

二维剪切波面重建的有限元模型*

白 剑 杨国光

(浙江大学现代光学仪器国家重点实验室, 杭州 310027)

摘 要 提出了解析二维剪切波面的有限元方法, 建立了二维剪切波面重建的有限元模型。计算机模拟结果表明, 有限元法解析二维剪切波面精度高, 对剪切波面具有平均作用, 对测量误差不敏感, 可适用于实时测量。

关键词 剪切波面, 有限元, 波面重建。

1 引 言

剪切干涉仪因其结构简单, 不需要参考表面而受到重视, 但剪切干涉图不直观, 而且现有的剪切干涉计算方法复杂、落后、精度低, 这正是长期以来剪切干涉法未被广泛采用的原因。因此寻求新的剪切波面的重建方法是推广剪切干涉技术的关键, 该方法必须具有低的误差传递、高的精度要求, 同时适合计算机处理, 实现实时测量的要求。Fried 和 Hudgin 等人从最小二乘意义上重建波面^[1~7], 虽控制了误差传递, 但未能实现低的误差传递。Klauser^[8]利用离散傅里叶变换的方法实现了剪切波面的重建, 但对圆域波面数据还需进行预处理^[9], 难以实现实时处理。本文采用有限元方法实现剪切波面的重建, 对所建立的数学模型进行了探讨与研究。

2 有限元模型

利用有限元方法可以实现剪切波面的重建, 由于剪切波面通常由离散采集列阵表示, 而剪切量也常取为采样间隔的整数倍, 因此当相对剪切量较小时, 可建立微分形式剪切波面分析的有限元模型; 当相对剪切量较大时, 可建立差分形式剪切波面分析的有限元模型。

2.1 微分形式剪切波面分析的有限元模型

当剪切量 S 很小时, 剪切波面 $\Delta W_x(x, y)$ 与波重建波面 $W(x, y)$ 的关系可表示为

$$\Delta W_x(x, y) \approx \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} S \quad (1)$$

通常坐标值 x, y 以采样间隔为单位, 而 S 也常取 1, 于是剪切波面即为求解波面的微分, 则

* 机械工业部重点科技基金。

收稿日期: 1996-10-28; 收到修改稿日期: 1997-07-09

$$\nabla W(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} W(x, y) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} W(x, y) \mathbf{j} \quad (2)$$

而实际测量得到的剪切波面可表示为

$$\mathbf{f}(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j} \quad (3)$$

其中 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 为正交方向上所得到的剪切波面数据。泛函积分

$$I = \iint [\nabla W(x, y) - \mathbf{f}(x, y)]^2 dx dy = \iint \left[\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} - f_x(x, y) \right]^2 dx dy + \iint \left[\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} - f_y(x, y) \right]^2 dx dy \quad (4)$$

对求解域划分有限单元, 每个有限单元的大小为 $n_x \times n_y$ (以采样间隔为单位), 令单元数为 $ND \times MD$, 结点为 $W_{ij} (i = 1, \dots, ND + 1; j = 1, \dots, MD + 1)$ 。

定义函数 $\mathcal{Q}_i(x, y) = \mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(y)$

$$\text{其中 } \mathcal{Q}(x) = \begin{cases} [x - x_{(i-1)n_x}]/n_x & [x_{(i-1)n_x}, x_{in_x}] \\ [x_{(i+1)n_x} - x]/n_x & [x_{in_x}, x_{(i+1)n_x}] \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5)$$

为了容易验证, $\mathcal{Q}_i(x, y)$ 为一套线性插值函数, 同时, 它又具有 delta 函数的性质, 即对任一结点 (k, l) , 有

$$\mathcal{Q}_i(x_k, y_l) = \begin{cases} 1 & k = i, l = j \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

因此, 求解波面 $W(x, y)$ 可表示为

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^{MD+1} \sum_{i=1}^{ND+1} W_{ij} \mathcal{Q}_i(x, y) \quad (7)$$

利用有限元方程 $\partial/\partial W = 0$ 可得到所有结点参数 W_{ij} , 从而由于(7)式完成剪切波面的重建。

2.2 差分形式剪切波面的有限元模型

当剪切量 S 较大时, 剪切波面 $\Delta W_x(x, y)$ 表示为

$$\Delta W_x(x, y) = W(x + S, y) - W(x, y) \quad (8)$$

设 S_x, S_y 分别为 x, y 方向上的剪切量, 则此时剪切波面即为求解波面的差分, 则

$$\nabla W(x, y) = [W(x + S_x, y) - W(x, y)] \mathbf{i} + [W(x, y + S_y) - W(x, y)] \mathbf{j} \quad (9)$$

