第 18 卷 第 6 期 光 学 学 报 Vol. 18, No. 6
1998 年 6 月 ACTA OPTICA SINICA June, 1998

奇偶相干态的 Wehrl 熵和 Shannon 熵

闫珂柱 孔祥和 夏云杰
(曲阜师范大学物理系, 曲阜 273165)

摘 要 研究了奇、偶相干态的 Wehrl 熵和 Shannon 熵, 结果表明, 其 Wehrl 熵随总噪声的增加而增大, 并趋向同一个常数。Shannon 熵随力学量起伏的减小而减小, 且这两种态的 Shannon 熵均可小于相干态的 Shannon 熵, 但这时并不与压缩效应的出现相对应, 因而 Shannon 熵不能成为压缩存在的判据。

关键词 Wehrl 熵, Shannon 熵, 噪声。

1 引 言

目前, 量子信息光学引起人们的极大兴趣[1, 2], 这一新的学科分支是量子光学与信息科学相结合的产物, 它的一个重要应用是量子保密通讯, 这种通讯与经典保密通讯相比, 原则上可以做到无法破译、无法窃听。非经典光场的出现, 使量子通讯更加优越, 它可以极大地提高信噪比。因此, 量子信息光学的研究具有重要的理论意义和潜在的应用价值。信息熵是信息科学中的一个基本量, 这一概念首先是由 Shannon 和 Weaver 引入的[3], 作为量子或经典态信息量度的信息熵是由 Wehrl 建立的[4, 5]。最近, 用 Wehrl 熵检测薛定谔猫态的产生及量子态偏离相干态程度等问题已被研究[4, 5], 作者曾讨论了高斯型 Q 函数光场的 Wehrl 熵[6] 和高斯纯态的 Shannon 熵[7], 得到了熵与场噪声和压缩之间的显示关系, 这些结果均表明熵的研究对量子信息光学和光场量子统计性质都有重要意义。

在量子光学中两量子态的线性叠加可产生丰富的量子统计性质, 尤其是两个波包或两个相干态的叠加已成为目前的研究热点[8, 9]。奇偶相干态是两个典型的相干态叠加态, 虽然这个态均为非经典光场态, 但它们的量子统计性质是完全不同的, 偶相干态可呈现压缩效应, 没有亚泊松分布, 而奇相干态不存在压缩, 却总是亚泊松分布态[10, 11]。

本文讨论奇、偶相干态的 Wehrl 熵和 Shannon 熵, 结果表明, 奇偶相干态的 Wehrl 熵与相干态参数的幅角无关, 在总噪声较小时, 它随噪声的增加而增加, 当总噪声大到一定成度时, 两态的 Wehrl 熵趋向于一个不变的常数。奇偶相干态在坐标表象中的 Shannon 熵与坐标的起伏密切相关, 起伏越低, Shannon 熵越小, 特别是在一定条件下可比相干态的 Shannon 熵小很多, 但并不与压缩效应完全对应, 这一点与高斯纯态的 Shannon 熵不尽相同。

收稿日期: 1997-05-12

2　奇偶相干态的 Wehrl 熵

奇、偶相干态写成 Glaber 相干态 $|\alpha\rangle$ 叠加的形式为[11]

$$|\alpha\rangle_e = \frac{1}{2}\exp(|\alpha|^2/2)(\mathrm{ch}|\alpha|^2)^{-1/2}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \tag{1}$$

$$|\alpha\rangle_o = \frac{1}{2}\exp(|\alpha|^2/2)(\mathrm{sh}|a|^2)^{-1/2}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \tag{2}$$

它们在电场的两正交分量(或广义坐标和广义动量)

$$x = (a + a^+)/\sqrt{2}, \qquad p = (a - a^+)/\sqrt{2}\mathrm{i} \tag{3}$$

其起伏为

$$\begin{aligned}\Delta x_e^2 &= \langle(\Delta x)^2\rangle_e = \frac{1}{2} + R^2(\cos 2\varphi + \mathrm{th}\, R^2),\\ \Delta p_e^2 &= \langle(\Delta p)^2\rangle_e = \frac{1}{2} - R^2(\cos 2\varphi - \mathrm{th}\, R^2)\end{aligned} \tag{4}$$

和

$$\begin{aligned}\Delta x_o^2 &= \langle(\Delta x)^2\rangle_o = \frac{1}{2} + R^2(\cos 2\varphi + \mathrm{cth}\, R^2),\\ \Delta p_o^2 &= \langle(\Delta p)^2\rangle_o = \frac{1}{2} - R^2(\cos 2\varphi - \mathrm{cth}\, R^2)\end{aligned} \tag{5}$$

