第 18 卷　第 2 期　　　　光　学　学　报　　　　Vol. 18, No. 2
1998 年 2 月　　　　ACTA OPTICA SINICA　　　　February, 1998

双模 Jaynes-Cummings 模型中原子偶极压缩与双模光场压缩间的关联

郭　红　彭金生
(华中师范大学物理系, 武汉 430079)

摘　要　通过考察双模 Jaynes-Cummings(J-C) 模型中原子偶极压缩和双模光场二阶压缩以及原子振幅平方压缩与双模光场高阶压缩随时间的演化规律, 研究了原子偶极压缩和双模光场二阶压缩之间的关系, 讨论了原子振幅平方压缩与双模光场高阶压缩之间的联系, 并探讨了原子偶极压缩与双模光场压缩之间相互转化的特征。

关键词　双模 J-C 模型,　偶极压缩,　双模光场压缩。

1　引　　言

自 1976 年 Yuen 提出光场的压缩态[1] 概念以来, 人们对压缩光进行了广泛深入的研究, 并作了多种推广[2, 3], 1987 年, Hillery 阐述了光场振幅平方压缩的概念[3], 此后他又将此概念推广到双模光场[4]。同时, 压缩态的概念已不仅仅局限于辐射场[5~9]。1981 年, Walls 等给出了原子偶极压缩的概念[5], 1988 年, Ficek 等又定义了多原子的振幅平方压缩[6]。大量的研究表明, 在单模 J-C 模型中原子偶极压缩与光场二阶压缩有密切联系[8, 9]。但是, 当两个原子分别与双模场中的一个模相互作用时, 原子偶极压缩与光场压缩间的关系怎样呢? 至今尚未进行深入探讨。随着测量技术的提高, 光场的高阶压缩已为人们所关注, 研究双模 J-C 模型中原子振幅平方压缩与双模光场高阶压缩的关系无论在理论上和实际上都是有意义的。

本文首先讨论了双模 J-C 模型中原子偶极压缩与光场二阶压缩之间的关系, 结果表明在一定的初始条件下, 原子偶极矩 s_1 分量的压缩与光场 x_2 分量的压缩以一定的时间间隔相互转化。接着研究了原子振幅平方压缩与双模光场高阶压缩之间的联系。发现初始时刻处于振幅平方压缩状态的双原子可辐射双模高阶压缩光, 同时分析了原子偶极压缩与原子振幅平方压缩以及双模光场二阶压缩和高阶压缩间的关系。

2　原子偶极压缩与光场二阶压缩之间的关联

双模 J-C 模型的哈密顿量[10] 可写为

$$H = \sum_{i=1}^{2}[\omega a_i^+ a_i + \omega_i' s_i^Z + g_i(a_i s_i^+ + a_i^+ s_i^-)], \qquad (\hbar = 1) \qquad (1)$$

收稿日期: 1996-10-19; 收到修改稿日期: 1997-06-16

式中 a_i^+、a_i 代表频率为 ω_i 的光场的产生和湮没算符，本征跃迁频率为 ω_i' 的二能级原子由赝自旋算符 $s_i^{\pm}$、s_i^Z 表征，g_i 为第 i 个原子与光场第 i 个模的耦合常数。

如果初始时刻两个二能级原子均处于激发态 $|e\rangle$ 和基态 $|g\rangle$ 的相干叠加态，

$$|\Psi_i^A(0)\rangle = \cos(\theta_i)|e\rangle_i + \sin(\theta_i)\exp(-i\Psi_i)|g\rangle_i,\quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

而光场为双模真空辐射场，即系统的初态

$$\begin{aligned}|\Psi(0)\rangle = {}& \cos\theta_1\cos\theta_2|e, e, 0, 0\rangle + \sin\theta_1\cos\theta_2\exp(-i\Psi_1)|g, e, 0, 0\rangle + \\ & \cos\theta_1\sin\theta_2\exp(-i\Psi_2)|e, g, 0, 0\rangle + \\ & \sin\theta_1\sin\theta_2\exp[-i(\Psi_1+\Psi_2)]|g, g, 0, 0\rangle\end{aligned} \tag{3}$$

