

四通道自成像计算全息*

任朝红** 周 进 高文琦
(南京大学物理系, 南京 210093)

摘 要 描述了一种新型的计算全息, 它在双通道计算全息基础上通过对物谱加正的或负的二次位相因子, 能一次对四个不同的物进行编码, 再现时在四个不同的方向上分别产生它们的像, 并具有自成像的特性。文中给出了实验结果。

关键词 四通道自成像计算全息, 二次位相因子, 离散傅里叶谱。

1 引 言

作为现代光学的一个分支, 计算全息在匹配滤波、波形变换、全息扫描等各个方面得到了较为广泛的应用。计算全息与传统光全息相比具有功能灵活, 适用范围广等特点。经过几十年的发展, 产生了多种计算全息编码方法^[1, 2]。用这些编码方法大多在一张全息图上只能对一个物进行编码。近年来, Mendlovic 等提出了双通道计算全息^[3]。它能同时对两个物进行

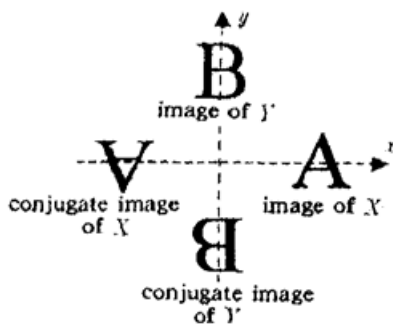


Fig. 1 Illustration of two channel CGH output plane

编码, 在两个互相垂直的方向上产生它们的像。设被编码的两个物为 A、B, 在输出面的 x 正方向上得到 A 的像, y 的正方向上得到 B 的像, 如图 1。与普通的傅里叶全息图相似, A、B 的共轭像分别在 x 、 y 的负方向上。本文通过对物谱加上二次位相因子, 在两个共轭像的位置上产生另外两个物的像, 这样把四个物编码在一张全息图上。由于加了二次位相因子, 全息图成像时无需透镜, 具有自成像特性, 故称为四通道自聚焦计算全息。通过它可以一次对四个物函数进行匹配滤波, 同时使全息图由常规的一通道提高到四通道。

2 编码原理

考虑编码单元如图 2 所示的全息图, 每个单元的大小为 $\delta d \times \delta d$, 其中心位置为 $(m\delta d, n\delta d)$, 由大小为 $a \times a$ 四个方形孔组成。以四个方形孔的中心为顶点构成的矩形, 在 μ 、 ν 方向的宽度分别为 $W_{mn}^{\mu}\delta d$ 、 $W_{mn}^{\nu}\delta d$; 其中心相对于编码单元的中心在 μ 、 ν 方向的偏移分别为 $P_{mn}^{\mu}\delta d$ 、

* 江苏省自然科学基金资助项目。

** 南京大学物理系九七届硕士研究生。

收稿日期: 1997-01-19; 收到修改稿日期: 1997-04-15

$P_{mn}^v \delta d$ 。这样每个编码单元共有四个独立的参量(P_{mn}^μ , W_{mn}^μ , P_{mn}^v , W_{mn}^v)。令:

$$\begin{aligned} \eta_{mn}^\mu &= P_{mn}^\mu + \frac{W_{mn}^\mu}{2}, & \zeta_{gn}^\mu &= P_{mn}^\mu - \frac{W_{mn}^\mu}{2}, \\ \eta_{mn}^v &= P_{mn}^v + \frac{W_{mn}^v}{2}, & \zeta_{gn}^v &= P_{mn}^v - \frac{W_{mn}^v}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

则整张全息图的透过率函数 $H(\mu, \nu)$ 可表示为:

$$\begin{aligned} H(\mu, \nu) &= \sum_m \sum_n \text{rect} \left[\frac{\mu - (m + \eta_{mn}^\mu) \delta d}{a} \right] \text{rect} \left[\frac{\nu - (n + \eta_{mn}^v) \delta d}{a} \right] + \\ &\text{rect} \left[\frac{\nu - (m + \eta_{mn}^\mu) \delta d}{a} \right] \text{rect} \left[\frac{\nu - (n + \zeta_{gn}^\mu) \delta d}{a} \right] + \\ &\text{rect} \left[\frac{\nu - (m + \zeta_{gn}^\mu) \delta d}{a} \right] \text{rect} \left[\frac{\nu - (n + \eta_{mn}^v) \delta d}{a} \right] + \\ &\text{rect} \left[\frac{\nu - (m + \zeta_{gn}^\mu) \delta d}{a} \right] \text{rect} \left[\frac{\nu - (n + \zeta_{gn}^v) \delta d}{a} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