式中 $\alpha = R\exp(\mathrm{i}\varphi)$。因此它们的总噪声为

$$M_e = \Delta x_e^2 + \Delta p_e^2 = 1 + 2R^2\,\mathrm{th}\, R^2, \qquad M_o = \Delta x_o^2 + \Delta p_o^2 = 1 + 2R^2\,\mathrm{cth}\, R^2 \tag{6}$$

Wehrl 熵依据 Q 函数定义，其表达式为[4]

$$S = -\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} Q(z)\ln Q(z) \tag{7}$$

$$Q(z) = \langle z|\rho|z\rangle \tag{8}$$

式中 $Q(z)$ 为量子态的 Q 函数，ρ 为态的密度算子，对于相干态，$S = 1$，也是 Wehrl 熵的最小值[5]，依据两相干态的内积公式

$$\langle\alpha|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|z|^2 + \alpha^* z\right) \tag{9}$$

容易求出奇、偶相干态的 Q 函数为

$$\left.\begin{aligned}Q_e &= \frac{1}{2}\exp(-|z|^2)\frac{1}{\mathrm{ch}|\alpha|^2}\{\mathrm{ch}[2R(x\cos\varphi + y\sin\varphi)] + \cos[2R(x\sin\varphi - y\cos\varphi)]\}\\ Q_o &= \frac{1}{2}\exp(-|z|^2)\frac{1}{\mathrm{sh}|\alpha|^2}\{\mathrm{ch}[2R(x\cos\varphi + y\sin\varphi)] - \cos[2R(x\sin\varphi - y\cos\varphi)]\}\end{aligned}\right| \tag{10}$$

式中 $z = x + \mathrm{i}y$，作变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\varphi + \cos\varphi & \sin\varphi - \cos\varphi \\ -(\sin\varphi - \cos\varphi) & \sin\varphi + \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{11}$$

可把 Q_e、Q_o 改写成下面的形式

$$\left.\begin{aligned}Q_e(x', y') &= \frac{1}{2}\exp(-2|z|^2)\frac{1}{\mathrm{ch}\, R^2}\{\mathrm{ch}[R(x' + y')] + \cos[R(x' - y')]\}\\ Q_o(x', y') &= \frac{1}{2}\exp(-2|z|^2)\frac{1}{\mathrm{sh}\, R^2}\{\mathrm{ch}[R(x' + y')] - \cos[R(x' - y')]\}\end{aligned}\right| \tag{12}$$

其中 $z' = x' + iy'$。由于(11) 式的变换把无穷大 x-y 平面变成无穷大 x'-y' 平面，故

$$S_{e,o} = -\int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' Q_{o,e}(x', y') \ln Q_{o,e}(x', y') \tag{13}$$

即奇、偶相干态的 Wehrl 熵与相干态参数幅角 φ 无关。数字计算结果如图 1 和图 2 所示，图的横轴是态的总噪声。图中显示出，Wehrl 熵随总噪声的增大而增加。

