

纯相位型滤波器的伪随机编码

刘文耀

(天津大学精仪学院, 天津 300072)

R. W. Cohn

(Department of Electrical Engineering, University of Louisville, Louisville, Kentucky 40292, USA)

摘 要 阐述了纯相位型空间光滤波器的设计中伪随机编码理论、技术与方法。文中亦展示了利用控制待编码的复数值函数的振幅能够十分有效地改善远场衍射的质量。

关键词 纯相位型滤波器, 伪随机编码, 远场衍射。

1 引 言

光学相关处理器系统日益广泛地被应用于各个领域, 其中在军事上的应用尤为突出。这主要是因为现代战争迫切需要对高速运动目标物的识别、跟踪和定位。光学相关处理器利用了光的空间并行性, 实时地完成识别过程中的相关运算。众所周知, 在这些系统中, 空间光调制器(SLMs)是关键器件, 它的性能直接影响着系统的优劣。然而现有的空间光调制器件却存在着分辨率不高, 响应速率低, 和不能完成全复数值调制等局限性。一种伪随机纯相位调制, 能够十分精确地近似全复数值空间调制^[1, 2]。在这种纯相位型空间光滤波器的优化设计中, 计算用时量低微, 有利于空间光调制器的实时操作。而普通的设计与优化过程, 比如达曼光栅^[3-5], 模拟回火^[6]和受限叠代化^[7-8]等, 只有在脱机的情况下才能完成, 大量的计算用时其费用也是巨大的。本文分别对伪随机编码的数学描述; 纯相位型空间光滤波器的优化设计等进行了论述, 并讨论了衍射场图像质量的改善措施和实验与结果。

2 伪随机编码的数学描述

在空间光调制器输入面上 x_i 处的像元素的复数值透过率 a_i 可以由下式描述:

$$a_i(x) = r(x - x_i) \exp \{j\varphi\} \quad (1)$$

其中, φ 为在 x_i 处像元素透过率的复相位角。如果相位 φ 是互相独立的随机变量, 则像元透过率 $a_i(x)$ 的数学期望为^[1]:

$$\bar{a}_i(x) = \langle a_i(x) \rangle = r(x - x_i) \exp \{j\bar{\varphi}\} M_i(l) \quad (2)$$

其中 $M_i(l)$ 为随机变量 $(\varphi - \bar{\varphi})$ 无偏置时的特征函数。 $r(x - x_i)$ 为矩形波函数。

设相位 φ 随机变量的概率密度函数是均匀分体的, 则总的相位延展 v_i 和特征函数 $M_i(1)$

分别为:

$$v_i = \sqrt{12}\sigma_i, \quad M_i(1) = \text{sinc}(v_i/2\pi) \quad (3)$$

其中 σ_i 为随机变量 φ 的标准方差。将(3)式代入(2)式得:

$$\bar{a}_i(x) = r(x - x_i) \text{sinc}(v_i/2\pi) \exp\{j\bar{\varphi}\} = a_{id} \exp\{j\bar{\varphi}\} \quad (4)$$

其中 a_{id} 和 $\bar{\varphi}$ 分别为在 x_i 处复值透过率的预期振幅和相位值(desired amplitude and phase), 即大数下的均值:

$$a_{id} = \text{sinc}\left(\frac{v_i}{2\pi}\right) \quad (5)$$

由(3)式和(4)式可知, 每一个像元 i 的透过率振幅是由随机变量 φ 的方差值 σ_i 来控制的。由(5)式可知, φ 的相位延展值 $v_i \in [0, 2\pi]$ 。

在纯相位型滤波器的设计中, 伪随机编码主要依据(6)式进行。如果已知理想滤波函数(待设计)的振幅 a_{id} , 对(6)式进行反演运算可以求解 v_i 的值:

$$v_i = 2\pi \text{sinc}^{-1}(a_{id}) \quad (6)$$

(6)式展示出随机相位延展 v_i 与预期振幅 a_{id} 是非线性关系, 如图1所示。

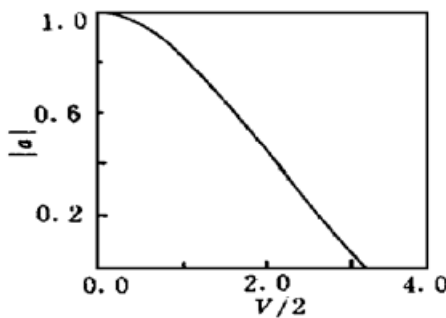


Fig. 1 The relationship between the desired amplitude and phase spread

为了证明伪随机编码的全过程, 设(7)式为一个随机数发生器, 并且具有均匀分布概率密度:

$$x = \text{ran}(I_{\text{seed}}) \quad (7)$$

其中 I_{seed} 为随机数发生器的种源。 x 为随机数, 且 $x \in (0, 1)$ 。于是相位随机偏差量(随机相位差)可由下式表示:

$$\delta\varphi = (x - 1/2)v_i \quad (8)$$

其中 $\delta\varphi$ 为相对于 $\bar{\varphi}$ 的随机相位偏差, 其分布亦为均匀分布, 其范围为:

$$-v/2 \leq \delta\varphi \leq v/2 \quad (9)$$

即 $\delta\varphi \in [-\pi, \pi]$ 。至此, 一个纯相位滤波器可表示为:

$$a_i(x) = \exp[j(\bar{\varphi} + \delta\varphi)] \quad (10)$$

由(10)式可知, 纯相位型滤波器的振幅恒等于1, 而其相位是从 $\bar{\varphi}$ 为均值, 以 $\delta\varphi \in [-\pi, \pi]$ 为方差的均匀分布的随机变量。

综上所述, 纯相位型滤波器的伪随机编码过程是对输入图像按其像元素排列, 一一进行(6)~(8)式的运算, 而最终得到(9)式所表示的纯相位型滤波器。

由上述公式知计算量低微(将在第3节中作进一步说明)。还可以用一种快速有效的方法(查找表)来完成(6)式的运算。将 a_{id} 与 v_i 的离散对应值预先制好表, 在编码过程中, 可以直接查表完成(6)式的变换。

3 优化设计过程

纯相位型空间滤波器优化设计过程是根据蒙特卡罗(Monte Carlo)评估进行的。蒙特卡罗评估是对工程随机过程进行评估的常用且有效的方法。它以工程随机过程中的某一个或几个随机变量为评估标准, 通过反复改变过程中的某一个或几个参数(叠代过程)来完成的。

下面用一个实例说明优化设计过程。

光斑点阵列发生器(spot array generator)是一类典型的衍射光学元件。它在光互连、光学神经网络和数字光计算等应用领域中十分重要。

$$a(x) = \sum_{i=1}^M \exp [+ j(2\pi f_i x + \varphi)] \quad (11)$$

其中 $x = 1, 2, 3, \dots, N$, 为滤波器空域中的像素描述, N 为像素总数; f_i 是在衍射场中的频率常数, 或者认定为在衍射场中光斑点的位置。从(11)式可知, 光斑点阵列发生器是一簇复值正弦函数的线性组合, 能产生 M 个具有均匀强度的光斑点。这 M 个光斑点的相位参量 $\varphi(i = 1, 2, \dots, M)$ 并不重要, 要把它作为在编码过程中的设计变量。

评估一个空间光滤波器好与坏的主要参量之一是衍射效率。当然还有诸如衍射场中图像的信噪比和光斑点强度分布的不均匀性等。分别表述为

$$\eta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a^2(i), \quad a(i) \in [0, 1] \quad (12)$$

其中 η 这衍射效率^[1], a 为归一化的滤波器的振幅, N 为滤波器空域中的像元总数。

在衍射场中, 信号对峰值噪声比定义如下:

$$SNR_{np} = \frac{(1/M) \sum_{i=1}^M I(i)}{(I_n)_{\max}} \quad (13)$$

式中 SNR_{np} 为信号对峰值噪声比; $I(i)$ 为光斑点的强度; $(I_n)_{\max}$ 为噪声背景中最大的噪声强度值。

第二个信噪比定义如下:

$$SNR_{rms} = \frac{\langle I \rangle}{\sigma_I} = \frac{(1/M) \sum_{i=1}^M I(i)}{\sqrt{(1/M) \sum_{i=1}^M (I_i - \langle I \rangle)^2}} \quad (14)$$

其中 SNR_{rms} 为信号对信号方差比; $\langle I \rangle$ 为光斑点的强度均值, σ_I 为其方差。

第三个信噪比定义为:

$$SNR_{pp} = \frac{I_{\max}}{I_{\max} - I_{\min}} \quad (15)$$

其中 SNR_{pp} 为信号对信号最大变化量之比, I_{\max} 和 I_{\min} 分别为光斑点的最大和最小强度值。

光斑点强度分布不均匀性定义如下:

$$1/SNR_{rms} = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \quad (16)$$

其中 $1/SNR_{rms}$ 是 SNR_{rms} 的倒数, 被定义为光斑点强度分布不均匀性。或定义:

$$1/SNR_{pp} = (I_{\max} - I_{\min})/I_{\max} \quad (17)$$

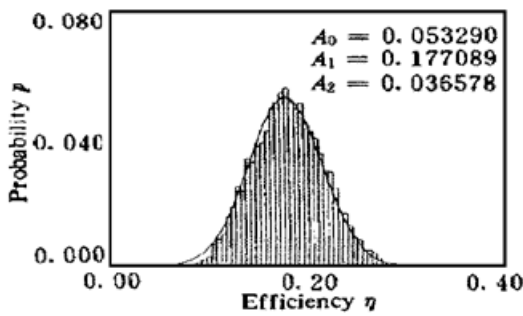
其中 $1/SNR_{pp}$ 为 SNR_{pp} 的倒数, 用以说明斑点强度不均匀性。

在光斑点阵列发生器优化设计中, 应用蒙特卡罗评估, 首先随机地选择(11)式中的设计变量 φ , 并完成(11)式的运算, 即可以得到滤波器的一个设计样本。如果以滤波器的衍射效率为主要评判参量, 则完成(12)式的运算, 可得到本设计的滤波器的衍射效率, 即完成了一次叠代。显然, 这种优化过程与普通的设计优化过程, 比如达曼光栅、模拟回火和受限叠代等相比, 避开了在考虑滤波器空域和频域时所进行的、反复的傅里叶正、逆变换。(这些运算是费时的复值运算)。从这个意义上讲本文的优化过程要省时得多。

另外, 需要说的是: 在由上述优化过程得到一个复振幅“最佳样本” $a(x)$ 以后, (即得到

\bar{a}_i 和 $\bar{\phi}$ ，再依据(6) ~ (8) 式最后得到均匀分布的纯相位滤波器的设计。这意味着，在整个优化设计中，(6) ~ (8) 式的计算并不被带进每一次的叠代过程。

有关叠代次数 N 的选择完全是随人意愿的。但由图 2 清楚地知道，在以 η 为优化评判标准时 要想得到 $\eta \geq 31\%$ 的设计， N 将不小于 5000 次。



由图 2 知，得到 $\eta = 31\%$ 的概率是很小的。如果只要求 $\eta \leq 10\%$ ，那么 N 取少数几次即可得到满意结果。

作为实例，作者设计了一个 300×300 像素点空间光滤波器，它的衍射场(傅里叶谱面)是光强均匀分布的 8×8 光斑点阵列(在本文第 5 节中将进一步说明)。虽然设定蒙特卡罗叠代次数 $N = 5000$ ，但当 $N = 17$ 次时， $\eta = 22\%$ 。由图 2 亦可知这个结果的必然性， η 在为 20% 左右时出现的概率为最大，这个衍射效率 $\eta = 22\%$ 也是不低的。如果认定 $\eta = 22\%$ 为“最佳”结果，此时整个优化设计过程用时甚微。

Fig. 2 The Monto Carlo simulation of 6×6 spot array generators (5000 simulation run)

4 衍射图像质量的改善

改善衍射图像的质量始终是空间光滤波器设计所追逐的主要目标。在纯相位型滤波器伪随机编码设计中，对待编码的复值函数的振幅进行线性变换：

$$g(x) = K a(x) + c \tag{18}$$

其中 $a(x)$ 为滤波器复振幅； K 为变换因子或称放大因子。一般情况下 $K \in [1, 2]$ ， c 为常量，在本文的设计中 $c = 0$ 。 $g(x)$ 为滤波器编码前的复振幅。编码过程中首先将 $g(x)$ 归一化。由图 3 可以形象地描绘这一过程。当改变 K 值时，变等效于改变了一次阈值半径。在图 3 中，横轴和纵轴分别为复数值空间的实轴和虚轴。 $K = 1.25$ 时，所对应的圆外的所有分布数据将全部归一化至圆周之上，且原有的相位角保持不变。这仿佛使数据分布趋于饱和，所以有时也称此过程为饱和过程。这样每改变一个 K 值，就得到一个纯相位型滤波器的设计样本和与之相对应的光斑点阵列图像的一组质量参数(由(12) ~ (17) 式分别给出)。将这些参数与 η 的关系示于图 4。需要特别说明的是 η 由小到大的变化是在逐渐增大 K 值而得到的。