那么在 t 时刻，原子–光场耦合系统的态矢在相互作用绘景中演化为

$$\begin{aligned}|\Psi^I(t)\rangle = {}& \cos\theta_1\cos\theta_2\cos g_1t\cos g_2t|e, e, 0, 0\rangle - \\ & i\cos\theta_1\cos\theta_2\sin g_1t\cos g_2t|g, e, 1, 0\rangle - \\ & i\cos\theta_1\cos\theta_2\cos g_1t\sin g_2t|e, g, 0, 1\rangle - \\ & \cos\theta_1\cos\theta_2\sin g_1t\sin g_2t|g, g, 1, 1\rangle + \\ & \sin\theta_1\cos\theta_2\exp(-i\Psi_1)\cos g_2t|g, e, 0, 0\rangle + \\ & \cos\theta_1\sin\theta_2\exp(-i\Psi_2)\cos g_1t|e, g, 0, 0\rangle - \\ & i\cos\theta_1\sin\theta_2\exp(-i\Psi_2)\sin g_1t|g, g, 1, 0\rangle - \\ & i\sin\theta_1\cos\theta_2\exp(-i\Psi_1)\sin g_2t|g, g, 0, 1\rangle + \\ & \sin\theta_1\sin\theta_2\exp[-i(\Psi_1+\Psi_2)]|g, g, 0, 0\rangle\end{aligned} \tag{4}$$

为简便起见，仅考虑共振情况，即

$$\omega_i = \omega_i',\qquad (i = 1, 2) \tag{5}$$

现从(4)式出发，首先讨论双模 J–C 模型中原子偶极压缩和双模光场的二阶压缩，进而研究两种压缩效应之间的关系。为了反映原子偶极压缩的特征，并与实际测量对应，定义两个缓变的相互正交的厄米算符：

$$s_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}[s_i^+\exp(-i\omega t) + s_i^-\exp(i\omega t)],\qquad s_2 = \frac{1}{2i}\sum_{i=1}^{2}[s_i^+\exp(-i\omega t) - s_i^-\exp(i\omega t)] \tag{6}$$

实际上，s_1 和 s_2 分别对应原子偶极矩的色散和吸收。若系统存在某个状态，使得

$$(\Delta s_i)^2 < (1/2)|\langle s_Z\rangle|,\qquad 或\qquad Q_i = (\Delta s_i)^2 - (1/2)|\langle s_Z\rangle| < 0,\qquad (i = 1\ or\ 2) \tag{7}$$

就称原子偶极矩的 s_i 分量的涨落被压缩，即原子呈现压缩效应。这里

$$s_Z = \sum_{i=1}^{2} S_i^Z \tag{8}$$

由(4)式不难得知，描述原子偶极矩 s_i 分量涨落的函数 Q_1 随时间的演化规律为

$$\left.\begin{aligned}Q_1 = {}& (1/2) - \sin^2\theta_1\cos^2\theta_1\cos^2\Psi_1\cos^2 g_1t - \sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\cos^2\Psi_2\cos^2 g_2t - \\ & (1/2)|\cos^2\theta_1\cos^2 g_1t + \cos^2\theta_2\cos^2 g_2t - 1| \\ Q_2 = {}& (1/2) - \sin^2\theta_1\cos^2\theta_1\sin^2\Psi_1\cos^2 g_1t - \sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\sin^2\Psi_2\cos^2 g_2t - \\ & (1/2)|\cos^2\theta_1\cos^2 g_1t + \cos^2\theta_2\cos^2 g_2t - 1|\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

分析(9)式，不难看出在下面 4 种情况下

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & \Psi_1 = \Psi_2 = \pi/4, & \\ \text{II} & \Psi_1 = \Psi_2 = 3\pi/4, & \\ \text{III} & \Psi_1 = \pi/4, & \Psi_2 = 3\pi/4, \\ \text{IV} & \Psi_1 = 3\pi/4, & \Psi_2 = \pi/4, \end{array}\right\} \tag{10}$$

$Q_1 = Q_2$，由海森堡测不准关系，可知，此时，原子不呈现偶极压缩效应。

当 $\Psi_1 = \Psi_2 = 0, \pi$ 时，Q_1 极小，$Q_2 \geqslant 0$；而当 $\Psi_1 = \Psi_2 = \pm\pi/2$ 时，Q_2 极小，$Q_1 \geqslant 0$，在这两种情况下原子均有可能呈现偶极压缩效应，只是不同分量的涨落被压缩，为方便起见，取

$$\Psi_1 = \Psi_2 = 0, \qquad \theta_1 = \theta_2 = \theta, \qquad g_1 = g_2 = g \tag{11}$$

此时(9)式可简化为

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 = (1/2) - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2 gt - \left|\cos^2\theta\cos^2 gt - (1/2)\right| \\ \theta_2 = (1/2) - \left|\cos^2\theta\cos^2 gt - (1/2)\right| \geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