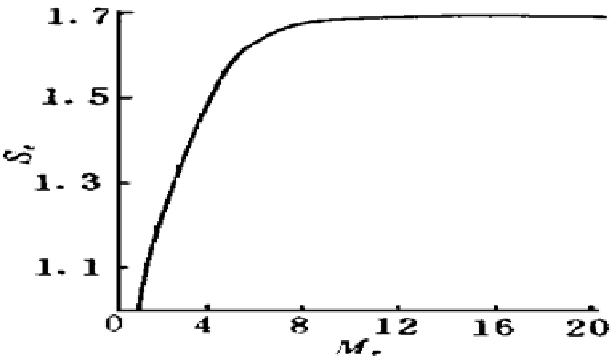

Fig. 1 Wehrl's entropy of even coherent state vers the total noise

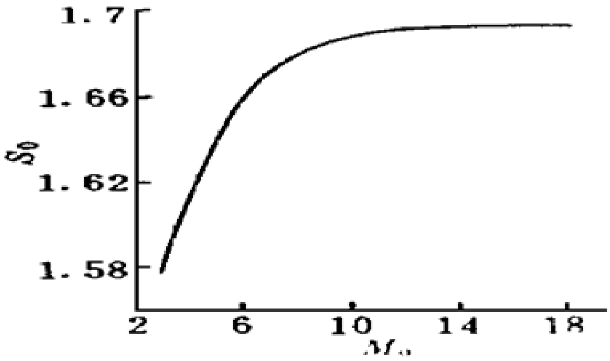

Fig. 2 Wehrl's entropy of odd coherent state vers the total noise

3 奇、偶相干态的 Shannon 熵

以坐标几率分布函数 $p(x)$ 定义的 Shannon 熵为

$$S_x = -\int \mathrm{d}x\, p(x) \ln p(x) \tag{14}$$

$$p(x) = \langle x|\rho|x\rangle \tag{15}$$

式中 $|x\rangle$ 为坐标的本征函数。依据相干态的坐标表象中波函数的表达式[12]

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - x_0)^2\right] \exp\left(-\frac{i}{2}p_0 x_0 + ip_0 x\right) \tag{16}$$

于是可求出偶、奇相干态的坐标几率分布函数

$$p_e(x) = \langle x|\alpha\rangle_{ee}\langle\alpha|x\rangle = \frac{\exp R^2}{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{ch}\, R^2} \exp(-x^2 - x_0^2)\left[\mathrm{ch}(2x_0x) + \cos(2p_0x)\right] \tag{17}$$

$$p_o(x) = \langle x|\alpha\rangle_{oo}\langle\alpha|x\rangle = \frac{\exp R^2}{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{sh}\, R^2} \exp(-x^2 - x_0^2)\left[\mathrm{ch}(2x_0x) - \cos(2p_0x)\right] \tag{18}$$

式中 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) = \sqrt{2}R\cos\varphi$, $p_0 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) = \sqrt{2}R\sin\varphi$, 它们是相干态中坐标和动量的期待值。

容易证明，相干态的 Shannon 熵为

$$S_x^{\mathrm{coh}} = \frac{1}{2}(1 + \ln\pi) \tag{19}$$

偶、奇相干态的 Shannon 熵可由下式求出

$$S_x^e = -\int \mathrm{d}x\, p_e(x) \ln p_e(x), \qquad S_x^o = -\int \mathrm{d}x\, p_o(x) \ln p_o(x) \tag{20}$$

其极值点应满足

$$\partial S_x^e/\partial\varphi = \partial S_x^o/\partial\varphi = 0 \tag{21}$$

容易证明，满足上式时有 $\varphi = \pi/2$。图 3 和图 4 是奇、偶相干态的 Shannon 熵与相干态 Shannon 熵之差随参数 φ的变化。它清楚地表明, 在 $\varphi=\pi/2$ 时, 两态的 Shannon 熵均取最小值, 由(4)、(5) 两式可知, $\varphi=\pi/2$ 对应于奇偶相干态的坐标起伏最小, 即起伏越小, Shannon 熵越小, 这与高斯纯态的 Shannon 熵是一致的, 但值得注意的是, 无论奇相干态和偶相干态, 它们的Shannon 熵均可小于相干态的Shannon 熵, 这一点与高斯纯态的Shannon 熵不同, 本文对高斯纯态的 Shannon 熵的研究表明, 高斯纯态的 Shannon 熵小于相干态的 Shannon 熵时, 正好对应压缩的出现, 但奇偶相干态没有这一结论, 这表明通过一个态的 Shannon 熵不能判定压缩效应是否存在, 但仍有 Shannon 熵随力学量起伏的减小而减小的结论, 这一点可由"方脉冲"波函数表示的态证明。

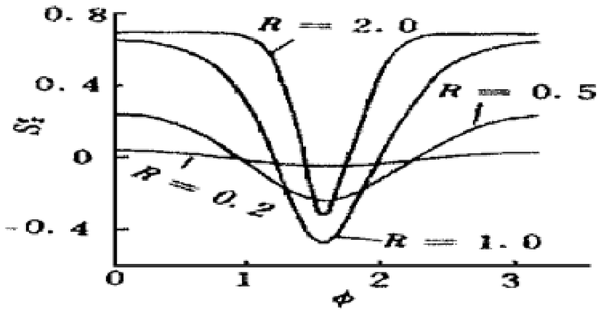

Fig.3 Shannon's entropy of even coherent state vers parameter φ

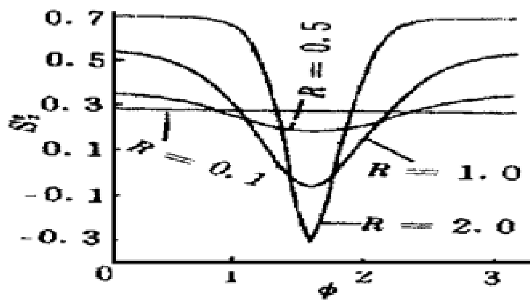

Fig.4 Shannon's entropy of odd coherent state vers parameter φ

"方脉冲"波函数通常表示为

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\exp(ipx),\qquad x\in[0,a] \tag{22}$$