泛函积分

$$I = \iint [\nabla W(x, y) - \mathbf{f}(x, y)]^2 dx dy = \iint [W(x + S_x, y) - W(x, y) - f_x(x, y)]^2 dx dy + \iint [W(x, y + S_y) - W(x, y) - f_y(x, y)]^2 dx dy \quad (10)$$

对求解域划分有限单元, 使每个有限单元的大小为 $S_x \times S_y$ (以采样间隔为单位), 令单元数为 $ND \times MD$, 结点为 $W_{ij} (i = 1, \dots, ND + 1, j = 1, \dots, MD + 1)$ 。

与微分形式剪切波面分析相类似, 定义插值函数 $\mathcal{Q}_i(x, y) = \mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(y)$, 建立关于结点参数 W_{ij} 的有限元方程, 最终完成差分形式剪切波面的重建。

3 精度分析和实验结果

3.1 计算机模拟

从有限元模型中可以看出，求解波面用二维线性插值来表示，因此用有限元法解析二维剪切波面所得到的必然是一个近似的结果，用以下计算机模拟实验可以得到这种方法的近似程度。

对一个实际的波面位相数据(如图 1 所示)，分别以剪切量 1 个像素产生两个互相垂直方向上的理想剪切波面，如图 2 所示。图 3(a)是用微分形式剪切波面的有限元模型分析所得到的结果，图 3(b)是用差分形式剪切波面的有限元模型分析所得到的结果。用相减程序把上述结果与原始波面相比较，分别得到两种模型的计算精度，如图 4 所示。若以 PV 值作判据，精度分别为 $(\lambda/35)$ ， $(\lambda/200)$ ，显然上述精度是有限元模型的近似程度与计算机截断误差的综合结果，在作者所编制的程序中，计算机截断误差小于 $(\lambda/1000)$ ，所以图 4 即反映了有限元模型的近似程度。由于微分形式剪切波面是用微分近似代替差分，因此差分形式剪切波面的有限元模型具有更理想的近似结果。

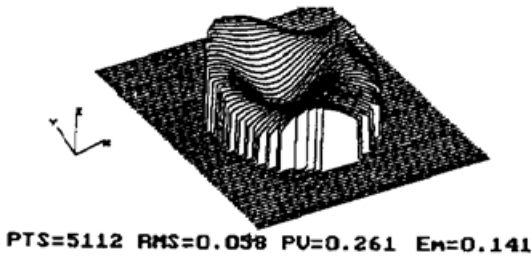


Fig. 1 An actual wavefront

在作者所编制的程序中，计算机截断误差小于 $(\lambda/1000)$ ，所以图 4 即反映了有限元模型的近似程度。由于微分形式剪切波面是用微分近似代替差分，因此差分形式剪切波面的有限元模型具有更理想的近似结果。