当 $0 < \theta < \pi/4$ 时，Q_1 小于零只出现在

$$0 < gt < \arccos\left(\cos\theta\sqrt{3 - 2\cos^2\theta}\right)^{-1}$$

或 $k\pi - \arccos\left(\cos\theta\sqrt{3 - 2\cos^2\theta}\right)^{-1} < gt < k\pi + \arccos\left(\cos\theta\sqrt{3 - 2\cos^2\theta}\right)^{-1}$,

$$(k = 0, 1, 2\cdots) \tag{13}$$

的时间范围内，而当 $\pi/4 < \theta < \pi/2$ 时，

$$Q_i = \cos^2\theta\cos^2 gt\cos 2\theta \tag{14}$$

(14)式表明，原子偶极矩 s_1 分量的涨落在整个时间演化过程中，除 $t = [(2k + 1/2](\pi/g)(k = 0, 1, 2\cdots)$ 外均处于压缩状态。

综上所述，处于适当初态的双原子，在与双模真空辐射场作用时，原子偶极矩 s_1 分量的涨落可周期性地被压缩，其周期大小取决于原子-光场的耦合强度，而在每个周期内持续的时间依赖于原子的初始状态，并且压缩的程度也与原子的初态有关。

定义描述双模光场的两个缓变正交的厄米算符为

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2^{-3/2}\sum_{i=1}^{2}\left[a_i^+\exp(-i\omega t) + a_i\exp(i\omega t)\right], \\ x_2 = i2^{-3/2}\sum_{i=1}^{2}\left[a_i^+\exp(-i\omega t) - a_i\exp(i\omega t)\right], \end{array}\right\} \tag{15}$$

若存在

$$F_i = (\Delta x_i)^2 - (1/4) < 0, \qquad (i = 1\ or\ 2) \tag{16}$$

则称双模光场 x_i 分量的涨落被压缩[11]。

由(4)式可推得:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = (1/4)\{\cos^2\theta_1\sin^2 g_1t(1 - 2\sin^2\theta_1\sin^2\Psi_1) + \cos^2\theta_2\sin^2 g_2t(1 - 2\sin^2\theta_2\sin^2\Psi_2) \\ F_2 = (1/4)\{\cos^2\theta_1\sin^2 g_1t(1 - 2\sin^2\theta_1\cos^2\Psi_1) + \cos^2\theta_2\sin^2 g_2t(1 - 2\sin^2\theta_2\cos^2\Psi_2) \end{array}\right\} \tag{17}$$

由(17)式不难看出，在(10)式所表示的四种情况下 $F_1 = F_2 \geqslant 0$，即光场也不呈现压缩效应。将(11)式代入(17)式，得到

$$F_1 = \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin^2 gt \geqslant 0, \qquad F_2 = \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin^2 gt\cos 2\theta \tag{18}$$

(18)式表明，只有在 $\pi/4 < \theta < \pi/2$ 时，光场 x_2 分量的涨落方可被压缩。比较(14)式和(18)式，发现除时间因子相差 $\pi/2g$ 外，F_2 对原子初态的依赖关系以及随时间演化的规律与 Q_1 完全相同。这就是说，当 $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$，$\theta_1 = \theta_2 = \theta$，$g_1 = g_2 = g$ 时，只有在 $\pi/4 < \theta < \pi/2$ 时，

原子偶极矩s_1分量和光场x_2分量才能都呈现出周期性地压缩效应，并且两种压缩效应是以时间间隔$\pi/2g$相互转化，那么在双模J-C模型中，原子振幅平方压缩和双模光场高阶压缩之间的关系是否也是如此呢？这就是作者下面要讨论的问题。

3 双原子振幅平方压缩与双模光场高阶压缩的关联

为了研究双原子振幅平方压缩，引入两个厄米算符

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= s_1^+ s_2^+ \exp[-i(\omega_1+\omega_2)t] + s_1^- s_2^- \exp[i(\omega_1+\omega_2)t] \\ u_2 &= -i\{s_1^+ s_2^+ \exp[-i(\omega_1+\omega_2)t] - s_1^- s_2^- \exp[i(\omega_1+\omega_2)t]\} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

它们的对易关系为

$$[u_1、u_2] = 2is_z \tag{20}$$

若存在

$$p_i = (\Delta u_i)^2 - |\langle s_z\rangle| < 0, \qquad (i = 1 \text{ or } 2) \tag{21}$$

