

轴对称介质中光子的运动及其受激发射*

朱蔚通

(中国科学院上海光学精密机械研究所高功率激光物理国家实验室, 上海 201800)

沈文达 俞

(上海大学物理系, 上海 201800)

摘 要 采用光学度规模型, 研究了光子在轴对称介质中的运动轨道, 分析了光子在不稳定轨道附近的行为, 进而讨论了它在激活介质中的受激发射。

关键词 光学度规, 轴对称介质, 光子运动, 受激发射。

1 引 言

作为光与物质相互作用的一种模型, 光学度规已被广泛地用来分析光与物质相互作用的各种问题。诸如运动介质中广义协变的有质动力^[1]、介质背景对氢谱的影响^[2]、激光加速器中电子能量增益的广义协变推导^[3]、拍波激光加速器中的频率匹配^[4]、强激光等离子体的光学度规描述^[5]、强激光等离子体中的自由电子波函数^[6]、强激光等离子体的 Riemannian 几何^[7]以及在这样的几何中光子的运动^[8]和自由电子的经典^[9, 10]和量子^[11]行为等。光学度规的引入不仅能很好的阐明强场与物质相互作用的物理现象和内在机制, 而且便于把理论描述推广到有引力场的弯曲时空。反之, 也可以根据引力场中发生的现象用光学度规描述的光与物质的相互作用来模拟。本文就是鉴于黑洞附近受激发射^[12]的机理, 用轴对称介质中光子在不稳定轨道附近的行为模拟这一现象。研究表明, 在一定条件下, 它会产生受激发射。

2 理论模型

光学度规定义为^[13, 5]

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + (1 - 1/n^2)u_\mu u_\nu \quad (1)$$

其中, $g_{\mu\nu}$ 为引力度规, n 为介质折射率, u_μ 为介质在实验室坐标系中的四维速度。在此模型下, 光与介质的相互作用被等效于光子在由光学度规 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 决定的弯曲时空中的行为。

假定引力时空是平坦的, 即 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, 而四维坐标 $x^\mu = (ct, r, \phi, z)$, 于是静止介质的光学度规 $\bar{g}_{\mu\nu} = (-1/n^2, 1, r^2, 1)$, 不变元 dS^2 在柱坐标下的表达式为

$$dS^2 = (1/n^2)(cdt)^2 + dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2 \quad (2)$$

* 国家自然科学基金和国家高技术惯性约束聚变基金资助课题。

收稿日期: 1997-04-09

3 光子在轴对称非均匀介质中的运动

假如介质是轴对称的,且介质的折射率与 t 、 z 、 Φ 无关,则相应的不变元 dS^2 为

$$dS^2 = - [1/n(r)]^2 (cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\Phi + dz^2 \quad (3)$$

该体系有三个守恒的协变动量 $p_0 = -E$, $p_\Phi = L$, $p_z = Z$ 。这里 E 、 L 和 Z 均为常数。

光子的运动是由 $dS = 0$ 刻划的。因此, S 不能用作光子世界线上的仿射参量。任选一标量性仿射参量 λ , 光子的四维动量定义为

$$p^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda \quad (4)$$

于是,

$$p^0 \equiv (cdt/d\lambda) = \bar{g}^{00} p_0 = (-n^2)(-E) = n^2 E \quad (5)$$

$$p^\Phi \equiv (d\Phi/d\lambda) = \bar{g}^{\Phi\Phi} p_\Phi = (1/r^2)L \quad (6)$$

$$p^z \equiv (dz/d\lambda) = \bar{g}^{zz} p_z = Z \quad (7)$$

光子的不变元 $dS^2 = 0$, 因而,

$$\bar{g}_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$$

它可写成

$$-n^2 E^2 + (dr/d\lambda)^2 + L^2/r^2 + Z^2 = 0 \quad (8)$$

可以求得四维动量 p^μ 的 r 分量为

$$p^r \equiv (dr/d\lambda) = (n^2 E^2 - L^2/r^2 - Z^2)^{1/2} \quad (9)$$

由(6)式和(9)式,可得到光子在垂直 z 轴平面上运动的轨道方程,

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\Phi}\right)^2 = \frac{n^2 E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{Z^2}{L^2} \quad (10)$$

由(7)式和(9)式,可得到 r 随 z 变化的轨道方程

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n^2 E^2}{Z^2} - \frac{L^2}{r^2 Z^2} - 1 \quad (11)$$