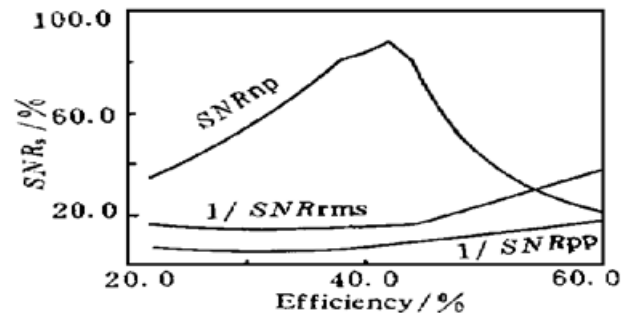
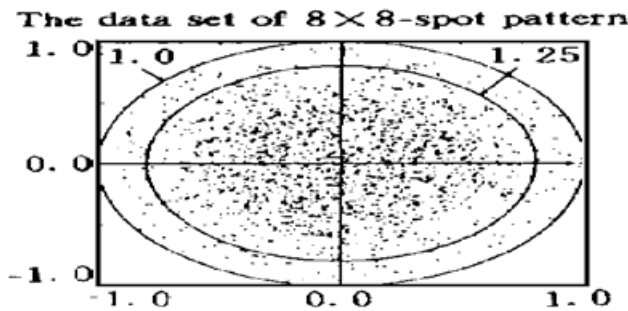


Fig. 3 The linear transformation of the complex-valued amplitude that is encode in the design of phase-only filter

Fig. 4 The performance of spot array (8×8 spots) for changing the complex-valued amplitude of the filters

就振幅而言，(18) 式的线性变换是灰度变换。在图像处理中常使用这种变换进行对比度增强处理，即增大图像灰度的动态分布范围，进而改善视觉效果。灰度的其他变换如对数、

指数等变换, 常被用作图像的滤波处理, 其典型应用为图像的同态滤波。

本文, 在纯相位型空间光滤波器的随机编码设计中, 引入了(18)式的线性变换, 却有着与上述迥然不同的物理含意和目的。它使滤波器数据趋于“饱和”, 因为在完成(18)式运算后, 接着的是归一化处理, 这种变换使数据幅度增大, 且为 1 的数量增多。它直接影响着随机编码的过程和滤波器的质量。作者在这方面作了反复的模拟实验, 并以此来证明这种影响。图 4 中的曲线定量地描述了这种关系。图 5 也示出了模拟实验和光学实验的结果。从中可以清楚地看到: 当 $K = 1, 1/0.7$ 和 ∞ 时, 所对应的 η 分别为 22%, 43% 和 100%。

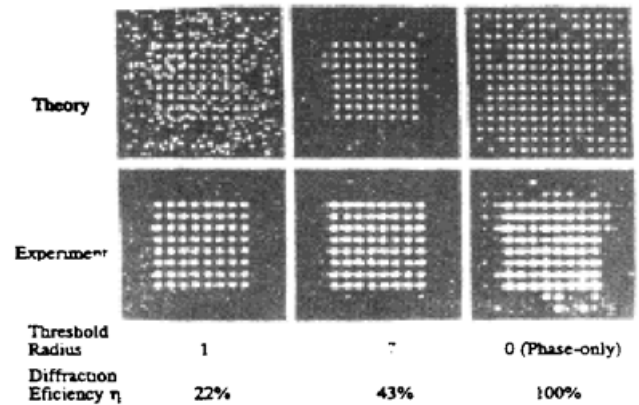


Fig. 5 Diffraction patterns for various threshold radii

5 实验与结果

作者以设计一个 8×8 光斑点阵列发生器为实例, 进行模拟设计与光学实验的验证。考虑到光学实验中所用液晶光阀的分辨率, 作者在设计中采用 300×300 像素点的数据库。

需要指出的是在文献[1]中由于光学实验系统中所用光阀分辨率的限制给出了在滤波器空域中 128×128 像素点的纯相位滤波器设计, 欲得到 8×8 光点强度均匀分布的阵列是较为困难的, 其衍射场强度分布的均匀性和信噪比都不会很好。做到 6×6 或 4×4 光斑点阵列和结果是合理的。

本文作者使用 Hughes ILATM LCLV 做了光学实验, 系统示于图 6。实验时, 滤波器的设计数据(纯相位随机编码数据 300×300) 经计算机写入 CRT 并通过透镜成像在(写入) LCLVM

