

依赖强度耦合多光子过程中的 缠绕与薛定谔猫态

周清平

(武陵大学机电系, 张家界 427000)

摘 要 通过研究依赖强度耦合多光子过程中的光场熵演化和光场 Q 函数, 揭示了光场与原子的缠绕特性, 讨论了原子跃迁过程中吸收或发射的光子数对缠绕特性和薛定谔猫态的影响。

关键词 依赖强度耦合多光子过程, 光场熵演化, 光场 Q 函数, 光场与原子的缠绕, 薛定谔猫态

1 引 言

研究光场与原子相互作用时的缠绕特性和薛定谔猫态是近年来量子光学领域的热点之一。其意义直接与无破坏量子信息测量相联系。Phoenix 和 Knight 已经证明^[1,2]: 在 Jaynes-Cummings 模型中, 光场与原子的相互作用既可以导致光场与原子强烈的缠绕, 也可以在原子反转回复时间的一半处引起光场与原子强烈的退缠绕。在退缠绕时, 光场呈现为两个宏观态的叠加——薛定谔猫态。在分析光场与原子的缠绕以及薛定谔猫态的形成时, 光场熵和光场 Q 函数是十分重要的概念。首先, 光场与原子的缠绕程度可以通过光场(原子)的熵来灵敏量度, 光场熵越高, 光场-原子的缠绕程度越大, 涉及光场的性质可以通过对原子的测量来推断; 其次, 通过光场熵和光场 Q 函数可以分析光场态在与原子相互作用时是否形成薛定谔猫态, 由于薛定谔猫态是由两宏观态叠加的纯态, 因此, 当光场态呈现薛定谔猫态时, 光场熵应取极小值, 这反映了薛定谔猫态的纯态性质; 同时光场 Q 函数在相空间也应呈现“双墩”结构, 这反映了薛定谔猫态为双态叠加的性质。目前, 众多学者在这一研究领域里做了大量工作。如单、多光子 J-C 模型^[1-4], 依赖强度耦合 J-C 模型^[5], 非线性 J-C 模型^[6]中光场和原子的熵演化及其缠绕特性等。然而, 对于依赖强度耦合多光子过程中光场与原子缠绕特性以及薛定谔猫态形成的研究则少见涉及, 文献[5]虽然研究了单光子依赖强度耦合 J-C 模型中的光场熵演化, 但未涉及发射或吸收光子数对光场与原子缠绕特性以及薛定谔猫态形成的影响。而依赖强度耦合多光子过程反映了原子与光场的多光子相互作用对光场强度的依赖关系, 在量子光学中具有重要的理论和实验意义^[7-10]。本文通过研究光场与原子依赖强度耦合多光子过程中的光场熵演化和光场 Q 函数, 揭示该过程中光场与原子的缠绕特性, 并讨论吸收或发射光子数对缠绕特性和薛定谔猫态产生的影响, 是有学术意义的。

2 模型及光场约化密度矩阵

设单个二能级原子与单模光场作多光子相互作用, 旋波近似下量子系统的哈密顿算符为

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_0 S_z + g \left[S_+ a^k \sqrt{a^\dagger} a + \sqrt{a^\dagger} a a^\dagger k S_- \right] \quad (1)$$

式中, ω 为光场频率, ω_0 为原子跃迁频率; a^\dagger 、 a 分别为光场产生、湮灭算符; S_z 、 S_\pm 分别为原子反转、跃迁算符; g 为光场与原子的耦合系数; k 为原子跃迁过程中吸收(或发射)的光子数。为简便起见, 令光场与原子处于共振态($\omega = k\omega_0$), 则(1)式可分解为:

$$H = H_0 + H_I \quad (2)$$

$$\text{其中 } H_0 = \omega(kS_z + a^\dagger a), \quad H_I = g \left[S_+ a^k \sqrt{a^\dagger} a + \sqrt{a^\dagger} a a^\dagger k S_- \right] \quad (3)$$

设原子初始处于基态 $|-\rangle$, 光场处于相干态:

$$|\alpha_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle, \quad f_n = \exp\left[-\frac{\bar{n}}{2}\right] \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} \exp(i n \beta) \quad (4)$$