把全息图置于如图 3 的光路中, 透镜的焦距为 f , 用波长为 λ 的平行相干光照射。在透镜

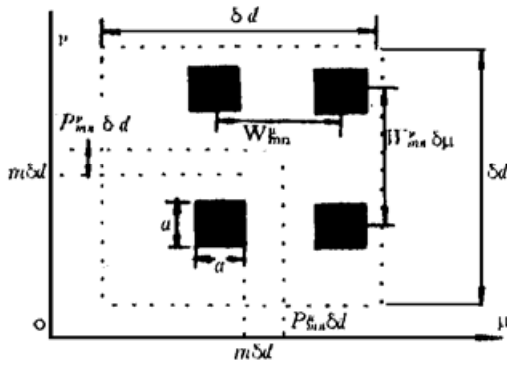


Fig. 2 A sample unit of CGH

焦平面(x, y) 上的光场 $h(x, y)$ 应为:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= F^{-1}[H(\mu, \nu)] = \\ &\sum_m \sum_n \left[\exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (x\eta_{mn}^\mu + y\eta_{mn}^v) \right] + \exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (x\eta_{mn}^\mu + y\zeta_{gn}^\mu) \right] + \right. \\ &\exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (x\zeta_{gn}^\mu + y\eta_{mn}^v) \right] + \left. \exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (x\zeta_{gn}^\mu + y\zeta_{gn}^v) \right] \right] \times \\ &\text{sinc}(ax) \text{sinc}(ay) \exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (xm + yn) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

F^{-1} 表示逆傅里叶变换。设全息图的 $(+1, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(0, +1)$ 、 $(0, -1)$ 衍射级分别在 $(x_1, 0)$ 、 $(-x_1, 0)$ 、 $(0, y_1)$ 、 $(0, -y_1)$ 处, 其中 $\frac{x_1 \delta d}{\mathcal{M}} = 1$, $\frac{y_1 \delta d}{\mathcal{M}} = 1$, 采用适当的近似^[4], 可得到 $(x_1, 0)$ 、 $(-x_1, 0)$ 、 $(0, y_1)$ 、 $(0, -y_1)$ 附近的光场分布 $h_{+1,0}$ 、 $h_{-1,0}$ 、 $h_{0,+1}$ 、 $h_{0,-1}$ 。忽略常数因子, 有:

$$h_{+1,0}(x', y) = \sum_m \sum_n \exp(j2\pi P_{mn}^\mu) \cos \pi W_{mn}^\mu \exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (x'm + yn) \right], \quad (x' = x - x_1)$$

$$h_{-1,0}(x'', y) = \sum_m \sum_n \exp(-j2\pi P_{mn}^\mu) \cos \pi W_{mn}^\mu \exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (x''m + yn) \right], \quad (x'' = x + x_1)$$

$$h_{0,+1}(x, y') = \sum_m \sum_n \exp(j2\pi P_{mn}^v) \cos \pi W_{mn}^v \exp \left[j \frac{2\pi\delta d}{\mathcal{M}} (xm + y'n) \right], \quad (y' = y - y_1)$$

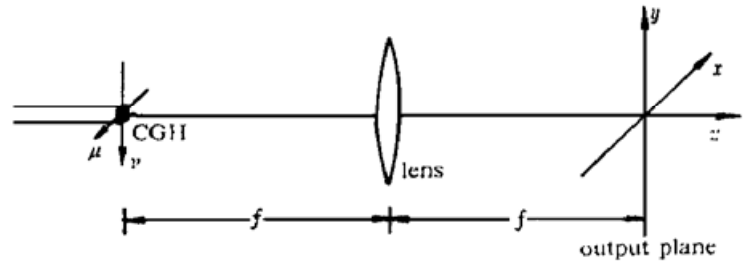


Fig. 3 A setup for read-out of a normal CGH

$$h_{0,-1}(x, y'') = \sum_m \sum_n \exp(-j2\pi P_{mn}^v) \cos \pi W_{mn}^v \exp \left[j \frac{2\pi \delta d}{\lambda f} (xm + y''n) \right], \quad (y'' = y + y_1) \quad (4)$$