这个态的坐标起伏为[13]

$$\Delta x^2=(x-\bar{x})^2=\frac{1}{12}a^2 \tag{23}$$

而 Shannon 熵

$$S=-\int dx|\Psi(x)|^2\ln|\Psi(x)|^2=\ln a \tag{24}$$

由(23) 式知, "方脉冲"波函数表示的态其压缩对应于

$$a<\sqrt{6} \tag{25}$$

虽然它与奇偶相干态类似, 也有起伏越小熵越小的结果, Shannon 熵仍不能判定压缩的出现与否。

结 论 通过对奇、偶相干态 Wehrl 熵和坐标表象下 Shannon 熵的研究, 表明这两种熵均与态的量子起伏密切有关, 尤其是 Shannon 熵, 它与 Wehrl 熵不同, 相干态并不对应最小 Shannon 熵, 但 Shannon 熵随力学量起伏的减小而减小, 这对于深入认识熵与量子系统的量子统计性质之间的关系是十分有益的。

参 考 文 献

[1] 郭光灿, 量子信息光学. 物理, 1996, **25**(6) : 336~ 342
[2] S. M. Barnett, A. K. Ekert, S. J. D. Phoemix, Introduction to special issue on quantum communica-

tion. *J. Mod. Opt.*, 1994, **41**(12): 2239~ 2240

[3] C. E. Shannon, W. Weaver, The Mathematical theory of communication. Urbana: The University of Illinois Press, 1963. 81~ 96

[4] J. A. Vaccaro, A. Orlowski, Phase properties of Kerr media via variance and entropy as of uncertainty. *Phys. Rev.* (*A*), 1995, **51**(5): 4172~ 4180

[5] A. Orlowski, Classical entropy of quantum states of light. *Phys. Rev.* (*A*), 1993, **48**(1): 727~ 731

[6] 夏云杰, 闫珂柱, 孔祥和等, 光场量子态的信息熵的保真度. 量子光学学报, 1996, **2**(1): 24~ 27

[7] 夏云杰, 孔祥和, 闫珂柱, 高斯纯态的高阶压缩和信息熵. 光电子·激光, 1996, **7**(4): 244~ 248

[8] D. F. Walls, G. J. Milburn, Effect of dissipation on quantum coherence. *Phys. Rev.* (*A*), 1985, **31**(4): 2405~ 2408

[9] 吴锦伟, 郭光灿, "薛定谔猫态"——宏观量子叠加态. 物理, 1995, **24**(5): 269~ 275

[10] Yunjie Xia, Guangcan Guo, Nonclassical properties of even and odd coherent states. *Phys. Lett.* (*A*), 1989, **136**(7): 281~ 283

[11] 夏云杰, 李洪珍, 郭光灿, 奇偶相干态的高阶压缩与准概率分布函数. 物理学报, 1991, **40**(3): 386 ~ 392

[12] B. L. Schumaker, Quantum mechanical pure states with gaussian wave function. *Phys. Rep.*, 1986, **135**(6): 342~ 343

[13] A. 梅西亚著, 苏汝铿, 汤家镛译, 量子力学, 北京: 科学出版社, 1986. 137

The Wehrl's Entropy and Shannon's Entropy for Even and Odd Coherent States

Yan Kezhu　　Kong Xianghe　　Xia Yunjie

(*Department of Physics, Qufu Normal University, Shangdong Qufu*, 273165)

(Received 12 May 1997)

Abstract　The Wehrl's entropties and Shannon's entropies for even and odd coherent states are studied. The results show that the Wehrl's entropics of the two states are increased along with growth of the total noise and tend to a common constant. The Shannon's entropies are decreased along with decrease of observable fluctuation. Both Shannon's entropies of the two states can be less than that of coherent state, but which is not corresponding to the appearance of squeezing effect. So, the amount of Shannon's entropy can not be a criteron of existance of squeezing.

Key words　Wehrl's entropy,　Shannon's entropy,　noise.