式中 \bar{n} 为相干光场初始态平均光子数, β 为其位相角, 且 $\beta \in [0, 2\pi]$, $|n\rangle$ 为光子数本征态, f_n 为光场光子数统计分布函数。若初始时刻光场与原子处于退耦态, 则系统的初始态矢为:

$$|\Psi_{f-a}(0)\rangle = |\Psi_f(0)\rangle \otimes |\Psi_a(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n, -\rangle \quad (5)$$

在相互作用绘景中, 薛定谔方程为:

$$i \frac{d}{dt} |\Psi_{f-a}(t)\rangle = H_I |\Psi_{f-a}(t)\rangle \quad (6)$$

利用初始态矢和共振条件, 解薛定谔方程, 得到系统在任意时刻的态矢为:

$$|\Psi_{f-a}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \{ |C\rangle |-\rangle + |D\rangle |+\rangle \} \quad (7)$$

式中, $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 分别表示原子的激发态和基态, 且

$$|C\rangle = \exp[-|\alpha_0|^2/2] \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \sin\left[\sqrt{\frac{n n!}{(n-k)!}} g t\right] |n-k\rangle \quad (8)$$

$$|D\rangle = \exp[-|\alpha_0|^2/2] \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \cos\left[\sqrt{\frac{n n!}{(n-k)!}} g t\right] |n\rangle \quad (9)$$

由(7)式可得到光场在任意时刻的约化密度矩阵为:

$$\rho_f(t) = \text{Tr}_{\text{atom}} \{ |\Psi_{f-a}(t)\rangle \langle \Psi_{f-a}(t)| \} = |C\rangle \langle C| + |D\rangle \langle D| \quad (10)$$

式中, Tr_{atom} 表示对原子系统变量求迹, 利用(10)式确定的场约化密度矩阵, 对光场熵动力学和光场 Q 函数进行研究, 并讨论光场与原子相互作用的缠绕特性以及薛定谔猫态的形成。

3 光场熵与 Q 函数

熵是量子力学态纯度和原子-光场缠绕程度灵敏的量度^[1-6], 而光场 Q 函数则能直观地展示光场与原子的缠绕特性以及薛定谔猫态的形成情况。量子力学系统的熵可定义如下:

$$S = - \text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (11)$$

这里, 假定玻尔兹曼常数 $K = 1$, ρ 为给定的光场-原子全系统密度统计算符, 在光场-原子相互作用系统中, 光场与原子子系统的熵可通过各自相应的约化密度统计算符来定义。

$$S_{f(a)} = - \text{Tr}_{f(a)} [\rho_{f(a)} \ln(\rho_{f(a)})] \quad (12)$$

式中光场(或原子)约化密度统计算符为:

$$\rho_{f(a)} = \text{Tr}_{a(f)} \rho \quad (13)$$

如果光场(原子)子系统处于纯态,那么该子系统的熵 $S_{f(a)}(t) = 0$;若光场(原子)的熵 $S_{f(a)} > 0$,则光场(原子)子系统处于统计混合态。根据 Phoenix 与 Knight 等人的工作,可以依据(10)式光场约化密度矩阵所确定的本征值 $\pi_f^\pm(t)$ 表示依赖强度耦合多光子过程中的光场熵^[1]:

$$S_f(t) = - \{ \pi_f^+(t) \ln [\pi_f^+(t)] + \pi_f^-(t) \ln [\pi_f^-(t)] \} \quad (14)$$

$$\text{其中 } \pi_f^\pm(t) = \frac{1}{2} (\langle C|C\rangle + \langle D|D\rangle) \pm \frac{1}{2} [(\langle C|C\rangle - \langle D|D\rangle)^2 + 4 | \langle C|D\rangle |^2]^{1/2} \quad (15)$$

$$\langle C|C\rangle = \exp(-|\alpha_0|^2) \sum_n \frac{(|\alpha_0|^2)^n}{n!} \sin^2 \left[\sqrt{\frac{nn!}{(n-k)!}} gt \right] \quad (16)$$

$$\langle D|D\rangle = \exp(-|\alpha_0|^2) \sum_n \frac{(|\alpha_0|^2)^n}{n!} \cos^2 \left[\sqrt{\frac{nn!}{(n-k)!}} gt \right] \quad (17)$$

$$\langle C|D\rangle = \exp(-|\alpha_0|^2) \sum_n \frac{(|\alpha_0|^2)^{n+k/2}}{\sqrt{(n+k)!n!}} \times \sin \left[\sqrt{\frac{(n+k)(n+k)!}{n!}} gt \right] \cos \left[\sqrt{\frac{nn!}{(n-k)!}} gt \right] (\cos k\beta - i \sin k\beta) \quad (18)$$

