

在非线性 J-C 模型系统中制备“薛定谔猫态”*

魏 渭 郭光灿

(中国科学技术大学物理系, 合肥 230026)

摘 要 证明在含有克尔介质的双光子 J-C 模型系统中通过对原子的测量可以制备“薛定谔猫态”。选择适当的测量时间、原子初态及非线性系数, 即可产生偶相干态、奇相干态和 Y-S 相干态。进一步分析表明, 正是由于克尔非线性介质的存在, 该“薛定谔猫态”态才可能在 $\bar{n} \gg 1$ 条件下产生亚泊松光子分布。

关键词 “薛定谔猫”态, 克尔非线性介质, 量子测量。

1 引 言

所谓薛定谔猫态(S-cat)是指具有宏观可区分的两个或多个态的相干叠加, 它是近年来量子光学领域中的焦点问题之一。猫态具有量子和宏观两种特征: 一方面它满足量子力学中的态叠加原理; 另一方面所涉及的态都在经典极限下对应于经典单色波, 即相干态。薛定谔猫态具有许多重要的非经典特性: 压缩性、高阶压缩性、亚泊松分布及光子数振荡。因此, 在量子光学制备薛定谔猫态将可以对量子力学的许多预言进行实验的检验, 并呈现出经典理论无法解释的量子效应^[1]。

到目前为止, 实验已经在高 Q 腔中观察到基于单个原子和单模场相互作用而产生的亚泊松分布^[2], 但是薛定谔猫态尚未实现。然而, 理论上制备薛定谔猫态的体系却纷纷涌现。总体来说可分为两大类^[3]: 1) 选择适当的哈密顿量, 经过么正变换使光场直接演化成薛定谔猫态。Yurke 和 Stoler 等人^[4-6]利用非线性过程、Buzek 等人^[7-11]利用在不同条件下原子与场的自动消纠缠分别产生单模、双模薛定谔猫态。2) 利用“纠缠-测量”的办法, 即首先使原子和光场在相互作用过程中演化成纠缠态, 然后对子系统进行量子测量, 可以使光场坍缩到特定的非经典态上^[12-20]。基于量子非破坏性(QND)测量也属于这一类^[12, 13, 15, 18]。量子非破坏测量是通过测量读出模合适的正交分量, 获得关于信号模的一个正交分量的信息而又不破坏信号模的待测物理量。通过测量读出模的光子数, 信号模会坍缩到薛定谔猫态。Brun 等人让一个具有适当速度的叠加态原子通过腔内光场(初始处于相干态), 然后测量从腔中出来的原子是处于激发态 $|e\rangle$ 还是处于基态 $|g\rangle$, 这样腔场就演化为薛定谔猫态^[13]。还有一类是有条件测量^[14, 16, 17, 19, 20]。这类测量条件颇为简单。Sherman 等人^[14]对经历了双光子跃迁从腔中出

* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1997-05-03; 收到修改稿日期: 1997-06-24

来的原子进行一次测量,使腔场坍缩到二重振幅薛定谔猫态。随后, Garraway 等^[17]进一步对不断从腔中出来的原子进行连续测量,以产生多重薛定谔猫态。

本文将根据“纠缠-测量”方法,进一步探讨在含有克尔介质的双光子 J-C 模型系统中制备薛定谔猫态。该系统实际上同时包括两个非线性过程,即原子的双光子跃迁和代表克尔介质的非谐振子。该系统已引起了相当的关注^[11, 21-24]。Amitabh Joshi 等讨论了该系统两非线性过程对粒子数反转所起的作用^[21];方卯发等分析了克尔非线性介质对光场的熵和位相所产生的影响^[24];最近,李高翔和彭金生又讨论了在含有克尔介质的 Λ 型三能级原子同双模场作用系统中,光场的俘获态正是双模薛定谔猫态^[11]。作者发现,对本系统中初始为基态的原子进行连续测量,将会使腔场逼近福克态或位相薛定谔猫态。本文将对初始处于叠加态的原子进行一次测量,结果可以产生偶相干态、奇相干态、Yurke-Stoler 相干态等多种薛定谔猫态。克尔非线性介质、测量时间及原子初态对薛定谔猫态的具有形式及其非经典特性起着有效的调制作用。

2 含有克尔介质的双光子 J-C 模型

本文考虑一个注入克尔介质的高 Q 腔,其内存在一个经历双光子跃迁的两能级原子。在绝热近似和旋转波近似下,该系统的有效哈密顿量 ($\hbar = c = 1$) 为^[21]

$$H_{\text{eff}} = \omega a^+ a + \omega_s S_z + \chi a^{+2} a^2 + g(a^{+2} S_- + a^2 S_+) \quad (1)$$