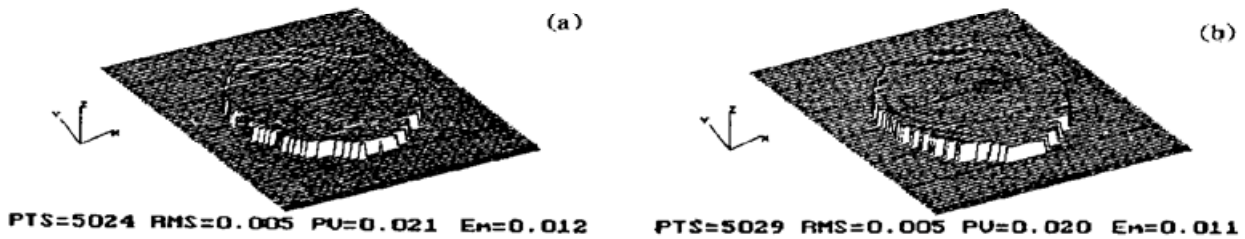


Fig. 2 Ideal shearing wavefront along two orthogonal directions

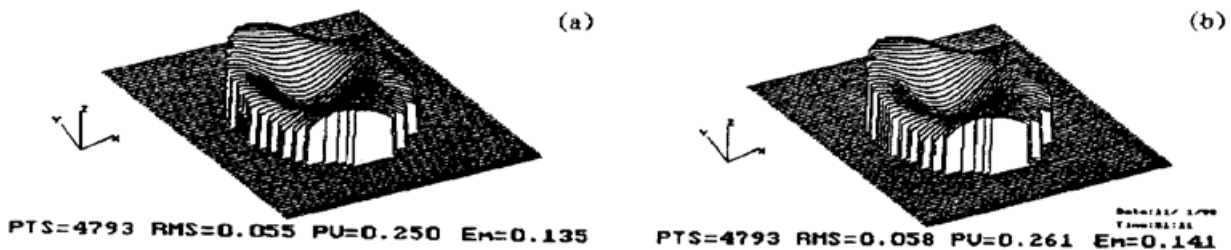


Fig. 3 The created Wavefont by the infinite element method. (a) by diffential model, (b) by difference model

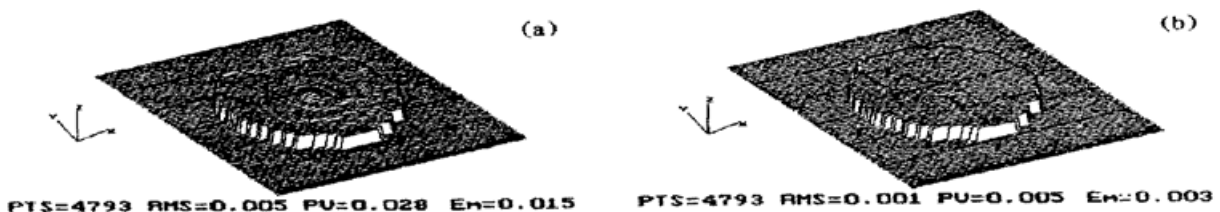


Fig. 4 The error of reconstruction by the infinite element method. (a) by diffential model, (b) by difference model

评价一种剪切波面算法的优劣, 关键在于该算法能否在带有较大噪声的剪切波面中提取出所要求解波面的信息。为此进一步以计算机模拟实验来考察误差传递情况, 并把有限元分析法与以往的多项式拟合法、离散傅里叶变换法进行比较。表 1 给出了在不同噪声情况下, 采用不同重建方法所得到的重建波面误差, 图 5 为对应于上表的反映误差传递情况的曲线图。从图中可知, 当剪切波面存在噪声误差 ($\lambda/100$) 时, 三种分析法所得到的重建波面误差其均方根值都小于 ($\lambda/100$)。但随着剪切波面噪声的增大, 多项式拟合法将无法得到正确结果, 例如, 当输入误差为 0.045λ , 重建误差已达 0.122λ , 离散傅里叶变换与有限元分析法则对测量误差不敏感, 且有限元法略胜一筹, 且重建波面误差的均方根值远远小于剪切波面噪声的均方根值, 非常有利于实际测量。

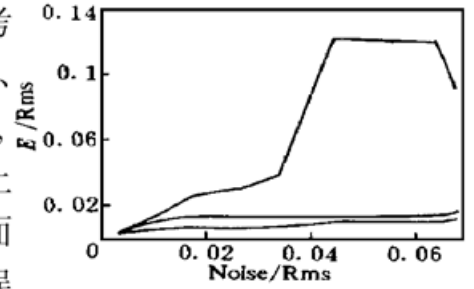


Table 1. Comparison of error propagation with different methods (Unit: λ)

SWNE (RMS)		0.003	0.011	0.017	0.028	0.034	0.045	0.065	0.068
WRE (RMS)	MFSM	0.003	0.015	0.025	0.031	0.038	0.122	0.120	0.092
	DFM	0.003	0.012	0.014	0.013	0.014	0.015	0.015	0.018
	IEM	0.003	0.006	0.007	0.007	0.008	0.011	0.011	0.013

* SWNE (Shearing wavefront noise error), WRE (Wavefront reconstruction error), MFSM (Multi-function simulation method), DFM (Discrete Fourier transform method), IEM (Infinite element method)

从运行效率上来说, 作者所编制的软件对三种不同分析法除多项式拟合法运行时间较长

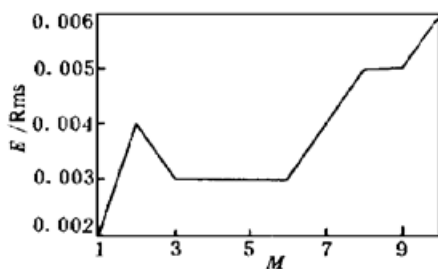


Fig. 6 Relationship between accuracy and the size of infinite element (数据点数为 128×128), 而有限元法的

