存

在, 读出重建波相对于原始信号波  $S$  有一角偏离量:

$$\delta\theta_s = - \frac{1}{\cos \theta_s} \frac{\theta}{1 + (z/d)} \quad (15)$$

对于平面参考波来说,  $d \rightarrow \infty$ , 因而  $\delta\theta_s$  与  $z$  无关, 恒为  $-\theta/\cos \theta_s$ , 而对于球面波来说, 由于  $d$  有限, 因而偏离角  $\delta\theta_s$  与  $z$  有关。正是由于不同位置处的全息图薄层所产生的重建波有不同的偏离角, 破坏了读出重建波的相干叠加, 从而造成以球面波为参考光时串扰的下降。

按图 1,  $D_t > 0$  对应于发散球面波的情况, 当  $D_t < 0$ , 即参考光为会聚球面波时, 由(11)式不难看出,  $J(-D_t, \theta) = J^*(D_t, \theta)$ , \* 表示复共轭。按照(10)式, 因而有

$$\eta(-D_t, \theta) = \eta(D_t, \theta) \quad (16)$$

在  $D_t = d/t$  有限时, (11) 式是不可积的, 根据数值计算结果发现, 当  $d/t$  值较大( $> 5$ )时, 体全息图的衍射效率近似

$$\eta(\theta) \approx \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2D_t} \frac{\theta}{\lambda/(tu_y)} \right] \text{sinc}^2 \left[ \frac{\theta}{\lambda/(tu_y)} \right] \quad (17)$$

图 3 给出了  $D_t = 10$  时按近似式(17) 及按(10) 式、(11) 式得到的相对衍射效率的比较, 可见, 除在衍射效率曲线包络的极小值附近外, (17) 式能很好地近似以球面波为参考光时体全息图的相对衍射效率。 $D_t$  越大, 近似程度越好。

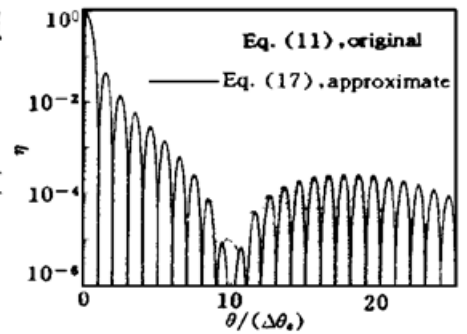


Fig. 3 Approximation of the normalized diffraction efficiency  $\eta$  of a volume hologram with a spherical reference wave using Eq. (17).  $D_t = 10$

### 3 实 验

图 4 为本文采用的实验装置简图。波长 514.5 nm 的入射平行光经偏振分光镜 PBS 被分为参考光与物光两路。物光中的空间光调制器为一精工(Seiko)透射式液晶电视, 像元数  $320 \times 220$ , 透镜  $L_3$ 、 $L_4$  共焦放置, 空间光调制器的像近似位于晶体 CR 处。参考光通过透镜  $L_1$ 、反射镜  $M_1$  及透镜  $L_2$  到达记录晶体, 其中  $L_1$  与  $M_1$  被固定在同一精密平移台 S 上。适当调整  $L_2$  的位置, 即可得到平行参考光以及会聚或者发散的球面参考光。左右移动平台 S, 可以精密调整参考光入射角度。实验使用两块掺铁铈酸锂晶体  $CR_1$  ( $12 \text{ mm} \times 12 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  含量 0.015 mol%) 及  $CR_2$  ( $15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm} \times 3.6 \text{ mm}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  含量 0.02 mol%), 当记录图像时使用  $CR_1$ , 测量衍射效率时使用片状晶体  $CR_2$ , 此时空间光调制器被移去, 物光为一平行光, 物光与参考光从晶体  $a$  面对称射入, 透镜  $L_5$  及针孔 P 用于对读出平行光进行空间滤波以消除杂散背景光的干扰。当读出记录图像时, 移去针孔 P, CCD 置于  $L_5$  后适当位置处。参考光与物光均为  $o$  光, 晶体  $CR_1$ 、 $CR_2$  的 C 轴均与全息图波矢方向相平行, 当  $L_2$  移动时, 保持晶体位于其后焦面上。

图 5 是用  $CR_2$  实验测得的相对衍射效率曲线。可以看出, 以球面波为参考光时, 衍射效率曲线的第一、第二旁瓣大小与使用平面波时几乎相等, 但高阶旁瓣(第三、第四瓣)开始略有降低, 与理论计算相一致(见图 2)。

使用平面参考光与球面参考光, 实验在晶体  $CR_1$  中各记录了一组图像, 图 6 为其中的一幅。可以看出, 当使用两种参考光时, 读出图像的每个象素均清晰可辨, 证明球面参考波可以准确恢复存储图像, 对于像质的影响很小。

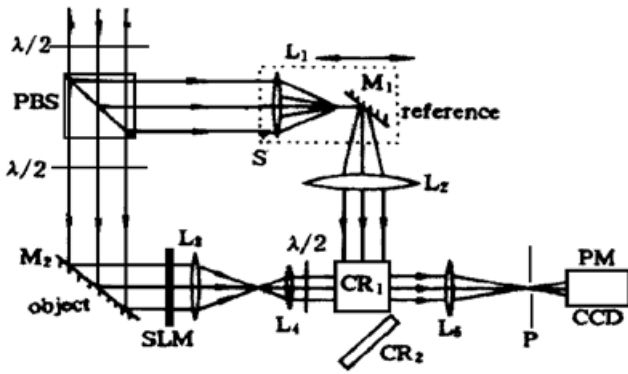


Fig. 4 Schematic illustration of the experimental arrangements. PBS: polarizing beam splitter; CR: crystal; M: mirror; L: lens; P: pin hole; PM: power meter