可以看出 $h_{+1,0}$ 和 $h_{-1,0}$ 只与参量 (P_{mn}^μ, W_{mn}^μ) 有关, $h_{0,+1}$ 和 $h_{0,-1}$ 只与参量 (P_{mn}^v, W_{mn}^v) 有关。 (P_{mn}^μ, W_{mn}^μ) 与 (P_{mn}^v, W_{mn}^v) 互相独立, 可分别对两个函数进行编码。令:

$$\begin{aligned} H_{+1,0} &= \sum_m \sum_n \exp(j2\pi P_{mn}^\mu) \cos \pi W_{mn}^\mu, & H_{-1,0} &= \sum_m \sum_n \exp(-j2\pi P_{mn}^\mu) \cos \pi W_{mn}^\mu, \\ H_{0,+1} &= \sum_m \sum_n \exp(j2\pi P_{mn}^v) \cos \pi W_{mn}^v, & H_{0,-1} &= \sum_m \sum_n \exp(-j2\pi P_{mn}^v) \cos \pi W_{mn}^v \end{aligned}$$

有 $H_{+1,0} = H_{-1,0}^*$, $H_{0,+1} = H_{0,-1}^*$ 。这样(4)式可以写成:

$$\begin{aligned} h_{+1,0} &= F^{-1}(H_{+1,0}), & h_{-1,0} &= F^{-1}(H_{-1,0}), \\ h_{0,+1} &= F^{-1}(H_{0,+1}), & h_{0,-1} &= F^{-1}(H_{0,-1}) \end{aligned} \quad (5)$$

与(3)式相比较, 并考虑全息图的零级场 $H_{0,0}$, 则 $H(\mu, \nu)$ 可近似看成 $H_{0,0}$ 、 $H_{+1,0}$ 、 $H_{-1,0}$ 、 $H_{0,+1}$ 、 $H_{0,-1}$ 的叠加。

设 $F_x(m\delta d, n\delta d)$ 、 $F_y(m\delta d, n\delta d)$ 为需要编码的两个复值离散函数:

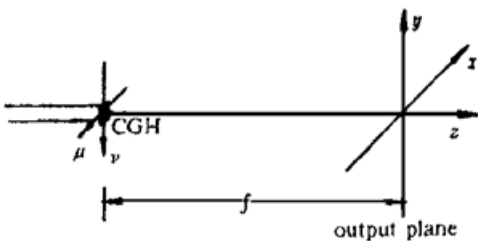
$$F_x(m\delta d, n\delta d) = \sum_m \sum_n A_{mn}^x \exp(j\Phi_{mn}^x), \quad F_y(m\delta d, n\delta d) = \sum_m \sum_n A_{mn}^y \exp(j\Phi_{mn}^y)$$

A_{mn}^x 、 A_{mn}^y 均为归一化的实数。用参量 (P_{mn}^μ, W_{mn}^μ) 对 $F_x(m\delta d, n\delta d)$ 编码, 参量 (P_{mn}^v, W_{mn}^v) 对 $F_y(m\delta d, n\delta d)$ 编码。采用以下的编码方法:

$$A_{mn}^x = \cos \pi W_{mn}^\mu, \quad \Phi_{mn}^x = 2\pi P_{mn}^\mu, \quad A_{mn}^y = \cos \pi W_{mn}^v, \quad \Phi_{mn}^y = 2\pi P_{mn}^v \quad (6)$$

有 $F_x(m\delta d, n\delta d) = H_{+1,0} = H_{-1,0}^*$, $F_y(m\delta d, n\delta d) = H_{0,+1} = H_{0,-1}^*$ 。如 $F_x(m\delta d, n\delta d)$ 、 $F_y(m\delta d, n\delta d)$ 分别为两个物归一化的离散傅里叶谱, 根据(5)式可知, 在全息图的 $(+1, 0)$ 、 $(0, +1)$ 衍射处可分别得到这两个物的像, 在 $(-1, 0)$ 、 $(0, -1)$ 衍射处分别得到它们的共轭像, 这就是双通道计算全息。

对于四通道计算全息, 由于需同时对四个物进行编码, $F_x(m\delta d, n\delta d)$ 和 $F_y(m\delta d, n\delta d)$ 不能再简单等于某个物的离散傅里叶谱, 而应是某种合成谱。设需要编码的四个物为 X_{+1} 、 X_{-1} 、 Y_{+1} 、 Y_{-1} , 它们的物函数分别为 $g_{X_{+1}}(x, y)$ 、 $g_{X_{-1}}(x, y)$ 、 $g_{Y_{+1}}(x, y)$ 、 $g_{Y_{-1}}(x, y)$, 它们的归一化的离散傅里叶谱为 $\sum_m \sum_n A_{m\hat{n}}^{X_{+1}} \exp(j\Phi_{m\hat{n}}^{X_{+1}})$ 、 $\sum_m \sum_n A_{m\hat{n}}^{X_{-1}} \exp(j\Phi_{m\hat{n}}^{X_{-1}})$ 、 $\sum_m \sum_n A_{m\hat{n}}^{Y_{+1}} \exp(j\Phi_{m\hat{n}}^{Y_{+1}})$ 、 $\sum_m \sum_n A_{m\hat{n}}^{Y_{-1}} \exp(j\Phi_{m\hat{n}}^{Y_{-1}})$ 。先考虑 $F_x(m\delta d, n\delta d)$, 把它取为 X_{+1} 的离散傅里叶谱乘上负的二次位相因子与 X_{-1} 的共轭离散傅里叶谱乘上正的二次位相因子之和:



$$\begin{aligned} F_x(m\delta d, n\delta d) &= \sum_m \sum_n \{ A_{m\hat{n}}^{X_{+1}} \exp(j\Phi_{m\hat{n}}^{X_{+1}}) \times \\ &\exp[-(j\pi/\lambda f)(m^2 + n^2)\delta d^2] + \\ &A_{m\hat{n}}^{X_{-1}} \exp(-j\Phi_{m\hat{n}}^{X_{-1}}) \exp \left[\frac{j\pi}{\lambda f} (m^2 + n^2)\delta d^2 \right] \} \end{aligned}$$

仍用(6)式对 $F_x(m\delta d, n\delta d)$ 编码。把全息图放置在图4的光路中, 用波长为 λ 的平行相干光照射。由前面的讨论知, $F_x(m\delta d, n\delta d)$ 再现像只与 $H_{+1,0}$ 和 $H_{-1,0}$ 有关。考虑 $H_{+1,0}$, 根据菲涅耳衍射, 在 $Z = f$ 处的 (x, y) 平面上, 其对应 $(+1, 0)$ 级衍射场 $h_{+1,0}$ 有:

Fig. 4 A setup for read-out four-channel self-focus CGH. Input illumination is coherent and collimated

$$\begin{aligned}
 h_{+1,0}(x, y) = & \exp \left[\frac{j\pi}{\mathcal{L}} (x^2 + y^2) \right] g_{x_{+1}}(x, y) + \\
 & \exp \left[\frac{j\pi}{\mathcal{L}} (x^2 + y^2) \right] \sum_m \sum_n A_{mn}^{x_{-1}} \exp(j\Phi_{mn}^{x_{-1}}) \times \\
 & \exp \left[\frac{j2\pi}{\mathcal{L}} (m^2 + n^2) \delta d^2 \right] \exp [j2\pi\delta d(xm + yn)]
 \end{aligned}$$

上式的第一项为 X_{+1} 的物函数乘上一位相因子, 位相因子对物的光强无影响, 得到了 X_{+1} 的像, 第二项为 X_{-1} 的散斑函数。这样在全息图的 $(+1, 0)$ 衍射级处得到了 X_{+1} 的像与 X_{-1} 的散斑, 可以加移位位相因子使像和散斑分离。由于 $H_{-1,0} = H_{+1,0}^*$, 可知在 $(-1, 0)$ 衍射处可得到 X_{-1} 像和 X_{+1} 的散斑。

对 $F_y(m\delta d, n\delta d)$ 也采用相同方法。它是 Y_{+1} 的离散傅里叶谱乘上负的二次位相因子与 Y_{-1} 的共轭离散傅里叶谱乘上正的二次位相因子之和:

$$\begin{aligned}
 F_y(m\delta d, n\delta d) = & \sum_m \sum_n \left[A_{mn}^{y_{+1}} \exp(j\Phi_{mn}^{y_{+1}}) \exp \left[\frac{j\pi}{\mathcal{L}} (m^2 + n^2) \delta d^2 \right] + \right. \\
 & \left. A_{mn}^{y_{-1}} \exp(-j\Phi_{mn}^{y_{-1}}) \exp \left[\frac{j\pi}{\mathcal{L}} (m^2 + n^2) \delta d^2 \right] \right]
 \end{aligned}$$

考虑 $H_{0,+1}$, 在 $(0, +1)$ 衍射级处可得到物 Y_{+1} 的像和 Y_{-1} 的散斑, 考虑 $H_{0,-1}$ 在 $(0, -1)$ 衍射级处有 Y_{-1} 的像和 Y_{+1} 的散斑。

综合上面的分析, 对于四通道计算全息的四个物, 把它们的离散谱乘上一个负二次位相因子后得到四个离散函数。两个一组, 对每组中的其中一个取共轭, 相加后得到合成的离散谱 $F_x(m\delta d, n\delta d)$ 和 $F_y(m\delta d, n\delta d)$ 。根据(6)式对它们进行编码, 在全息图 $(+1, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(0, +1)$ 、 $(0, -1)$ 级衍射处可分别得到四个物的像。由于加上了二次位相因子, 全息图是自成像的, 再现时无需透镜。

