

微玻璃球回归反光条件的理论分析

王柏庐

(西南师范大学物理系, 重庆 400715)

摘 要 对回归反光膜中微玻璃球的反光机制进行了研究, 建立了微玻璃球对平行光束的回归散射模型并进行了理论计算, 确定了微玻璃球回归反光的最佳条件。

关键词 微玻璃球, 散射模型, 回归反射系数。

1 引 言

所谓“回归反光”, 就是由光源照射到回归反光膜上的大部份光能, 将集中在一个狭小的光锥之内返回光源。这是不同于光的镜面反射和漫反射的一种反光现象。

作者用金相显微镜观察了回归反光膜的微结构, 注意到在回归反光膜的表面层之下是玻璃珠层, 密布着一层微细的玻璃珠(粒径约 70~ 100 μm), 这种微细的玻璃珠对于使光束回归反射起了关键作用。

鉴于回归反光原理有重要的研究价值和广泛的应用前景^[1-3], 本文作者采取了一种新的散射模型, 对这种微玻璃球的回归反光机制作了理论计算和分析, 从而确定了微玻璃珠回归反光的最佳条件。

2 光线在球形水珠中的传播特征

图 1 是几条光线在水珠中传播的光路图, 研究图中光线的传播特征。通过球心的直线为光轴线, 光线 1→1'沿光轴线正向射入水珠, 在水珠的右表面反射, 沿光轴线的逆向返回。对于标号 2~ 8 的各条光线, 在水珠的左表面将发生折射, 按照折射定律改变传播方向。从图中可以看出, 射入水珠的光线从 1 到 6 与光轴线的距离 h (瞄准距离) 愈大时, 射出水珠的光线从 1'到 6'与光轴线反向的夹角就愈大, 这一过程在到达距光轴线某一距离 (h_0) 就会终止, 当瞄准距离 $h > h_0$, 射出的光线与光轴线反向的夹角反而减小。把一条光线射出水珠与射入水珠方向之间的夹角称为这条光线的偏转角, 把光线射出水珠的方向与光轴线反向之间的夹角称为射出光线光锥的张角。显然, 同一条光线的偏转角与张角互为补角。图 1 中光线 6'称为笛卡尔线, 射出水珠的各条光线中, 笛卡尔线的偏转角最小而张角最大。设某一条光线的入射角为 θ , 折射角为 φ , 则由图 1 可以看出, 该光线的偏转角 D_1 为:

$$D_1 = 2(\theta - \varphi) + (\pi - 2\varphi) = \pi + 2(\theta - 2\varphi) \quad (1)$$