式中 a^+ 和 a 为腔模的产生和湮灭算符, S_{\pm} 为原子的赝自旋算符, g 为原子与腔场的耦合常数, χ 代表克尔三阶非线性系数的色散部分。

在共振情况(即 $\omega_s = 2\omega$) 下,该有效哈密顿量可表示为

$$H_{\text{eff}} = H_0 + H', \quad (2)$$

其中

$$H_0 = (\omega - \chi) a^+ a + 2(\omega - \chi) S_z + \chi(a^+ a)^2 + 4\chi a^+ a S_z + 2\chi, \quad (3)$$

$$H' = g(a^{+2} S_- + a^2 S_+) - 4\chi a^+ a S_z + 2\chi(S_z - 1), \quad (4)$$

且满足

$$[H_0, H'] = 0. \quad (5)$$

这样,在“广义”的相互作用表象中,满足薛定谔方程

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_{AF} = H' |\psi(t)\rangle_{AF} \quad (6)$$

的解可以设为

$$|\psi(t)\rangle_{AF} = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n} |e, n\rangle + C_{g,n} |g, n\rangle]. \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式中,可以得到

$$\begin{aligned} i\dot{C}_{e,n}(t) &= -\chi(2n+1)C_{e,n}(t) + g\sqrt{(n+1)(n+2)}C_{g,n+2}(t), \\ i\dot{C}_{g,n+2}(t) &= \chi(2n+1)C_{g,n+2}(t) + g\sqrt{(n+1)(n+2)}C_{e,n}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

设 $t = 0$ 时刻原子处于叠加态

$$|\psi(0)\rangle_A = C_e |e\rangle + C_g |g\rangle, \quad (9)$$

而光场处于相干态

$$|\psi(0)\rangle_F = |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n |n\rangle, \quad (10)$$

其中 $Q_n = \exp(-\alpha^2/2)\alpha^n/n!$ (这里为方便, 设 α 为实数)。

所以系统的初态可以表示为

$$|\Psi(0)\rangle_{AF} = |\Psi(0)\rangle_A \otimes |\Psi(0)\rangle_F = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}(0)|e,n\rangle + C_{g,n}(0)|g,n\rangle]. \quad (11)$$

其中

$$C_{e,n}(0) = Q_n C_e, \quad C_{g,n}(0) = Q_n C_g. \quad (12)$$

于是(8)式的解为

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= C_{e,n}(0) \cos(\beta_n t) + \frac{i}{\beta_n} [\chi(2n+1)C_{e,n}(0) - g\sqrt{(n+1)(n+2)}C_{g,n}] \sin(\beta_n t), \\ C_{g,n}(t) &= C_{g,n}(0) \cos(\beta_{n-2} t) - \frac{i}{\beta_{n-2}} [\chi(2n-1)C_{g,n}(0) + g\sqrt{n(n-1)}C_{e,n-2}] \sin(\beta_{n-2} t), \\ & n = 0, 1, 2, 3 \cdots \end{aligned} \quad (13)$$

其中 β_n 为一般拉比频率^[21]

$$\beta_n^2 = g^2(n+1)(n+2) + \chi^2(2n+1)^2. \quad (14)$$

显然, (12)式、(13)式表明经过相互作用之后, 系统处于原子-腔场纠缠态。

在强场近似下 ($n \sim \alpha^2 \approx \bar{n} \gg 1$), 可以作进一步假设:

$$\beta_n \cong nb + c, \quad \frac{\chi(2n+1)}{\beta_n} \cong \frac{2\chi}{b} \equiv X, \quad g \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\beta_n} \cong \frac{g}{b} \equiv Y, \quad (15)$$

其中 $b = \sqrt{g^2 + 4\chi^2}$, $c = b/2 + g^2/b$ (X 显然为等效的非线性系数, 且满足 $X^2 + Y^2 = 1$)。于是, (13)式可以写成

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= C_{e,n}(0) \cos[(bn+c)t] + i[XC_{e,n}(0) - YC_{g,n+2}(0)] \sin[(bn+c)t], \\ C_{g,n}(t) &= C_{g,n}(0) \cos[(bn-2b+c)t] - i[XC_{g,n}(0) + YC_{e,n-2}(0)] \sin[(bn-2b+c)t], \\ & n = 0, 1, 2, 3 \cdots \end{aligned} \quad (17)$$