(14) 式确定的光场熵 $S_f(t)$ 可以量度光场与原子相互作用时的缠绕程度。从中可以看出,光场熵演化不但决定于光场光子数统计分布 f_n ,而且还决定于原子跃迁过程中吸收或发射的光子数 k ;由于设定光场、原子初始时刻处于纯态,光场-原子全系统的熵 S 为 0,根据熵的 Araki-Lieb 不等式^[1]:

$$|S_a(t) - S_f(t)| \leq S \leq S_a(t) + S_f(t) \quad (19)$$

则在任何时刻有 $S_a(t) = S_f(t)$,即光场与原子的熵相等。

由于光场 Q 函数是光场约化密度矩阵在相干态表象中的对角元,同样用(10)式可求出

$$Q(\alpha, t) = [\langle \alpha | \rho_f(t) | \alpha \rangle] / \pi = [| \langle C | \alpha \rangle |^2 + | \langle D | \alpha \rangle |^2] / \pi \quad (20)$$

$$\text{式中 } \langle C | \alpha \rangle = \exp \left[-\frac{|\alpha_0|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} \right] \sum_n \frac{(\alpha_0)^{n+k} (\alpha^*)^n}{\sqrt{(n+k)!n!}} \sin \left[\sqrt{\frac{(n+k)(n+k)!}{n!}} gt \right] \quad (21)$$

$$\langle D | \alpha \rangle = \exp \left[-\frac{|\alpha_0|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} \right] \sum_n \frac{(\alpha_0 \alpha^*)^n}{n!} \cos \left[\sqrt{\frac{nn!}{(n-k)!}} gt \right] \quad (22)$$

以上两式中设 $\alpha = X + iY$,可以在 α 的复平面上解得 Q 函数的等值分布,可以看出,光场 Q 函数不但与光场的统计分布有关,而且也决定于原子跃迁过程中吸收或发射的光子数。

4 数值分析

包含在(14)、(20)式中的级数很难精确求和,借助于数值计算和作图,可直观地展示依赖强度耦合多光子过程中光场熵演化和光场 Q 函数,揭示光场与原子的缠绕特性以及薛定谔猫态的形成。图 1 显示了在平均光子数 $\bar{n} = 30$ 、光场位相 $\beta = 0$,原子在跃迁过程中吸收(或发射)的光子数 k 不同的光场熵演化规律,而图 2 则展示了在与图 1 具有相同初始条件下,不同 k 值和不同时刻 t 时光场 Q 函数的等值线图。

在图 1(a)中: $k = 1$,相应于依赖强度耦合单光子过程中光场熵演化规律,从图中可以看出光场熵周期性地演化,其周期为 $T = \pi/g$,在 $t = n\pi/g (n = 0, 1, 2, \dots)$ 时光场熵演化到最小 $S_f(n\pi/g) = 0$,说明了光场与原子处于退缠绕状态,光场态返回初始纯态;而在 $t = n\pi/(2g)$ 与