则称原子呈现振幅平方压缩效应[6]。

由(4)式可得

$$\left.\begin{aligned} p_1 = {} & (1-\cos^2\theta_1\cos^2 g_1t)(1-\cos^2\theta_2\cos^2 g_2t) + \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\cos^2 g_1t\cos^2 g_2t - \\ & 4\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\cos^2(\Psi_1+\Psi_2)\cos^2 g_1t\cos^2 g_2t - \\ & |\cos^2\theta_1\cos^2 g_1t + \cos^2\theta_2\cos^2 g_2t - 1| \\ p_2 = {} & (1-\cos^2\theta_1\cos^2 g_1t)(1-\cos^2\theta_2\cos^2 g_2t) + \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\cos^2 g_1t\cos^2 g_2t - \\ & 4\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\sin^2(\Psi_1+\Psi_2)\cos^2 g_1t\cos^2 g_2t - \\ & |\cos^2\theta_1\cos^2 g_1t + \cos^2\theta_2\cos^2 g_2t - 1| \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

当$\Psi_1+\Psi_2 = 0, \pi, 2\pi$时，$p_1$极小，$p_2 \geqslant 0$；而当$\Psi_1+\Psi_2 = \pi/2, 3\pi/2$时，$p_2$极小，$p_1 \geqslant 0$。这两种情况下原子均有可能呈现振幅平方压缩效应，为了便于比较，将(11)式代入(22)式，则

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= (1-\cos^2\theta\cos^2 gt)^2 + \cos^4\theta\cos^4 gt - 4\sin^4\theta\cos^4\theta\cos^4 gt - \\ &\quad |2\cos^2\theta\cos^2 gt - 1| \\ p_2 &= (1-\cos^2\theta\cos^2 gt)^2 + \cos^4\theta\cos^4 gt - |2\cos^2\theta\cos^2 gt - 1| \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

分析(23)式，发现只有当$\arcsin(2^{-1/4}) < \theta < \pi/2$时$p_1$才有可能小于零，此时

$$p_1 = 2\cos^4\theta\cos^4 gt(1-2\sin^4\theta) \tag{24}$$

这表明，除$t = [(2k+1)/2](\pi/g)$外，原子均处于振幅平方压缩状态。

Hillery[4]提出了多模光场高阶压缩的两种形式——和压缩与差压缩。本文仅讨论和压缩。为此，引入两个厄米算符

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (1/2)\{a_1^+ a_2^+ \exp[i(w_1+w_2)t] + a_1a_2\exp[-i(w_1+w_2)t]\} \\ v_2 &= (1/2)\{a_1^+ a_2^+ \exp[i(w_1+w_2)t] - a_1a_2\exp[-i(w_1+w_2)t]\} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

它们的对易关系为

$$[v_1, v_2] = (1/2)(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 + 1) \tag{26}$$

若存在

$$R_i = (\Delta v_i)^2 - (1/4)\langle a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 + 1\rangle < 0, \qquad (i = 1 \text{ or } 2) \tag{27}$$

则称光场呈现和压缩效应。

由(4)式，易得

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= (1/2)\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\sin^2 g_1t\sin^2 g_2t[1-2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2(\Psi_1+\Psi_2)] \\ R_2 &= (1/2)\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\sin^2 g_1t\sin^2 g_2t[1-2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2(\Psi_1+\Psi_2)] \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

为了便于分析比较, 将(11)式代入(28)式, 这样

$$R_1 = (1/2)\cos^4\theta\sin^4 gt[1-2\sin^4\theta], \qquad R_2 = (1/2)\cos^4\theta\sin^4 gt \geqslant 0. \quad (29)$$

比较(24)式与(29)式, 除相差时间因子 $\pi/2g$ 外, p_1 与 R_1 具有相同的函数形式, 这就是说, 当 $\arcsin(2^{-1/4}) < \theta < \pi/2$ 时, 由于原子与光场的相互作用, 在原子出现振幅平方压缩的时间点, 光场将推迟 $\pi/2g$ 出现双模光场高阶压缩的一种——和压缩。

将(11)式和 $t=\pi/2g$ 代入(4)式, 可得

$$\begin{aligned} |\Psi^2(\pi/2g)\rangle &= (-\cos^2\theta|1,1\rangle - i\sin\theta\cos\theta|1,0\rangle - i\sin\theta\cos\theta|0,1\rangle + \\ &\quad \sin^2\theta|0,0\rangle)\otimes|g,g\rangle \\ &= |\Psi_F(\pi/2g)\rangle\otimes|g,g\rangle \end{aligned} \quad (30)$$