运算时间将随着有限单元总数的减少而缩短, 所以有限元法的运算效率可以通过增大有限元单元长度来得到提高, 那么随之而来的问题便是: 随着有限元长度的增力, 有限元分析法的精度是否会受到影响呢? 图 6 给出了微分形式有限元分析的精度随有限单元大小的关系, 可见计算精度不会受到太大的影响, 这说明本文所给出的线性插值函数是合理的。

3.2 实测结果

本算法在 PS-1 型显微物镜像质评价仪中得到了应用, 该评价仪为一棱镜剪切干涉仪,

外, 另外两种算法在主频为 33 MHz, 带协处理器的 486 微机只需 15 秒就能完成

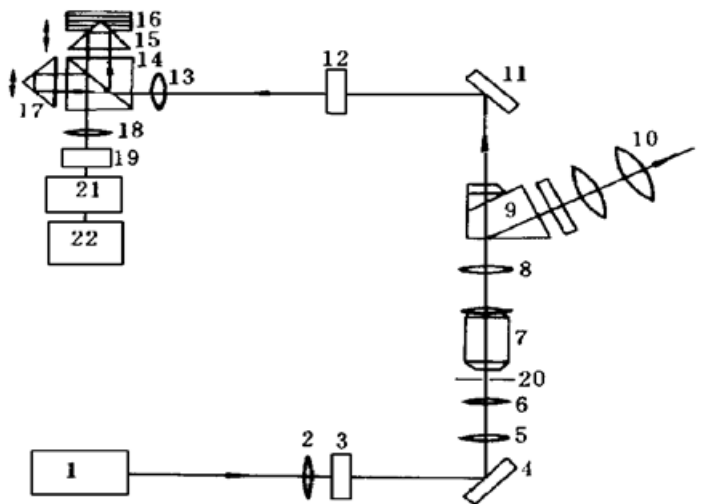


Fig. 7 Layout of model PS-1 objective aberration evaluation shearing interferometer. 1. He-Ne laser, 2. Expander, 3. Polarizer, 4. Reflector, 5. Convergent lens (1), 6. Convergent lens (2), 7. Tested objective, 8. Objective, 9. Binocular prism, 10. Binocular eye piece, 11. Polarizer, 12. Expander, 13. PSB, 14. Prism, 15. PZT, 16. Prism, 17. Lens, 18. TV camera, 19. Pinhole, 20. Image Interface, 21. Computer

其系统装置如图 7 所示，图中 7 为被检物镜，通过调整切变棱镜 17 可改变剪切量大小，使压电晶体 PZT 驱动棱镜 15 可实现条纹动态扫描，被检物镜绕轴逆时针精密旋转 90°可获得正交方向上的波差，因此该系统可实现正交两个方向剪切波面的数字实时采样，测量时调整剪切量大小使它以采样间隔为单位而变化。表 2 为对 10×物镜测得四组数据及每次重建结果，重复性以 PV 值评价达到 ($\lambda/100$)。

由于该像质评价仪在被检波面进入棱镜剪切干涉系统以前就含有系统误差，所以得到的重建结果必然也含有该误差。因此为验证本方法的正确性，选择了比对测量。对两个 10×的显微物镜 A 和 B，分别用本仪器及刀口评价仪进行测量，得到的结果如图 8 及 9 所示。从图 8 中所示，物镜 A 的波差 PV 值优于物镜 B，从图 9 中可知，物镜 A 点扩散函数的半宽度小于物镜 B，因此利用有限元算法后，本仪器对物镜的评价结果与传统的刀口检验的结果是一致的。