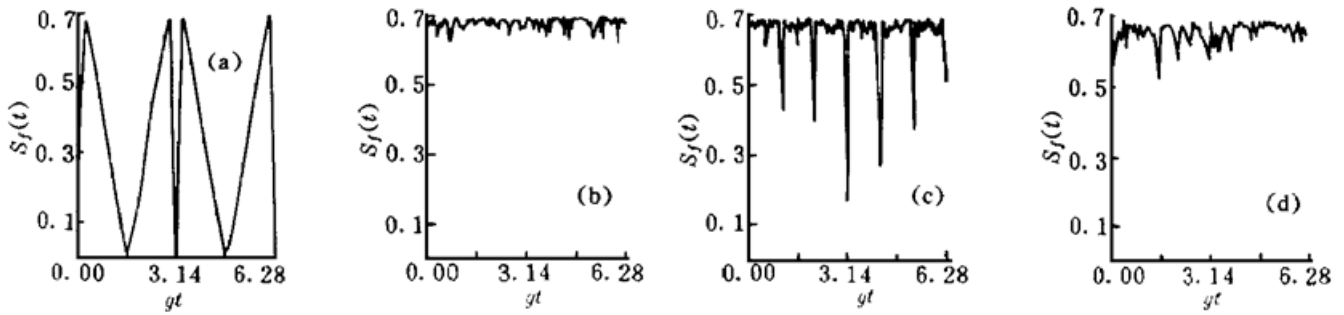


Fig. 1 The evolution of the field entropy in the intensity-dependent coupling multiphoton processes. $\bar{n} = 30$, $\beta = 0$.

(a) $k = 1$; (b) $k = 2$; (c) $k = 3$; (d) $k = 4$.

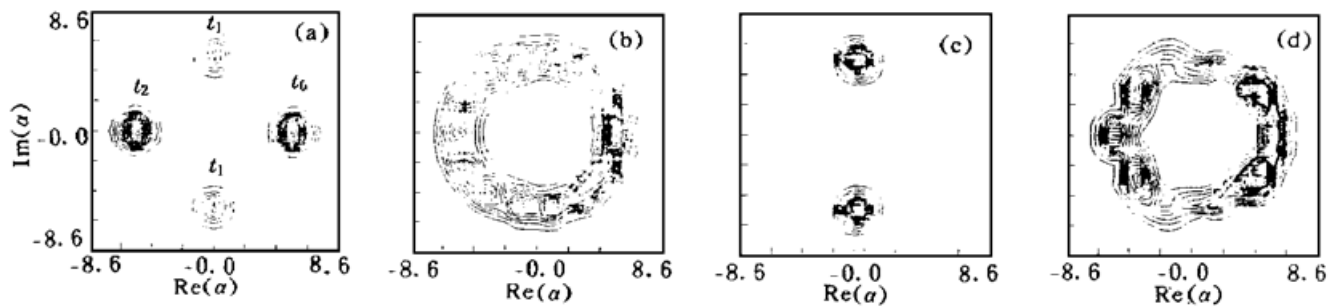


Fig. 2 Contour plots of the Q function of the field in phase space. $\bar{n} = 30$, $\beta = 0$.

(a) $k = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = \pi/2g$, $t_2 = \pi/g$; (b) $k = 2$, $t = \pi/g$; (c) $k = 3$, $t = \pi/g$; (d) $k = 4$, $t = \pi/g$.

$t = n\pi/g$ 之间, 光场熵有极大值, 这时光场与原子处于强烈的缠绕状态, 这种情形, 适合于通过测量原子的性质来推断光场的性质, 这与文献[5] 的结论相符。但值得注意的是: 在 $t = (2n + 1)\pi/2g$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) 时, 场熵几乎演化到零(但并不等于零), 此时计算了光场 Q 函数, 如图 2(a) 中 $t = \pi/2g$ 时的等值线图所示, 光场 Q 函数呈现振幅相同、位相相反的“双墩”结构, 结合此时的光场熵 $S_f(\pi/2g) = 0.015$ 具有极小值这一事实, 可以得出结论: 光场态是由两宏观态叠加而形成的薛定谔猫态。

图 1(b) 揭示了 $k = 2$ 时的依赖强度耦合双光子过程中的光场熵演化规律: 它显示在整个时间进程中, 光场熵几乎保持极大值; 而图 2(b) 则展示出 $k = 2$ 、 $t = \pi/g$ 时刻的光场 Q 函数等值线, 可看出, 光场 Q 函数在相空间呈“弥散”分布。这说明: 依赖强度耦合双光子过程中光场与原子始终强烈地缠绕, 光场态处于统计混合态, 因而不可能形成薛定谔猫态, 这种情况适合于由测量原子的性质来推断光场的性质。