先考虑光子入射方向与 z 轴垂直,即 $Z = 0$ 的情况。由(10)式得到

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\Phi}\right)^2 = \frac{n^2 E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} \quad (12)$$

这表明,光子的轨道直接取决于介质的折射率 n 。因等式左边不能为负,所以可能的运动只发生在 $n \geq L/rE$ 范围内。在这个范围内,光子的运动还有许多不同的形式,如束缚态运动,散射态运动等。这由函数 nE/L 与函数值 $1/r$ 的相对大小关系而定。由于 $Z = 0$,故光子的轨道局限在一个平面内。

如果 $Z \neq 0$,那末,光子的轨道由(10)式描写。(10)式和(12)式比较,差别仅在于常数项 Z^2/L^2 。这就是说,在光子运动过程中, z 方向有一恒定的动量,运动轨道不再局限在一个平面内,而是延伸到三维空间。 r 随 z 的变化由(11)式描写。

具体分析一个特例。设介质的折射率分布满足:

$$n^2 = (1/r^2 - r + r^2 + 1/2)L^2/E^2 \quad (13)$$

(13)式中 r 已无量纲化。 n 的值在 $r \rightarrow 0$ 、 $r \rightarrow \infty$ 时均趋于无穷大,但是,考虑到研究的 r 范围局限在两个非零确定值 r_1 和 r_2 之间,这条件是可能做到的。在这种介质中光子的轨道方程为

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\Phi}\right)^2 = -r + r^2 + \frac{1}{2} - \frac{Z^2}{L^2} \quad (14)$$

为了求解微分方程(14), 令 $a = (1/2) - Z^2/L^2$, $X = r^2 - r + a$, 则(14)式改写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = \pm \sqrt{X} \tag{15}$$

积分得到 φ 与 r 的关系式

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\sqrt{X}}{ar} - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \operatorname{arsh}\left(\frac{2a-r}{r\sqrt{4a-1}}\right), & a > 0, 4a > 1 \\ -\frac{\sqrt{X}}{ar} - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \ln\left(\frac{2a-r}{r}\right), & a > 0, 4a = 1 \\ -\frac{\sqrt{X}}{ar} + \frac{1}{2a\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{-r+2a}{r\sqrt{1-4a}}\right), & a < 0, 4a < 1 \end{cases} \tag{16}$$

由(16)式给出的 $\varphi \sim r$ 的关系曲线示于图 1。虚线、点线和直线分别对应($a > 0, 4a > 1, Z^2/L^2 = 1/6$), ($a > 0, 4a = 1, Z^2/L^2 = 1/4$) 和($a < 0, 4a < 1, Z^2/L^2 = 3/4$) 三种情况。 r 和 φ 已无量纲化。

把(13)式代入(11)式, 得到

$$dz = \pm \frac{Z}{L} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r + a}}$$

积分上式, 可以得到 z 与 r 的关系式

$$z = (Z/L) \ln(r + \sqrt{r^2 - r + a} - 1/2) + z_0 \tag{17}$$

由(17)式给出的 $z \sim r$ 关系曲线示于图 2($z_0 = 0.06, Z/L = 0.34$)。 z 和 r 已无量纲化。

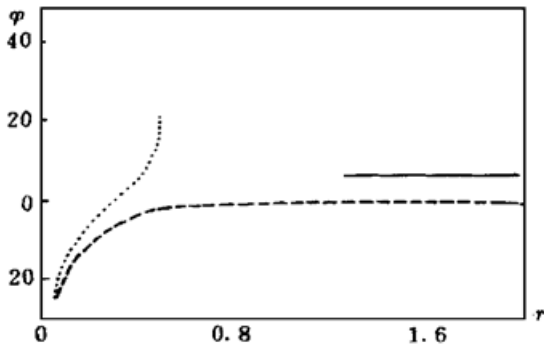


Fig. 1 Azimuth φ versus radial coordinate r

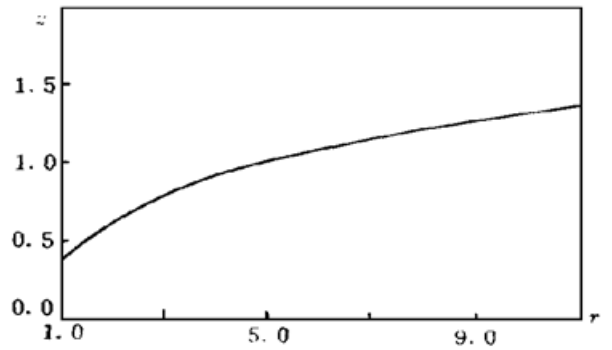


Fig. 2 Propagation distance z versus radial coordinate r

4 $r = 1/2$ 处附近的光子运动

从图 1 看到在 $r = 1/2$ 附近, 点线($a > 0, Z^2/L^2 = 1/4$) 所描述的 φ 与 r 的关系曲线显示出方位角 φ 显著增加。为了更好地研究 $r = 1/2$ 附近光子轨道的特点, 参照文献[12], 把(14)式写成更易讨论的形式。令 $u = 1/r$ 。于是(14)式可化为

