第 18 卷 第 12 期　　光 学 学 报　　Vol. 18, No. 12
1998 年 12 月　　ACTA OPTICA SINICA　　December, 1998

啁啾光脉冲在类时间透镜介质中的传播

李大义　唐永林　韩　松　陈建国
(四川大学光电系, 成都 610064)

摘　要　利用空间-时间类似和光线光学方法得到啁啾高斯光脉冲在类时间透镜介质中传播的解析解, 讨论了光脉冲宽度和啁啾参数随传播距离的演变, 并与光脉冲在克尔介质中传播的特征作了比较。

关键词　啁啾光脉冲,　传播,　类时间透镜介质。

1　引　　言

在光波动方程中, 光场随空间变量和时间变量的变化关系是对称的。因此光束近轴衍射或聚焦的空间问题, 和光脉冲在色散介质中传播的时间问题之间存在着许多相似之处[1, 2]。空间的衍射或聚焦是在真实的物理空间中发生, 研究的时间较早, 也较为成熟, 根据空间-时间类似去探索时间中的相关问题是方便易行的。文献[3]把空间成像类推到时间成像, 文献[4]将线性色散波方程变换成与近轴波方程对应的形式, 并引入时间光线、时间透镜等概念, 得到时间 $ABCD$ 矩阵; 文献[5]利用时间衍射积分讨论了这种类似。文献[6]将克尔介质近似为时域二次折射率介质, 讨论了无初始啁啾高斯脉冲在该介质中传播的情况。本文则从普遍情况出发, 讨论了两种极限情况(脉冲空间色散传播和脉冲时间色散传播)下的光脉冲传播方程, 并将文献[4]的变量代换推广, 使在二阶近似下的描述空间问题和描述时间问题的传播方程形式完全对应等价。利用这种空间-时间类似, 采用射线追迹法得到时间光线通过类时间透镜介质的 $ABCD$ 矩阵, 由 $ABCD$ 定律得到啁啾高斯脉冲在这种光波导中传播的时间特性, 并与光脉冲在克尔介质中的孤子传播的行为作了比较。

2　光脉冲传播方程

设光脉冲为

$$E = \boldsymbol{e}A(x, y, z, t)\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r} - \omega_0 t)] + c.c. \tag{1}$$

式中 $A(x, y, z, t)$ 为脉冲的时、空慢变包络函数, $\boldsymbol{e}$ 为光脉冲场的偏振方向, ω_0、$\boldsymbol{k}_0$ 是脉冲中心的频率和波矢, 取 $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$, $k = n(\omega)2\pi/\lambda$, 则脉冲包络在时、空二阶慢变近似下的传播方程为[7]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + k_1\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\mathrm{i}}{2k_0}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}k_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \mathrm{i}k_0(\delta n/n_0)A = 0 \tag{2}$$

收稿日期: 1997-12-30

式中 $k_m = (\partial^m k/\partial\omega^m)_{\omega=\omega_0}$, $m = 0, 1, 2$, $k_0 = n_0 2\pi/\lambda$。如果折射率的变化 δn 与空间、时间和光强有关(克尔介质), 则 δn 可表为 $\delta n(x, y, z) + n_2|A|^2$, n_2 为非线性折射率。(2) 式是包括色散效应、衍射效应和折射率变化对任意光脉冲传播影响的普遍形式的方程。一平滑的光脉冲传播一段距离后, 其空间和时间分布均产生畸变, 因此在一般情况下(2) 式的求解是很复杂的。不过通常所遇到的实际问题则多半是如下两种极限情况之一。

1) 脉冲的空间传播

对于包络振幅随时间的二阶变化可以忽略的长脉冲情况, 或介质的群速度色散(GVD) 很小而可以忽略不计的情况, 如果取 $\boldsymbol{e} = (0, 1, 0)$, 并令 $\tau = t - k_1 z = t - z/v_g$, 则(2) 式可简化为

$$\mathrm{i}2k_0\partial A/\partial z = -\partial^2 A/\partial x^2 - 2k_0^2[\delta n(x, z, |A|^2)/n_0]A(x, z), \tag{3}$$

(3) 式是描述光束在横向上的衍射和聚焦行为的近轴波方程, 如不考虑折射率的变化, 它也是讨论光腔的偏微分方程, 其解是熟知的厄密-高斯函数, 最低阶解是空间高斯光束:

$$A(x, z) = [A_0/\sqrt{q(z)}]\exp[\mathrm{i}k_0x^2/2q(z)]$$
$$1/q(z) = 1/R(z) + \mathrm{i}2/k_0w^2(z), \tag{4}$$

其中复参数 q 完全确定了光束的结构。对于 $\delta n \neq 0$ 的线性情况, 利用光线通过光学系统的 $ABCD$ 矩阵, 由 $ABCD$ 定律得到经空间光学系统后 q 的变换值, 从而获知高斯光束通过系统的传播情况。

2) 脉冲的时间色散传播

当光脉冲在单模光纤内传输时由于横向受到波导结构的限制, 不存在衍射效应, 或是平面波脉冲在二阶色散介质中传播时, 由于 $\nabla_\perp^2 A = 0$, (2) 式简化为

$$\partial A/\partial z + k_1\partial A/\partial t + (\mathrm{i}k_2/2)\partial^2 A/\partial t^2 - \mathrm{i}k_0[\delta n(z, t, |A|^2)/n_0]A = 0, \tag{5}$$