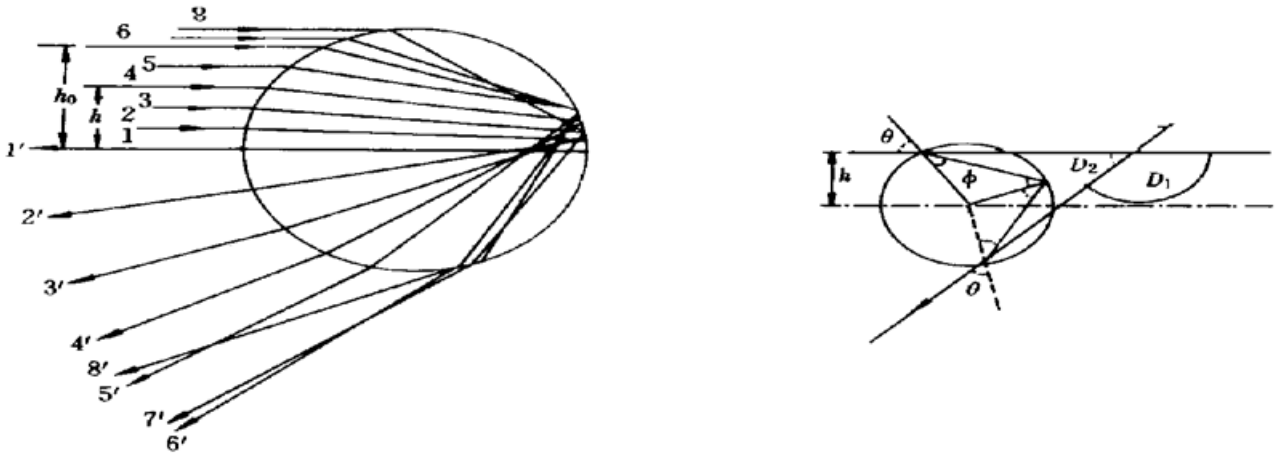


Fig. 1 The paths of rays in a spherical drop of water

(1) 式表示在水珠中作一次内反射后出射光线的偏转角，实际上光线在球体内会作多次内反射，然而随着内反射次数的增加，其强度迅速衰减^[4]，因此这里只讨论了一次内反射光线的传播特征。作者在前人工作的基础上，进一步注意到如下三个问题：

1) 一组平行光线组合成的光束进入水珠，通过折射→反射→折射的过程之后，会形成锥形光束；对水珠，这个锥形光束的张角(或称角半径)约为 42°。

2) 可以设想，若用折射率不同的其它材料制成的透明球体代替水珠，那么各条光线的传播方向将如何变化？各条光线出射后是否仍然能够形成一个光锥？如果形成光锥，那么光锥的张角将如何变化？

3) 进入透明球体的平行光光束与由透明球体射回的光锥的光束所包含的光能有何关系？利用透明球体的光散射模型，作者成功地回答了以上几个问题。

3 透明球体的光散射研究

3.1 求笛卡尔线的张角与水珠折射率的关系

设透明球体的折射率为 n ，半径 $R = 1$ ；一条入射光线的瞄准距离为 h ，入射角为 θ ，折射角为 φ ，则有

$$\begin{aligned} \sin \theta &= h, & \theta &= \sin^{-1} h, & \sin \theta / \sin \varphi &= n \\ \sin \varphi &= \sin \theta / n = h/n, & \varphi &= \sin^{-1}(h/n) \end{aligned} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得到这条光线的偏转角为

$$D_1 = \pi + 2[\sin^{-1} h - 2 \sin^{-1}(h/n)] \tag{3}$$

这条光线相对于光轴 $1' \rightarrow 1$ 张角为

$$D_2 = \pi - D_1 = 2[2 \sin^{-1}(h/n) - \sin^{-1} h] \tag{4}$$

显然，在折射率 n 一定的情况下， D_2 随 h 的变化而变化，求 D_2 的极值，得

$$\partial D_2 / \partial h = 2[1/(1 - h^2)^{1/2} - 2/(n^2 - h^2)^{1/2}] = 0 \tag{5}$$

解(5)式知，当 $h = [(4 - n^2)/3]^{1/2}$ 时， D_2 取得极值，这时瞄准距离为 h_0 。令 $n = 1.336$ ，这是 0℃ 的水对绿光的折射率，求得 $h_0 = 0.8593$ ，将此值代入(4)式，得 $D_2 = 41.64^\circ$ ，正好是人们观察彩虹时，所见彩虹圆弧的角半径。

3.2 笛卡尔线的张角与透明球体材料折射率的相互关系

由以上的讨论可知, 当 n 一定时, 笛卡尔线的张角就确定了。那么, 当 n 变化时, 笛卡尔线的张角就会相应地变化。根据(4)、(5)、(2)三式, 对折射率为 1.33、1.50、1.75、1.80、1.85、1.90、2.00 的 7 种材料, 分别求出各条光线的入射角 θ 、瞄准距离 h 与张角 D_2 的函数关系, 如表 1 和图 2 所示。