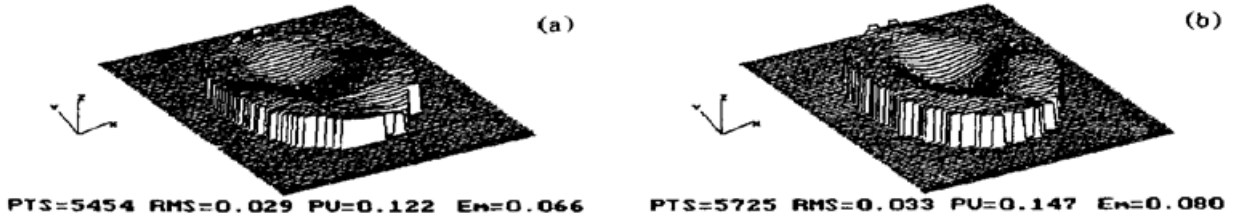


Fig. 8 Reconstruction result of real testing (a) objective A, (b) objective B

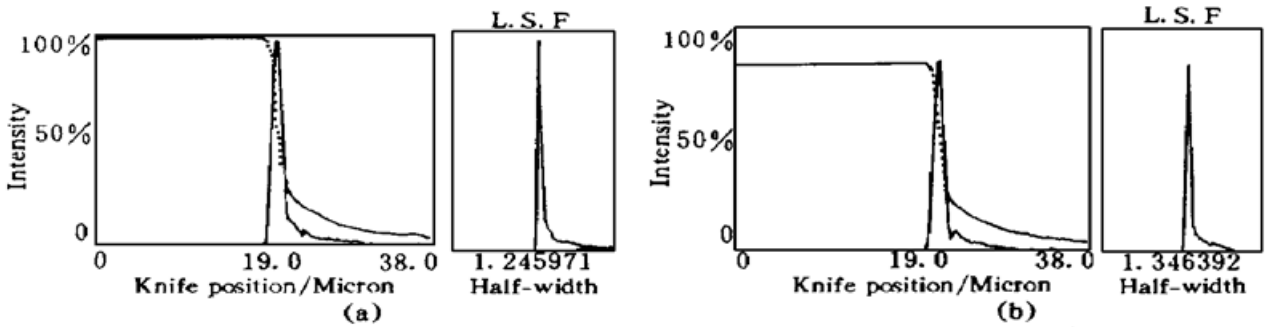


Fig. 9 Results of knife testing (a) objective A, (b) objective B

Table 2. Wavefront reconstruction from variable shear

No.	X shear	X relative shear	Y shear	Y relative shear	RMS	PV	Em
1	5	0.05	5	0.05	0.27	0.124	0.067
2	11	0.11	11	0.11	0.028	0.124	0.067
3	5	0.05	11	0.11	0.026	0.121	0.065
4	11	0.11	5	0.05	0.028	0.138	0.074

结 论 本文首次提出解析二维剪切波面的有限元方法，建立了相应的数学模型，并在微机上实现了该算法，又在实测数据中得到了验证，由于它对波面数据有平均作用，对测量误差 不敏感，因此该方法优于以往的多项式拟合法及离散富里叶变换法，可适用于实际测量。

参 考 文 献

- [1] M. P. Rimmer, J. C. Wyant, Evaluation of large aberrations using a lateral-shear interferometer having variable shear. *Appl. Opt.*, 1975, **14**(1) : 142~ 150
- [2] D. L. Fried, Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase difference measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3) : 370~ 375
- [3] R. H. Hudgin, Wave-front reconstruction for compensated imaging. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3) : 375~ 378
- [4] J. R. Noll, Phase estimates from slope-type wave-front sensors. *J. Opt. Soc. Am.*, 1978, **68**(1) : 139~ 140
- [5] B. R. Hunt, Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(3) : 393~ 399
- [6] J. Herrmann, Least-squares wave-front errors of minimum norm. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**(1) : 28~ 35
- [7] David J. Fischer, H. Philip Stahl, A vector formulation for ronchi shear surface fitting. *Interferometry: Techniques and Analysis, Proc. SPIE*, 1992, **1755**
- [8] K. Freischlad, C. L. Koliopoulos, Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1986, **3**(11) : 1852~ 1861
- [9] Klaus Freischlad, Wavefront integration from difference data. *Interferometry: Techniques, Analysis, Proc. SPIE*, 1992, **1755**
- [10] 白剑, 剪切波面重建新方法的研究及在波像差评价中的应用. 浙江大学博士学位论文, 1995 : 6

Infinite Element Model for the Reconstruction of Two-Dimensional Shearing Wavefront

Bai Jian Yang Guoguang

(State Key Laboratory of Modern Optical Instruments, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Received 28 October 1996; revised 9 July 1997)

Abstract Infinite element method for analysis of two-dimensional shearing wavefront is presented and the infinite element model for the wavefront reconstruction is established. The results of the computer simulation demonstrate the high accuracy of this method. Since the wavefront should satisfy all the 2-D shearing equations according to the finite element theory, the noise from the differences can be averaged. Thus the method is insensitive to measurement noise, suitable for real testing.

Key words shearing wavefront, infinite element, wavefront reconstruction.