这表明初始处于振幅平方压缩状态的双原子 $(\arcsin(2^{-1/4}) < \theta < \pi/2)$, 在经过 $\pi/2g$ 时间后, 将辐射双模高阶压缩光, 而此时, 两个原子均处于基态, 不再呈现振幅平方压缩效应, 可见在双模 J-C 模型中双模光场高阶压缩的获得是以牺牲原子振幅平方压缩为代价的。

在(11)式所表示的条件下, 再来看 $t=\pi/g$ 这一时间点的情况。此时

$$\begin{aligned} |\Psi_t^2(\pi/g)\rangle = |0,0\rangle\otimes(&\cos^2\theta|e,e\rangle + \sin\theta\cos\theta|g,e\rangle + \\ &\sin\theta\cos\theta|e,g\rangle + \sin^2\theta|g,g\rangle \end{aligned} \quad (31)$$

比较(30), (31)式可以看出, 在 $t=\pi/2g$ 时刻处于基态的原子, 在时间演化过程中将从 $|\Psi_F(\pi/2g)\rangle$ 描述的双模高阶压缩光中吸收光子, 在 $t=\pi/g$ 时刻演化到原子振幅平方压缩态, 换言之, 在双模 J-C 模型中, 初始处于基态的原子在与双模高阶压缩光作用后, 原子将获得振幅平方压缩。

结　论　总之, 在双模 J-C 模型中, 只有当双原子处于适当的偶极压缩态时, 原子对才能辐射出压缩光, 这就是说, 初始处在原子偶极压缩态的双原子并不一定辐射出双模二阶压缩光, 但初始处在原子振幅平方压缩状态的双原子一定辐射双模高阶压缩光, 这表明原子振幅平方压缩与光场双模高阶压缩的联系更为密切。在(10)式所描述的条件下, 不论 θ 取何值, 原子不呈现偶极压缩效应, 但只要恰当选择 θ 参数, 原子能周期性地呈现振幅平方压缩效应。而在 $\Psi_1=\Psi_2=0$, $0<\theta_1=\theta_2<\pi/4$ 时, 双原子偶极矩 s_1 分量的涨落可周期性地被压缩, 但此时原子不呈现振幅平方压缩效应。所以, 原子偶极压缩和振幅平方压缩彼此独立。由(17)式和(28)式, 不难看出, 光场的二阶压缩和高阶压缩也彼此独立。

参　考　文　献

[1] H. P. Yuen, Two-photon coherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* (*A*), 1976, **13**(6): 2226~2243

[2] C. K. Hong, L. Mandel, Generation of higher-order squeezing of quantum electromagnetic fields. *Phys. Rev.* (*A*), 1985, **32**(2): 974~982

[3] M. Hillery, Amplitude-squared squeezing of the electromognetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **36**(8): 3796~3802

[4] M. Hillery, Sum and difference squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **40**(6): 3147~3155

[5] D. F. Walls, P. Zoller, Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**(10) : 709~ 711

[6] Z. Ficek, R. Tonas, S. Kielich, Amplitude-squared squeezing in two-atom resonance fluorescence. *Opt. Commun.*, 1988, **69**(1) : 20~ 24

[7] 董传华, 原子偶极矩的高阶压缩. 物理学报, 1996, **45**(6) : 946~ 954

[8] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle *et al.*, Squeezing and superposition states. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **35**(6) : 2567~ 2577

[9] 李高翔, 彭金生, 论 Jaynes-Cummings 模型中原子偶极压缩和光场压缩间的关联. 物理学报, 1995, **44**(10) : 1671~ 1677

[10] Donita Cohen, Y. Ben-Aryeh, A. Mann, Transfer of correlations from squeezed states of radiation to atoms in a generalized Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev.* (*A*), 1994, **49**(3) : 2040~ 2048

[11] R. Loudon, P. L. Knight, Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7) : 709~ 759

The Relations of Atomic Dipole Squeezing and Two-Mode Radiation Field Squeezing in a Generalizeded Two-Mode Jaynes-Cummings Model

Guo Hong Peng Jinsheng
(*Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan* 430079)

(Received 19 October 1996; revised 16 June 1997)

Abstract By surveying the time evolution of the atomic dipole squeezing and amplitude-squared squeezing, the two-mode field second-order squeezing and higher-order squeezing in a generalizeded two-mode Jaynes-Cummings model, the relations between atomic dipole squeezing and second-order squeezing in the radiation field are studied. The relations between atomic amplitude-squared squeezing and higher-order squeezing in the radiation field are discussed. The properties of the transformation between atomic dipole squeezing and field squeezing are explored.

Key words two-mode J-C model, dipole squeezing, two-mode radiation field squeezing.