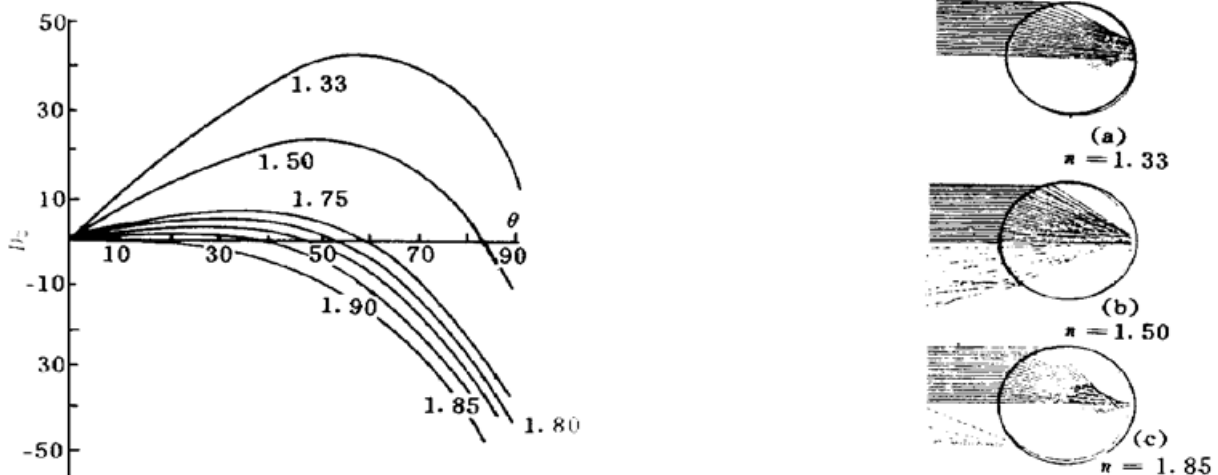


Fig. 2 The angles of dispersion D_2 in different angle of incidence θ for glass beads of a refractive index of $n = 1.33 \sim 2$

Table 1. The angles of dispersion D_2 ($^\circ$) in different angle of incidence θ ($^\circ$) and the impact parameter h for glass beads of a refractive index of $n = 1.33 \sim 2.00$

n	h	θ	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
			D_2	0	0.087	0.174	0.259	0.342	0.423	0.5	0.574	0.643
1.33	0		5.03	10.03	14.90	19.61	24.13	28.33	32.21	35.61	38.47	
1.50	0		3.33	6.60	9.75	12.72	15.47	17.89	19.94	21.50	22.50	
1.75	0		1.42	2.78	4.02	5.08	5.90	6.42	6.53	6.20	5.33	
1.80	0		1.10	2.15	3.07	3.81	4.32	4.51	4.32	3.69	2.53	
1.85	0		0.80	1.55	2.17	2.62	2.82	2.72	2.24	1.32	-0.11	
1.90	0		0.52	0.98	1.32	1.48	1.41	1.03	0.28	-0.91	-2.60	
2.00	0		-0.01	-0.08	-0.26	-0.61	-1.21	-2.09	-3.35	-5.02	-7.18	
n	h	θ	50	55	60	65	70	75	80	85	90	
			D_2	0.766	0.819	0.866	0.906	0.940	0.966	0.985	0.966	1
1.33			40.67	42.07	42.51	41.83	39.79	36.28	31.00	24.22	15.01	
1.50			22.84	22.40	21.06	18.71	15.12	10.33	4.06	-3.31	-12.76	
1.75			3.84	1.65	-1.35	-5.20	-10.15	-16.02	-23.11	-30.99	-40.60	
1.80			0.70	-1.71	-4.96	-9.03	-14.18	-20.21	-27.42	-35.36	-45.00	
1.85			-2.15	-4.86	-8.35	-12.63	-17.95	-24.12	-31.45	-39.45	-49.12	
1.90			-4.89	-7.83	-11.53	-16.00	-21.49	-27.80	-35.22	-43.29	-52.97	
2.00			-9.91	-13.28	-17.36	-22.17	-27.97	-34.51	-42.11	-50.28	-60.00	

从表 1 的数据和图 2 可以看出, 对于水 ($n \approx 1.33$) 随着入射光线瞄准距离 h 和入射角 θ 的增加, 射出光线的张角将逐步地增加。当入射角 θ 约为 60° , 瞄准距离 h 约为 0.866 时, 张角将增加到大约 42° 的最大值; 然而, 随着入射光线瞄准距离 h 和入射角 θ 的继续增加, 张角将反而减小。这进一步说明了, 一组平行光束进入水珠, 通过折射 \rightarrow 反射 \rightarrow 折射的过程之后, 会形成张角约为 42° 的逆向传播的锥形光束。由于张角比较大, 光束发散得很利害。