3 基于对原子测量制备腔场的薛定谔猫态

下面将对经过相互作用后的处于激发态的原子进行测量, 根据场电离技术^[2], 该过程是高效可行的。

在 t 时刻处于激发态的原子, 相应的腔场将坍缩到下列量子态:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_F &= \mathcal{A} |\Psi(t)\rangle_{AF} = \\ & C' \{ [(1+X)C_e - YC_g] \exp(ict) |\alpha \exp(ibt)\rangle + \\ & [(1-X)C_e + YC_g] \exp(-ict) |\alpha \exp(-ibt)\rangle \}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 C' 为归一化常数, 且为

$$\begin{aligned} C' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1+X^2)|C_e|^2 + Y^2|C_g|^2 - 2XYR_c(C_e C_g^*) + \right. \\ & \left. \exp[-2\alpha^2 \sin^2(bt)] \{ [Y^2(|C_e|^2 - |C_g|^2) + 2XYR_c(C_e C_g^*)] \cos[2ct + \alpha^2 \sin(2bt)] - \right. \\ & \left. 2YI_m(C_e C_g^*) \sin[2ct + \alpha^2 \sin(2bt)] \} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (19)$$

(18)式表明, 由于对输出激发态原子的测量, 光场已坍缩成位相薛定谔猫态(即振幅相同而位相相反的相干态叠加)。当 $X = 0$, 且 $C_g = 0$ 时, (18)式与文献[14, 17]的结果形式相似: 当 $X \neq 0$ 时, 该薛定谔猫态的形式和特性受到测量时间、原子的初态、以及非线性系数的调制。如果选择在

$$gt = Y\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), \quad (n = 0, 1, 2, 3\cdots) \tag{20}$$

时刻测量原子，腔场会坍缩到特殊态上。若原子的初态 (C_e, C_g) 和非线性系数 X 满足：

$$1) \quad \frac{C_e}{C_g} = \frac{Y\{\exp [i(\pi/2) + \pi Y^2]\} + 1}{(1 + X) \exp [i(\pi/2 + \pi Y^2)] + X - 1}, \tag{21}$$

则腔场为偶相干态；若原子的初态 (C_e, C_g) 和非线性系数 X 满足：

$$2) \quad \frac{C_e}{C_g} = \frac{Y\{\exp [i(\pi/2 + \pi Y^2)] - 1\}}{(1 + X) \exp [i(\pi/2 + \pi Y^2)] + 1 - X}, \tag{22}$$

则腔场为奇相干态；若原子的初态 (C_e, C_g) 和非线性系数 X 满足：

$$3) \quad \frac{C_e}{C_g} = \frac{Y\{\exp [i(\pi Y^2)] + 1\}}{(1 + X) \exp [i(\pi Y^2)] + X - 1}, \tag{23}$$

则腔场为 Yurke-Stoler 相干态。(21)~(23) 式中各参数是很容易选择的。当 $X = 0$ 时，满足 (21)~(23) 式的解分别为

$$\begin{aligned} C_e &= i/\sqrt{2}, & C_g &= 1/\sqrt{2}; \\ C_e &= -i/\sqrt{2}, & C_g &= 1/\sqrt{2}; \\ C_e &= 0, & C_g &= 1. \end{aligned} \tag{24}$$

由此可见，虽然克尔介质不存在的情况下，系统也能产生以上特殊的薛定谔猫态，但是能满足以上条件的原子初态仅分别存在一种。而加了克尔介质以后，可供选择的原子初态明显增多，这为实验研究提供了更方便的条件。克尔介质的加入不但有利于薛定谔猫态的选择，而且对该态的特性起着关键性的作用。根据(18)式，给出该态的光子数起伏为：

$$\sigma = \left[\frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle} \right]^{1/2} \equiv \frac{\Delta n}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}}, \tag{25}$$

(其具体公式见附录 1)。结果表明，当 $X = 0$ 时，因为 $n \sim \alpha^2 \approx \bar{n} \gg 1$ ，该态的光子数起伏为 1(见附录 2)，即腔场为泊松分布。但是若 $X \neq 0$ ，该态会产生显著的周期性亚泊松分布，如图 1 和 2 所示。