3 实验和讨论

实验以四个中文字“东”、“南”、“西”、“北”作为物, 每个物取样 64×64 个单元, 取样结果经离散傅里叶变换得到离散傅里叶谱。“东”与“西”为一组, 对“东”的离散傅里叶谱乘上负的二次位相因子, 对“西”的共轭离散傅里叶谱乘上正的二次位相因子, 相加后得到 $F_x(m\delta d, n\delta d)$, “南”、“北”为另一组, “南”的离散傅里叶谱乘上负的二次位相因子, “北”的共轭离散傅里叶谱乘上正的二次位相因子, 相加后得到 $F_y(m\delta d, n\delta d)$, 二次位相因子中的 f 取为 60 cm, 编码结果经绘图仪输出, 把输出缩微 50 倍后得到尺寸为 $4 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ 的全息图。图 5 是全息图的局部放大。

把全息图放置在如图 6 的光路中再现, 用 He-Ne 激光器产生的 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的平行相干光照射, 在离全息图 f 距离的输出面上可看到四个中文字的像及它们的散斑。从图 7 的结果来看, 再现像的清晰度受到了散斑的影响。实验中为了减少散斑的影响, 对物的频谱加了不同的移位位相因子, 使像偏移出散斑中心, 这使同轴方向的两个像离中心的距离不等。

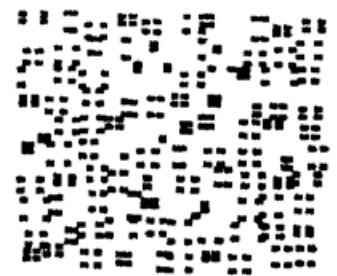


Fig. 5 A part of CGH, magnified by 80 times

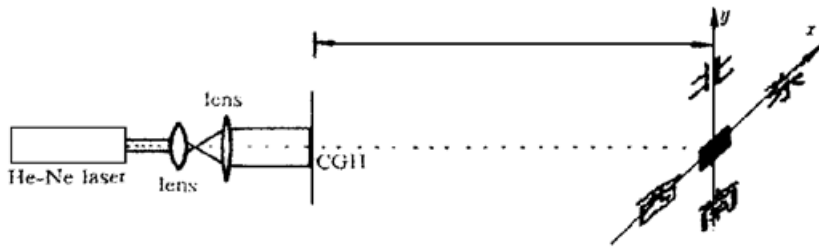


Fig. 6 The optical setup diagram in experiment. CGH is illuminated by a parallel light beam from a He-Ne laser ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$)

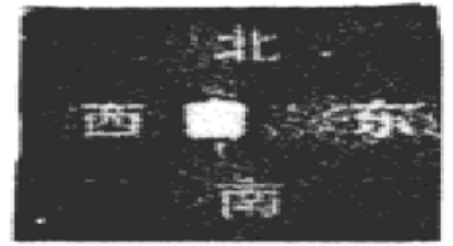


Fig. 7 Result of experiment. Images of four objects is reconstructed in four different directions

结束语 通过四通道计算全息可以在东南西北四个方向上产生四个不同的全息像。成像的位置与所加的二次位相因子中的 f 有关，在实验和分析中加在四个物的离散傅里叶谱上的四个二次位相因子中的 f 值都相同，如果取不同的 f 值，那么四个像将成在不同的平面上，即再现像可以有不同的景深。

参 考 文 献

- [1] B. R. Brown, A. W. Lohman, Complex spatial filtering with binary mask. *Appl. Opt.*, 1966, **5**(6) : 967~ 974
- [2] W. H. Lee, Binary computer generated hologram. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(21) : 3661~ 3669
- [3] D. Mendlovic, I. Kiryuschev, Two-channel computer-generated hologram and its application for optical correlation. *Opt. Commun.*, 1995, **116**(4~ 6) : 322~ 325
- [4] 虞祖良, 金国藩, 计算机制全息图, 清华大学出版社, 1984 : 22~ 44

Four-Channel Self-Image Computer Generated Hologram

Ren Chaohong Zhou Jin Gao Wenqi
 (Physics Department of NanJing University, NanJin 210093)
 (Received 19 January 1997; revised 15 April 1997)

Abstract A new type computer generated hologram (CGH) is described. On the basis of two-channel CGH, it can generate four independent images in four different directions by adding positive or negative quadratic phase factor on object spectrum, and has the character of self-focusing. The experimental result is given.

Key words four-channel self-image CGH, quadratic phase factor, discrete Fourier spectrum.