用折射率为 $n = 1.50$ 的玻璃球取代水珠，其散射光的逆向传播特征与水珠基本相同，但是锥形光束的张角减小为 23° 左右，光束发散得仍然利害。

若用一种折射率为 $n = 2.00$ 的玻璃材料制成透明球体，用平行光照射它，发现通过折射 \rightarrow 反射 \rightarrow 折射的过程之后，入射的近轴光线会形成张角比较小的逆向传播的锥形光束。然而，入射角大于 35° 的远轴光线通过折射 \rightarrow 反射 \rightarrow 折射的过程之后偏折角将超过 180° ，远偏离光轴；因此用折射率为 $n = 2.00$ 的玻璃球体并不能最好地实现光束的回归反射。

由图 2 可以看出，若玻璃球体的折射率在 $n = 1.8 \sim 1.9$ 之间，则在入射角从 0° 到 50° 的相当大的范围内，经过玻璃球体偏折后的光线，将大致沿光轴的逆向返回，其方向的偏差大约在 5° 以内。因而，用 $n = 1.8 \sim 1.9$ 的玻璃球体，能够更好地让光束逆向返回。

4 平行光束被玻璃球体散射的物理模型、计算方法及回归反射光的能量分布特征

4.1 物理模型

1) 考虑平行光束射到一个宏观尺度的玻璃微球上，于是可以用几何光学的方法确定光束中的每一条光线的传播方向而忽略光的波动性^[5]；

2) 要计及光束进入与射出玻璃球的两次折射过程中的能量损耗(设透明球体右表面顶部镀有全反射膜，参见图 4)，出射光束的强度减少可以用光的电磁理论来计算；

3) 计算玻璃球的散射截面时借用原子物理与原子核物理中研究散射问题时的基本方法；

4.2 计算方法

4.2.1 折射光与入射光强度比值的计算

在表 1 和图 2 中，已经对于 7 种折射率不同的玻璃球，确定了平行光束中的每一条光线的传播方向。现在用光的电磁理论计算电磁波在介质的界面上折射时，入射光的能量损耗。采用菲涅耳(Fresnel)公式，要注意电矢量 E 垂直入射面与电矢量 E 平行入射面的两种偏振光，入射光与折射光强度的比值有不同的计算公式。自然光入射到玻璃表面后，反射光的强度 I_1 与入射光的强度 I_0 的比值为^[6]

$$I_1/I_0 = (1/2)[\sin^2(\theta - \varphi)/\sin^2(\theta + \varphi)] + (1/2)[\tan^2(\theta - \varphi)/\tan^2(\theta + \varphi)] \quad (6)$$

折射光与入射光强度的比值 I_2/I_0 为：

$$I_2/I_0 = (I_0 - I_1)/I_0 = (1/2)[1 - \sin^2(\theta - \varphi)/\sin^2(\theta + \varphi)] + (1/2)[1 - \tan^2(\theta - \varphi)/\tan^2(\theta + \varphi)] \quad (7)$$

当光垂直入射时

$$I_2/I_0 = 1 - (n - 1)^2/(n + 1)^2 \quad (8)$$

根据(7)、(8)两式，可以求出对于不同折射率的各种材料的入射光与折射光强度的比值。将折射率为 1.85 的玻璃材料的计算结果列于表 2 中，并在图 3 中描绘出来；图 3 还描绘了 E 垂直入射面与 E 平行入射面的两种偏振光的入射光与折射光强度的比值。

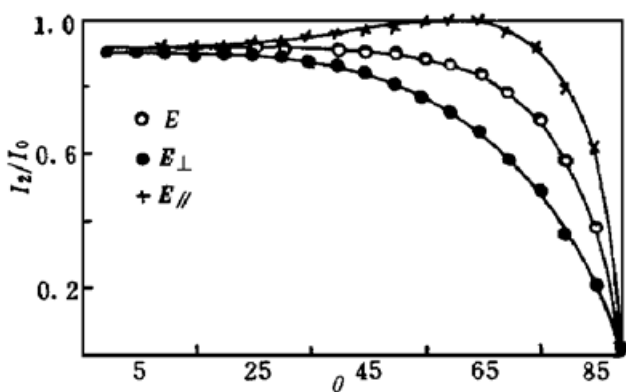


Fig. 3 The ratio of intensity (I_2/I_0) of incident and refraction rays for electric vector parallel (E_{\parallel}) and perpendicular (E_{\perp}) glass of a refractive index of $n = 1.85$, E is the refraction for unpolarized incident light)