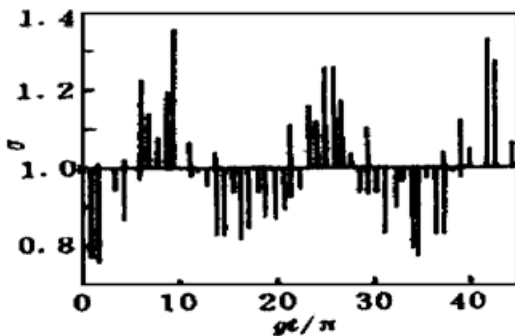


Fig. 1 Normalized photo number fluctuation σ vs. measurement time t . $C_e = C_g = 1/\sqrt{2}$, $\alpha^2 = 40$, $X = 0.6$, $X = 0$ correspond to $\sigma = 1$

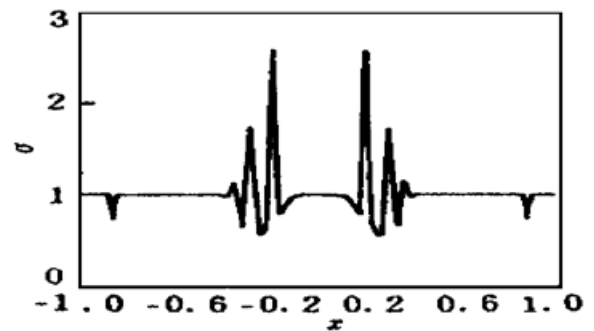


Fig. 2 Normalized photo number fluctuation σ vs. nonlinear index X . $t = \pi$, $\alpha = 40$

由此可见，克尔非线性介质的存在对薛定谔猫态的非经典特性起到了关键性的调制作用。

结 论 本文证明了在含有克尔介质的双光子 J-C 模型系统中, 利用“纠缠-测量”的方法, 在强场近似下, 可以产生薛定谔猫态。测量的时间、原子的初态及非线性系数这三个因素的选择决定了该薛定谔猫态的具体形式和特性。克尔非线性介质的存在对于亚泊松光子分布的实现是必不可少的, 这为非经典态的实验研究提供了新的路径。

参 考 文 献

- [1] 吴锦伟, 郭光灿, 薛定谔猫态宏观量子叠加态. 物理, 1995, **24**(5) : 269~ 273
- [2] G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, H. Walther, Observation of sub-poissonian photon statistics in a micromaster. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(23) : 2783~ 2790
- [3] K. Vogel, V. M. Akulin, W. P. Schleich, Quantum state engineering of the radiation field. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**(12) : 1816~ 1819
- [4] B. Yurke, D. Stoler, Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable state via amplitude dispersion. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(1) : 13~ 16
- [5] A. Mecozzi, P. Tombesi, Distinguished quantum states generated via nonlinear birefringence. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(11) : 1055~ 1058
- [6] K. Tara, G. S. Agarwal, S. Chaturvedi, Production of Schrodinger macroscopic quantum-superposition states in a Kerr medium. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(6) : 5024~ 5029
- [7] J. Gea-Banacloche, Atom and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(9) : 5913~ 5931
- [8] P. F. Gora, C. Jedrzejek, Superstructures, fractional revivals, and optical Schr dinger-cat states in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **48**(4) : 3291~ 3300
- [9] V. Buzek, B. Hladyk, Macroscopic quantum superposition states of light via two-photon resonant interaction of atoms with cavity field. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**(7) : 1309~ 1323
- [10] Tahira Nasreen, K. Zaheer, In the two-photon Jaynes-Cummings model: The generation of superposition of coherent states. *Phys. Rev. (A)*, 1994, **49**(1) : 616~ 619
- [11] Gao-Xiang Li, Jin-Sheng Peng, Population trapping in a Λ -configuration three-level system and Schr dinger-cat states. *Phys. Lett. (A)*, 1996, **219**(1, 2) : 41~ 48
- [12] B. Yurk, W. Schleich, Quantum superposition generated by quantum nondemolition measurements. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(3) : 1703~ 1711
- [13] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimaid, Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum nondemolition measurements and generation of “Schr dinger-cat” states. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7) : 5193~ 5214
- [14] B. Sherman, G. Kurizki, Preparation and detection of macroscopic quantum superpositions by two-photon field-atom interaction. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(4) : 7674~ 7677
- [15] M. D. Reid, L. Krippner, Macroscopic quantum superpositions states in nondegenerate parametric oscillation. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(1) : 552~ 555
- [16] S. Schaufler, M. Frehberger, W. P. Schleich, The birth of a phase-cat. *J. Mod. Opt.*, 1994, **41**(9) : 1765~ 1779
- [17] B. M. Garraway, B. Sherman, H. Moya-Cessa *et al.*, Generation and detection of nonclassical field states by conditional measurements following two-photon resonant interaction. *Phys. Rev. (A)*, 199, **49**(1) : 535~ 547
- [18] J. J. Slosser, G. J. Milburn, Creating metastable Schr dinger-cat states. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(3) : 418~ 421
- [19] Guang-Can Guo, Shi-Baio Zhang, Generation of Schr dinger-cat states via Jaynes-Cummings model with large detuning. *Phys. Lett. (A)*, 1996, **223**(5) : 332~ 336
- [20] Guang-Can Gou, Shi-Biao Zheng, Preparation of entangled coherent states of the electromagnetic field based on detecting the state of the atom in the Jaynes-Cummings model. *Opt. Commun.*, 1997, **133**(1-6) : 142~ 146
- [21] Amitabh Joshi, R. R. Puri, Dynamical evolution of the two-photon Jaynes-Cummings model in Kerr-like