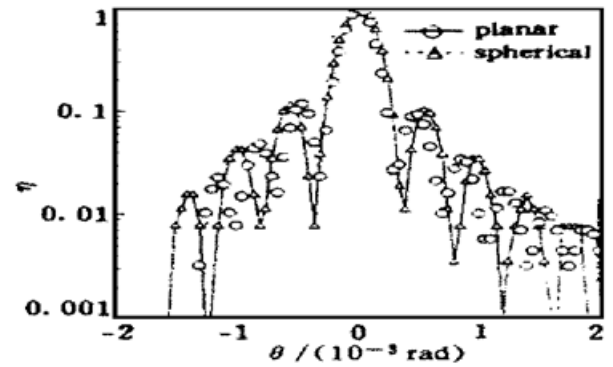


Fig. 5 Normalized diffraction efficiency  $\eta$  versus the reference beam's offset angle  $\theta$ . CR<sub>2</sub> was used. For the spherical reference beam,  $D_r = -136$

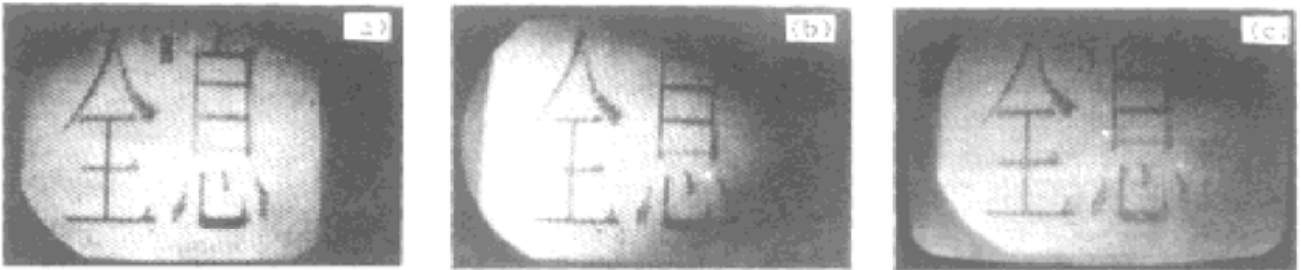


Fig. 6 Comparison between the readout of the planar recording reference wave and that of the spherical wave. CR<sub>1</sub> was used. (a) was the original input image. (b) was read out by the planar reference beam and (c) by the spherical reference beam ( $D_r = -41$ )

**结 论** 本文理论计算出并用实验验证了当以球面波为参考光时，体全息图相对衍射效率的高阶旁瓣比用平面波时要小，这一特性有利于对大容量全息存储器中串音的抑制。此外，根据分析及实验读出的存储图像，球面参考光对于存储图像像质的影响也很小。但是，也发现理论分析与实验曲线之间存在有一些明显的不一致，比如，根据分析计算，当使用球面参考光时，体全息图的布拉格选择性与使用平面波时相差不多；当用平面参考光时，衍射效率随参考光偏转角的变化呈  $\text{sinc}^2(\cdot)$  函数规律，第一旁瓣极大值约 5%，而实际测量结果表明：球面参考光将引起衍射效率曲线主瓣明显的展宽，降低了体全息图的布拉格选择性；相对衍射效率第一旁瓣达 10%，约为理论值的 2 倍。这些问题表明，需要对光折变晶体中体全息图的衍射特性进行更深入的分析研究。

### 参 考 文 献

- [1] L. Hesselink, M. C. Bashaw, Optical memories implemented with photorefractive media. *Opt. and Quant. Electron.*, 1993, **25**(9) : S611~ S661
- [2] G. W. Burr, F. H. Mok, D. Psaltis, in Conference on lasers and electro-Optics. *OSA Technical Digest Series* (Optical Society of America, Washington, D. C., 1994), 1994, paper CMB7
- [3] C. Gu, J. Hong, I. McMichael *et al.*, Cross-talk-limited storage capacity of volume holographic memory. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1992, **9**(11) : 1978~ 1983

- [4] G. Barbastathis, M. Levene, D. Psaltis, Shift multiplexing with spherical reference waves. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(4) : 2403~ 2417
- [5] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., New York: Wiley, 1975. 418~ 421
- [6] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. New York: McGraw-Hill, 1968. 33~ 39
- [7] D. Psaltis, D. Brady, K. Wagner, Adaptive optical networks using photorefractive crystals. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(9) : 1752~ 1759
- [8] Y. Taketomi, J. E. Ford, H. Sasaki *et al.*, Incremental recording for photorefractive hologram multiplexing. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(22) : 1774~ 1776

## Diffraction Properties of Volume Hologram with Spherical Reference Waves

Li Xiaochun    He Qingsheng    Wu Minxian    Yan Yingbai    Jin Guofan

(*Department of Precision Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084*)

(Received 6 April 1997; revised 8 July 1997)

**Abstract** We investigate the relative diffraction efficiency of a volume hologram where a spherical wave is used as the reference beam. Through theoretical analysis we find that the cross-talk performance of a volume hologram with a spherical reference wave is somewhat better than that with a planar reference wave. This phenomenon is explained and demonstrated. After comparing the readout images by a spherical reference wave with those by a planar reference wave, we also verify that a spherical reference wave is of little effects on the readout image quality. These features imply not so rigorous requirements on the parallelism of the reference beam in a volume holographic memory. In addition, a phenomenal analytical expression to approximately calculate the relative diffraction efficiency of a volume hologram with a spherical reference beam is presented.

**Key words** volume holography, angular selectivity, cross-talk.