Table 2. The ratio of intensity (I_2/I_0) of incident and refraction rays in different angle of incidence (θ) for glass material of a refractive index of $n = 1.85$

$\theta/\text{deg.}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
I_2/I_1	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.90	0.90
$\theta/\text{deg.}$	50	55	60	65	70	75	80	85	90	
I_2/I_1	0.89	0.88	0.86	0.83	0.78	0.70	0.58	0.38	0	

4.2.2 玻璃球的微分散射截面与总散射截面的计算

瞄准距离在 $h \sim h + \Delta h$ 之间的入射光线在玻璃球面上的交面是绕光轴的一个圆环, 这个圆环的面积为 $2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ (图 4)。圆环在与入射光线垂直的平面上的投影面积为

$$ds_0 = 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

ds_0 被称为微分散射截面^[7]。又因

$$h = R \sin \theta, \quad dh = R \cos \theta d\theta,$$

令玻璃球半径 $R = 1$, 于是 $ds_0 = 2\pi h dh$, 把微分散射截面与瞄准距离 h 和光线的入射角的函数关系列于表 3 中。瞄准距离的变化范围是 $0 \sim 1$, 对微分散射截面求积分, 可以求出总散射截面 S_0 :

$$S_0 = \int ds_0 = 2\pi \int h dh = \pi \quad (9)$$

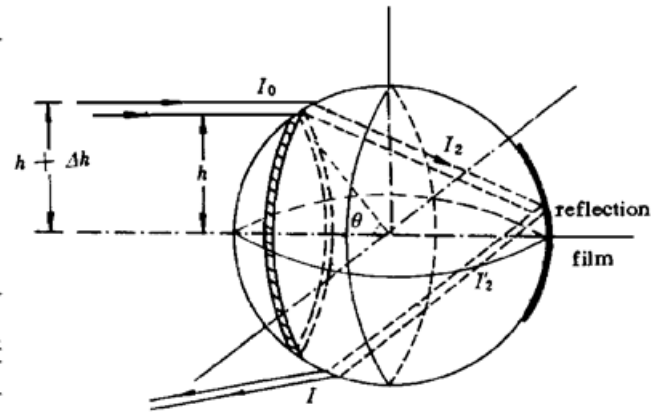


Fig. 4 The cross section of incident ray on the minim glass bead

Table 3. The angle of incidence (θ), impact parameter (h) and cross section (ds_0) of rays in a minim glass bead

$\theta/\text{deg.}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
h	0	0.087	0.174	0.259	0.342	0.423	0.5	0.574	0.643	0.707
ds_0	0.024	0.071	0.116	0.157	0.194	0.225	0.248	0.265	0.273	0.273
θ	50	55	60	65	70	75	80	85	90	
h	0.766	0.819	0.866	0.906	0.940	0.966	0.985	0.996	1	
ds_0	0.273	0.265	0.248	0.225	0.194	0.157	0.116	0.071	0.024	

* $d\theta = \pi/36$.

4.2.3 有效散射截面与回归反射系数

目的是研究回归散射现象, 因此忽略了对光线在玻璃球内多次内反射的讨论, 而只关注一次内反射光束的强度变化。将进入玻璃球、并能够通过散射沿小锥角回归光源的细光束所对应的微分散射截面 ds_0 与有效光能因子 ρ 的乘积称为有效微分散射截面 ds 。所谓有效光能因子 ρ , 是射入玻璃球细光束的光束强度 I_0 与对应的射出玻璃球细光束的光束强度 I 之比 $\rho = I/I_0$, 因而

$$ds = \rho ds_0 = (I/I_0) ds_0 \quad (10)$$

作一次内反射的光束在玻璃球中经过入射→反射→出射的过程, 光束强度的变化依次是 $I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2' \rightarrow I$, 其中 I_2 和 I_2' 分别是光束在玻璃球右表面上反射前后的强度。在推导中作了如下假设: 1) 认为玻璃球由质地均匀的光学玻璃制成, 可以把它视为一个理想的透明球体, 因而略去了光束在玻璃球中传播时, 由于介质吸收与散射所造成的能量损耗; 2) 设玻璃球右表面顶部镀有全反射膜, 形成一优质的背面镜, 将它视为有完全反射能力的理想反射镜, 略