medium. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7) : 5056~ 5060

- [22] 李高翔, 彭金生, 周 鹏, 被克耳介质包围的 Λ 型三能级原子的粒子数布居几率. 光学学报, 1993, **13** (10) : 902~ 907
- [23] 李高翔, 彭金生, 高 Q Kerr 介质腔中非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中光场的性质. 物理学报, 1993, **42**(9) : 1443~ 1451
- [24] Mao-Fa Fang, Hui-En Liu, Properties of entropy and phase of the field in the two-photon Jaynes-Cummings model with an added Kerr medium. *Phys. Lett. (A)*, 1995, **200**(3, 4) : 250~ 256

附 录

1. 公式(25)也可以表示为

$$\sigma = \left[\frac{\langle \hat{a}^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle \hat{a}^{\dagger} a \rangle^2} - \langle \hat{a}^{\dagger} a \rangle + 1 \right]^{1/2}. \quad (25')$$

根据(18)、(19)式可以得到上式中

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{\dagger} a \rangle = & 2|c'|^2 \alpha^2 \left((1 + X^2) |C_c|^2 + Y^2 |C_g|^2 - 2XYR_c(C_c C_g^*) + \right. \\ & \left. \exp[-2\alpha^2 \sin^2(bt)] \{ [Y^2(|C_c|^2 - |C_g|^2) + 2XYR_c(C_c C_g^*)] \cos[2ct + 2bt + a^2 \sin(2bt)] - \right. \\ & \left. 2YI_m(C_c C_g^*) \sin[2ct + 2bt + \alpha^2 \sin(2bt)] \} \right), \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{\dagger 2} a^2 \rangle = & 2|c'|^2 \alpha^4 \left((1 + X^2) |C_c|^2 + Y^2 |C_g|^2 - 2XYR_c(C_c C_g^*) + \right. \\ & \left. \exp[-2\alpha^2 \sin^2(bt)] \{ [Y^2(|C_c|^2 - |C_g|^2) + 2XYR_c(C_c C_g^*)] \cos[2ct + 4bt + a^2 \sin(2bt)] - \right. \\ & \left. 2YI_m(C_c C_g^*) \sin[2ct + 4bt + \alpha^2 \sin(2bt)] \} \right), \quad (27) \end{aligned}$$

这里 c' 满足(19)式。

2. (19)、(26)、(27)式中的因子 $\exp[-2\alpha^2 \sin^2(bt)]$ 可以简化为

$$\exp[-2\alpha^2 \sin^2(bt)] = \begin{cases} 1, & \text{当 } gt = n\pi, (n = 0, 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{当 } gt \neq n\pi, (n = 0, 1, 2, \dots) (\because \alpha^2 \gg 1) \end{cases}. \quad (28)$$

将(28)式代入(19)式、(26)式、(27)式及(25')式, 即可得到 $\sigma = 1$ 。

Preparation of Schrödinger Cat States by Conditional Measurements in the Two-Photon Jaynes-Cumming Model

Wei Wei Guo Guangcan

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Received 3 May 1997; revised 24 June 1997)

Abstract We have proven that the Schrödinger cat states can be generated by conditional measurement on the atom in the Jaynes-Cumming model with a Kerr-like medium. The special states such as even-coherent states, odd-coherent state and Yurke-Stoler coherent state may be acquired by further choosing some suitable parameters, such as the time of measurement, initial state of the atom, and Kerr nonlinear constant. The sub-poisson distribution can be revealed under the high field approximation ($\bar{n} \gg 1$) only in the existence of Kerr medium.

Key words Schrödinger cat state, Kerr medium, quantum measurement.