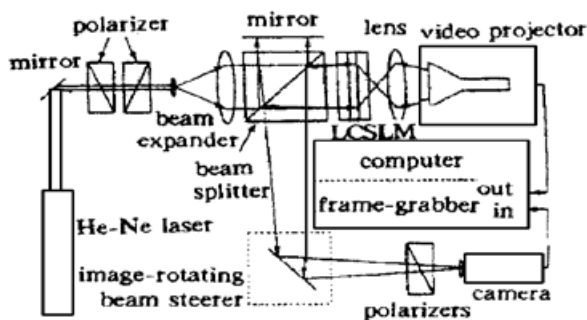


Fig. 6 Fourier transform optical system with Hughes ILATM LCLV

使背景噪声可见, 模拟实验的数据均放大 50 倍而后显示的。

实验中, 设定蒙特卡罗叠代次数为 5000 次。但在第 17 次随机选择设计变量 Φ (即自由度) 后, 便可得到较为理想的模拟结果($\eta = 22\%$)。这时所对应的滤波器结果列于图 5 中的第 1 列。并以此组数据为起始, 在伪随机编码中, 加入线性变换因子 K , 变可得到一系列滤波器的设计样本和它们的性能曲线(图 4)。当 $K = 1.43$ 时, $\eta = 43\%$, 对应的信噪比 SNR_{np} 最大为 87, 结果示于图 5 的第 2 列。当 $K \rightarrow \infty$ 时, 数据完全“饱和”, 光斑点影像示于图 5 的第 3 列。这是一种特例, 即在编码前, 全部空域中像元的振幅为 1, 相位保持原有的值不变。

设计数据(纯相位随机编码数据 300×300) 经计算机写入 CRT 并通过透镜成像在(写入) LCLVM 上(Hughes ILATM 型), 相干读出光由图 6 中左边部分形成并将 LCLVM 信息读出(读出光被调制), 并与迈克尔逊另一干涉臂光束干涉(傅里叶变换运算), 结果由 CCD 接收(平方律), 输入计算机并显示在屏幕上。图 5 下部的 3 幅即为光学实验的结果的拷贝。为便于比较, 图 5 的上部亦有 3 幅与下部了幅相对应的模拟实验结果。为了

结 论 本文阐述的这种基于随机理论对纯相位型空间光调制器进行伪随机编码设计方法可以近似或替代全复数值空间调制(全息调制)。这种不同于许多常规的空间滤波器的设计。本设计方法计算用时微量,优化过程简单,为空间光调制器的实时操作提供了极为有利的条件。对表征空间光调制器性能的几个重要参量如衍射效率,信噪比和衍射场强度分布不均匀性等,可通过线性变换因子 K 加以控制使得图像质量改善。对于本文设计实例 8×8 光斑点阵列发生器,可以直接应用于光互连,光学神经网络以及数字光计算之中。

作者十分感谢 Dr. A. A. Vasiliev 在光学实验中给予的帮助。

参 考 文 献

- [1] R. W. Cohn, Minhua Liang, Approximating fully complex spatial modulation with pseudorandom phase-only modulation. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(20) : 4406~ 4415
- [2] R. W. Cohn, Random phase errors and pseudorandom phase modulation of deformable mirror spatial light modulators, Optical Information Processing System and Architecture IV. *Proc. SPIE*, 1992, **1772** : 360~ 368
- [3] H. Dammann, K. Gortler, High-efficiency multiple imaging by means of multiple phase holograms. *Opt. Commun.*, 1971, **3**(3) : 312~ 315
- [4] J. Johns. M. M. Downs. M. E. Prise *et al.*, Dammann gratings for laser beam shaping. *Opt. Engng.*, 1989, **28**(12) : 1267~ 1295
- [5] F. B. McCormick, Generation of large spot arrays from a single laser beam by multiple imaging with binary phase gratings. *Opt. Engng.*, 1989, **28**(4) : 299~ 304
- [6] M. P. Dames, R. J. Dowling, P. Mckee *et al.*, Efficient optical elements to generate intensity weighted spot arrays: Design and fabrication. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(19) : 2685~ 2691
- [7] N. C. Gallagher, B. Liu, Method for computing kinoforms that reduces image reconstruction error. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(12) : 2328~ 2335
- [8] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, Practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction phase pictures. *Optik (Stuttgart)*, 1972, **35**(2) : 237~ 250

Pseudo-Random Encoding for Phase-Only Filters

Liu Wenyao

(College of Precision Instruments and Optoelectronic Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

R. W. Cohn

(Department of Electrical Engineering, University of Louisville, Louisville, KY40292 USA)

(Received 29 August 1997; revised 18 June 1997)

Abstract The design of phase-only modulators with pseudorandom encoding is presented and the theoretical fundamentals of the pseudorandom encoding is described. In the design, the quality of patterns of far-field diffraction can be greatly improved by means of the saturation process.

Key words phase-only filters, pseudorandom encoding, far-field diffraction.