去了光束在反射时的光能损失, 因而 $I_2 \approx I_2'$; 并由(7) 式知 $I/I_2' = I_2/I_0$ 。这样仅需要考虑两次折射中的光能损失(图 4), 得到:

$$ds \approx (I/I_2')(I_2/I_0) ds_0 \approx (I_2/I_0)^2 ds_0 \approx 2\pi h (I_2/I_0)^2 dh \quad (11)$$

若令 dh 为 Δh , 有

$$\Delta s \approx (I_2/I_0)^2 \Delta s_0 \approx 2\pi h (I_2/I_0)^2 \Delta h \quad (12)$$

这样, 就可以根据(12) 式和表 1 到表 3 中列出的数值, 利用数值积分法, 求出在某一张角内的回归光线的有效总散射截面。

$$S \approx \sum \Delta s \approx 2\pi \sum h (I_2/I_0)^2 \Delta h \quad (13)$$

对于折射率为 $n = 1.75、1.80、1.85、1.90、2.00$ 的 5 种玻璃球, 在回归光线光锥张角为 $1^\circ、3^\circ、5^\circ$ 几种情况下, 计算了有效总散射截面。并把有效总散射截面与总散射截面之比, 称为该种玻璃球的回归反射系数 $\eta = S/S_0$ 。以上几种情况下玻璃球的回归反射系数 η 的计算结果列于表 4 中。

Table 4. The theoretical value of retroreflection coefficient for the glass bead

$\eta(\%) \backslash n$	1.75	1.80	1.85	1.90	2.00
D_2					
1°	0	7.13	7.60	15.74	9.25
3°	15.79	23.71	48.10	40.63	19.79
5°	26.21	62.12	54.60	47.49	25.99

结 论 计算表明, 用折射率 1.85 左右的玻璃球(后表面顶部镀上全反射膜)可以很好地实现光的回归反射。表 4 表明, 这时回归反射系数(3° 以内)达到 48.1%, 即 48.1% 的入射光能, 将集中在张角为 3° 的光锥中射回光源, 其余光能则向其它方向散射。

在实际工艺中, 由于玻璃球不可能复盖反光膜表面全部面积, 玻璃球外还有一薄层透明保护膜等原因, 回归反光膜的反射系数达不到这一理想值。

另外, 玻璃球回归反射还有一个重要特点, 即光束相对于反光膜的入射角在相当大的变化范围内, 反光膜都具有优良的回归反射性能, 称这种回归反光膜具有广角回归反光性能。

总之, 玻璃球的形态、品质、合适的折射率是保证反光膜质量的关键。本文的计算结果为优质产品设计提供了理论依据。

刘德森教授提供了修改意见, 作者表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] Pand Channon, Optics for people stuck. *Phys. Teacher*, 1995, 33(2): 112~ 115
- [2] 王柏庐, 回归反光原理及其应用. *物理通报*, 1996, 11: 33~ 35
- [3] 王柏庐, 回归反光膜的结构、原理及应用. *物理*, 1997, 26(1): 48~ 50
- [4] Kurt Nassau, The Physics and Chmistry of Color, New York, A Wiley-Intersciene Publication, John Wiley & Sons, 1983: 219~ 224
- [5] C. F. Bohren, Absorption and Scattering of Light by Small Particles, New York, A Wiley-Intersciene Publication, John Wiley & Sons, 1983: 166~ 167
- [6] Г. С. 兰斯别尔格, 光学(下册), 北京, 人民出版社, 1957: 439~ 440
- [7] 曾谨言, 量子力学(下册), 北京, 科学出版社, 1982: 330~ 331

Theoretical Study of Retroreflection of a Minim Glass Bead

Wang Bailu

(*Department of Physics, Southwest China Normal University, Chongqing 400715*)

(Received 25 November 1996; revised 28 June 1997)

Abstract The mechanism of retroreflection of minim glass bead was studied and a scattering model of retrodirective diffuse of parallel light rays in glass bead was established. Theoretical calculation and the best condition of retroreflection for the glass bead were given.

Key words minim glass bead, scattering model, retroreflection coefficient.