$$(du/d\phi)^2 + 1/u - 1/u^2 = a \tag{18}$$

(18)式右边的 $a = 1/2 - Z^2/L^2 > 0$ 起到了碰撞参数 $(M/b)^2$ 的作用^[12]。有效势 $v = 1/u - 1/u^2$ 在 $u = 2$ ($r = 1/2$) 处有极大值 $1/4$ 。图 3 为势函数 V 对 u 的关系曲线。

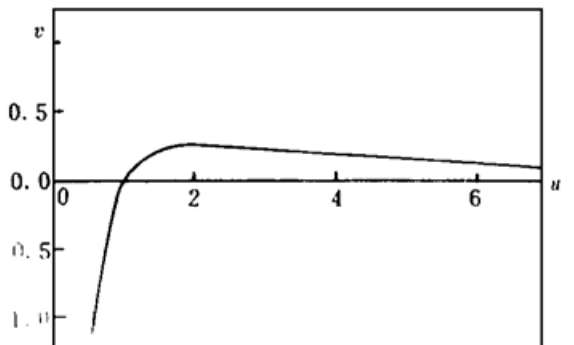


Fig. 3 Potential function versus u

对 $a = 1/4$ ($Z/L = 1/2$), $u = 2$ ($r = 1/2$) 是光子的不稳定轨道。希望考虑 $u = 2$ 附近的轨道。为了便于与文献[12] 对照, 令文献[12] 中 $M = 1$, 且 $b^2 = a^{-1} = 4$, $b = 2$ 。

让 $b_0 = (2 + \epsilon)$, $u_0 = (2 - \delta)$ 为轨道转折点。其中 ϵ 和 δ 均为小量。从(18) 式和转折点 $(du/d\phi)^2 = 0$ 的要求, 得到

$$1/u_0 - 1/u_0^2 = 1/b_0^2 \quad (19)$$

展开(19) 式中的 u_0 和 b_0 , 并保留 ϵ 和 δ 的最低阶, 得到

$$\delta = 2\epsilon^{3/2} \quad (20)$$

再令 $u = u_0 - \zeta$ 于是对于小的 ζ (18) 式变成

$$\frac{d\zeta}{d\phi} = \left(\frac{2}{u_0^3} - \frac{1}{u_0^2}\right)^{1/2} \zeta^{3/2} \approx \left(\frac{1}{8}\delta\right)^{1/2} \zeta^{3/2} \quad (21)$$

对(21) 式积分得到

$$\phi = 4(2/\delta)^{1/2} \zeta^{1/2} = 4\epsilon^{-1/4} \zeta^{1/2} \quad (22)$$

而旋转次数

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \epsilon^{-1/4} \zeta^{1/2} \sim 0.64 \epsilon^{-1/4} \zeta^{1/2} \quad (23)$$

以上关系式描述了光子在不稳定轨道附近的运动。值得注意的是本文得到的这些定量关系与文献[12] 几乎一样。只要 ϵ 取得足够小, 光子将在 $u = 2$ 附近旋转多次, 然后散射出去。如果光子模能够被轨道附近存在的激活介质放大, 那么与绕转运动相匹配的那些光子模将得到增益。如果每圈的能量增益为 ρ , 那末总的放大倍数

$$R = \rho^{2N} \sim \rho^{1.28\epsilon^{-1/4}\zeta^{1/2}} \quad (24)$$

此式表明, 当 $\rho > 1$ 时, 只要取 ϵ 足够小, 就可以把对应的光子模放大足够倍数。例如, 取 $\zeta = 10^{-4}$, 那末得到 $N \sim 6.4 \times 10^{-3} \epsilon^{-1/4}$ 。所以对 $\epsilon = 10^{-12}$, $N = 6.4$ 。若每圈纯增益为 17%, $\rho = 1.17$, 则 $R = (1.17)^{12.8} = 7.461$ 。而对 $\epsilon = 10^{-16}$, $N = 64$, 这时 $R = (1.17)^{128} = 5.34 \times 10^8$ 。这样, 激活介质的能量就能有效地转化为电磁场的能量了。这个过程就是受激发射过程, 它的机理完全类同于文献[12] 论及的黑洞附近的受激发射过程。