图 1(c) 是依赖强度耦合三光子过程中光场熵演化规律, 从图中可知: 光场熵演化也呈现一定的规律性, 但不能演化到零, 这意味着光场与原子不能完全退缠绕, 同时作者也特别注意到: 在 $t = \pi/g$ 时刻光场熵具有一明显的极小值 [$S_f(\pi/g) = 0.161$], 在该瞬间光场与原子缠绕程度极小; 在图 2(c) 中给出了此时的光场 Q 函数分布, 不难发现, 这种分布也呈“双墩”结构, 结合此时熵值取极小值的事实, 可以得出结论: 在该情形下的光场态是一个近似的薛定谔猫态。

图 1(d) 中展示的是 $k = 4$ 时的依赖强度耦合四光子过程中的光场熵演化, 将其与图 1(b) ($k = 2$) 的情况进行比较可知: 四光子过程与双光子过程中光场熵的演化具有相似之处, 即光场熵在时间演化进程中几乎总是保持极大, 同时, 还画出了在图 2(d) 中 $t = \pi/g$ 时刻光场

Q 函数在相空间分布的等值线图, 显然也呈弥散分布。这说明了在四光子过程中光场与原子总是处于统计混合态, 并持续地、强烈地缠绕, 在这种情形下, 不可能产生薛定谔猫态。

结 论 通过研究依赖强度耦合多光子过程中光场熵演化和光场 Q 函数在相空间的分布, 揭示了光场与原子的缠绕特性及其对薛定谔猫态形成的影响, 其结论如下:

1) 光场熵演化的周期性和光场与原子的缠绕特性均与原子跃迁时吸收(或发射)的光子数 k 密切相关; 当 k 为奇数(如 $k = 1, 3$) 时, 光场熵演化具有一定的周期性, 光场与原子周期性地缠绕和退缠绕; 而当 k 取偶数(如 $k = 2, 4$) 时, 场熵演化无明显的周期性, 光场熵在时间演化进程中几乎总是保持极大值, 光场原子将持续地、强烈地缠绕。

2) 在单、三光子过程中, 由于光场与原子的相互作用, 光场态可以形成薛定谔猫态, 而在双、四光子过程, 不可能出现薛定谔猫态。

参 考 文 献

- [1] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Ann. Phys. (N.Y)*, 1998, **186**(2) ·381~ 407
- [2] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight. Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(8) ·6023~ 6029
- [3] 方卯发, 周 鹏. 多光子 Jaynes-Cummings 模型场熵的演化, 光学学报, 1993, **13**(9) ·799~ 804
- [4] 方卯发. 非旋波近似下 Jaynes-Cummings 模型中的场熵演化, 物理学报, 1994, **43**(11) ·1776~ 1786
- [5] 方卯发. 依赖强度耦合 J-C 模型的场熵演化, 光学学报, 1995, **15**(3) ·296~ 300
- [6] 方卯发, 周 鹏. 附加克尔介质双光子 Jaynes-Cummings 模型的场熵特性, 物理学报, 1994, **43**(4) ·570 ~ 576
- [7] B. Buck, C. V. Sukumar. Exactly Soluble model of atom-photon coupling showing periodic decay and revival. *Phys. Lett. (A)*, 1981, **81**(2~ 3) ·132~ 135
- [8] V. Boizek. Light squeezing in the Jaynes-Cummings with an intensity-dependent coupling. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(9) ·1151~ 1162
- [9] P. Zhou, Z. L. Hu, J. S. Peng. Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Cummings models. *J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(1) ·49~ 62
- [10] 方卯发, 王麓雅. 依赖强度耦合多光子 Jaynes-Cummings 模型中场的位相特性, 量子电子学报, 1993, **10**(3) ·255~ 260

Entanglement and Schr dinger Cat State in the Intensity-Dependent Coupling Multiphoton Processes

Zhou Qingping

(Department of Machine and Electronics, Wuling University, Zhang Jiajie, Hunan 427000)

(Received 11 January 1997; revised 23 July 1997)

Abstract The entanglement properties between the field and the atom are revealed and the influences of the absorbing or emitting photon number per atomic transition on the entanglement properties and formation of the Schr dinger cat state in the intensity-dependent coupling multiphoton processes are discussed by studying the evolution of the field entropy and the field Q function.

Key words intensity-dependent coupling multiphoton processes, evolution of the field entropy, field Q function, entanglement between the field and the atom, Schr dinger cat state.