所不同的是本文用介质来代替黑洞。用柱对称代替球对称。为此, 再考察一下 $a = 1/4$ ($b = 2$) 时, z 和 r 的关系。将 $a = 1/4$ 代入(17) 式得到

$$u = 2/[1 + c_0 \exp(4z)] \quad (25)$$

用 $u = 2 - \zeta$ 代入(25) 式, 得到

$$\zeta = 2 - 2/[1 + c_0 \exp(4z)]$$

用 $z = 0$ 时 $\zeta = 0$, 定得 $c_0 = 1$, 得到

$$\zeta = 2 - 2/[1 + \exp(4z)]$$

对于 $\zeta = 10^{-4}$ 这样的小量, z 也是很小的。因而 $u = 2$ 附近的运动是不稳定的圆运动。

结 论 从光学度规出发, 考虑了光在轴对称介质中的运动, 讨论了光子在不稳定轨道附近的行为, 得到了螺旋式轨道。研究表明, 在激活介质中, 只要放大系数 $\rho > 1$, 选择足够小量的 ϵ , 就能产生受激发射, 激光的输出功率由系统的粒子数反转值决定。由本文的研究看到, 由于光学度规和引力度规在数学上的等价, 可以通过选择合适的介质折射率和运动状态来模拟天体物理中的有关现象。

参 考 文 献

- [1] Shitong Zhu, Wenda Shen, General relativistic ponderomotive force in a moving medium. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1987, **4**(5) : 739~ 742
- [2] Zhu Shitong, Shen Wenda, Ji Peiyong *et al.*, Effect of medium background on the hydrogen spectrum. *Proceedings of the Topical Meeting on Laser Materials and Laser Spectroscopy*. Singapore, World Scientific, Publishing Co. Pte. Ltd. 1989, 190~ 192
- [3] 朱蒨通, 沈文达, 邓锡铭等, 激光加速器中电子能量增益的广义协变推导. 物理学报, 1989, **38**(4) : 559~ 566
- [4] 朱蒨通, 拍波激光加速器中的频率匹配. 物理学报, 1989, **38**(7) : 1167~ 1171
- [5] 朱蒨通, 沈文达, 强激光等离子体的光学度规描述. 物理学报, 1993, **42**(9) : 1438~ 1442
- [6] 朱蒨通, 沈文达, 郭奇志, 强激光等离子体中的自由电子波函数. 物理学报, 1993, **42**(9) : 1471~ 1478
- [7] Shitong Zhu, Qizhi Guo, Wenda Shen *et al.*, Riemannian geometry of strong-laser plasma. *Intern. J. Theoret. Phys.*, 1995, **34**(2) : 169~ 178
- [8] 郭奇志, 沈文达, 朱蒨通, 强激光等离子体中光子的运动. 物理学报, 1995, **44**(3) : 396~ 400
- [9] 郭奇志, 沈文达, 朱蒨通, 强激光等离子体中自由电子的经典行为. 物理学报, 1995, **44**(2) : 210~ 215
- [10] Wenda Shen, Shitong Zhu, Qizhi Guo, Classical description of the radiation of a charged particle in a strong-laser plasma. *Intern. J. Theoret. Phys.*, 1995, **34**(10) : 2095~ 2104
- [11] Wenda Shen, Shitong Zhu, Wave function of a free electron in a laser plasma via Riemannian geometry. *Intern. J. Theoret. Phys.*, 1995, **34**(10) : 2085~ 2094
- [12] L. H. Ford, Stimulated emission processes near a black hole. *J. Phys. (A)*, 1982, **15**(3) : 825~ 830
- [13] W. Gordon, Zur lichtfortpflanzung nach der relativit ts-theorie. *Annalen der Physik*, 1923, **72**(22) : 421~ 456

Motion of Photon in Axially Symmetrical Medium and Its Stimulated Emission

Zhu Shitong

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Shen Wenda Yu Yang

(Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 201800)

(Received 9 April 1997)

Abstract The orbits of a photon in an axially symmetrical medium are treated by using the optical metric model. The behaviors of the photon near instable orbits is analyzed, and its stimulated emission in an active medium is discussed.

Key words optical metric, axially symmetrical medium, motion of photon, stimulated emission.