在线性情况下, 对(5) 式的求解, 通常采用傅里叶变换法。如果考虑非线性克尔效应的话, 则很难得到解析解。由于(3) 式和(5) 式都是抛物型方程, 可以采用变量代换, 将它们化成相同的数学形式, 例如将色散波方程变换为近轴波方程的形式[2], 或者都变换成无量纲非线性薛定谔方程标准形式, 于是物理问题变成了数学问题。但从物理意义上讲, 为了从波传播方程上反映出空间-时间类似, 从中得到启发, 并充分利用一个问题的成熟理论去研究另一问题, 将文献[5]用的变换推广为:

$$\zeta = \omega_0|k_2|z, \qquad \tau = t - k_1z, \qquad \Delta n = n_0\delta n/c\omega_0|k_2|, \tag{6}$$

则(5) 式变为:

$$-\mathrm{i}s2\omega_0\partial A/\partial\zeta = -\partial^2 A/\partial\tau^2 + s2\omega_0^2[\Delta n(\tau, \zeta, |A|^2)/n_0]A(\tau, \zeta), \tag{7}$$

式中 $s = \mathrm{sgn}(k_2)$ 是符号函数。对比(3) 式和(7) 式, 并作如下对应, $-s\omega_0 \leftrightarrow k_0$, $\zeta \leftrightarrow z$, $\tau \leftrightarrow x$, $-s\Delta n \leftrightarrow \delta n$, 则两方程完全一样, 于是(7) 式在 $\delta n = 0$ 时的最低阶解是(τ, ζ) 表象中的高斯光束

$$A(\tau, \zeta) = (A_0/\sqrt{p(\zeta)}]\exp[-\mathrm{i}s\omega_0\tau^2/2p(\zeta)], \tag{8}$$

其中的参量 p 与(4) 中的 q 对应。如果将 p 表示为:

$$1/p(\zeta) = (C - si)/\omega_0\sigma^2(\zeta), \tag{9}$$

并将(8)、(9) 两式代入(1) 式, 可以看出 $\sigma(\zeta)$ 是光脉冲强度 $1/e$ 的时间半宽, 它类似于空间高斯光束的半径 $w(z)$。可见在作了这样的变量替换后, 从描述脉冲传播的基本方程上显示出空间-时间类似。顺便提一句, (7) 式对线性情况和非线性情况均适用, 并用符号函数区别光脉

冲通过正常色散或反常色散介质的传播，还可以用类似于空间光束的术语去定义时间高斯脉冲的相应参量。例如，空间波面矢量 k_0 对应时间波面矢量 ω_0，近轴空间波面的曲率半径 R 对应时间波面曲率半径 σ^2/sC。而 $sC/\sigma^2(\zeta)$ 实质上代表脉冲啁啾的大小，C 是脉冲宽度内频率啁啾大小的参数。ω 类似空间波矢 $\boldsymbol{k}$ 沿 x 方向的变化率，可得出 $-s(\omega-\omega_0)\leftrightarrow k_{0x}$。$\zeta$ 表示脉冲中心频率 ω_0 在色散介质中传播距离 z 后的群延迟，ζ 轴的近轴光线代表了脉冲各频率成分通过 z 后的时延，τ 代表脉冲各部分相对于中心的相对时延，光线的斜率代表频率啁啾。因此光脉冲各部分传播的时间特性可用(τ, ζ) 表象空间中的近轴轨迹表示，这样可用射线追迹描述脉冲各部分传播的时间特性，将它称为时间光线就很自然了。对于 $\Delta n\neq 0$ 的情况，根据光束传播理论，可以不直接求解(5) 式，而先求出近轴时间光线通过时域光学系统的变换矩阵，再由 $ABCD$ 定律得到高斯光束复参数经该系统的变换，从而得出高斯脉冲传播的时间行为。

3　啁啾光脉冲通过类时间透镜介质的传播

如果在 (τ, ζ) 空间中的介质折射率可表示为:

$$n(\tau,\zeta)=n_0(\zeta)-N_2(\zeta)\tau^2/2, \tag{10}$$

其中 $N_2(\zeta)=-\partial^2 n(\tau,\zeta)/\partial\tau^2\big|_{\tau=0}$ 是 ζ 轴上折射率分布的负曲率。近轴光线通过这种类时间透镜介质的轨迹，由如下光线方程决定[1]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[n_0(\zeta)\frac{\mathrm{d}\tau(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right]+N_2(\zeta)\tau(\zeta)=0, \tag{11}$$

其中 τ 为光线位置，定义光线的斜率为 $\tau'(\zeta)=n_0\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\zeta$。如果 n_0 和 N_2 与 ζ 无关，则(11) 式的解为[1]:

$$\begin{bmatrix}\tau\\ \tau'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau_0\\ \tau_0'\end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中的 $ABCD$ 矩阵 M 为:

$$M=\begin{bmatrix}\cos(\gamma\zeta) & s(n_0\gamma)^{-1}\sin(\gamma\zeta)\\ -sn_0\gamma\sin(\gamma\zeta) & \cos(\gamma\zeta)\end{bmatrix},\qquad N_2>0 \tag{13}$$

式中 $\gamma=(|N_2|/n_0)^{1/2}$。由此可见，时间平方律介质本身就是一种光波导，由 $ABCD$ 定律，以复参数 p_1 表征的高斯光束通过该光学系统后变为 p_f:

$$p_f=(Ap_1+B)/(Cp_1+D), \tag{14}$$

如果 $\zeta=0$ 处的脉冲是时间宽度为 σ_0、啁啾参数为 C_0 的高斯脉冲:

$$E(t,0)=A_0\exp\left[-(1+\mathrm{i}C_0)\tau^2/2\sigma_0^2-\mathrm{i}\omega_0 t\right], \tag{15}$$

它的包络特征可用复参数 p 表示为

$$p_1=\omega_0\sigma_0^2/(C_0-\mathrm{i}), \tag{16}$$

通过类时间透镜介质传播后，输出脉冲的 p_f 参数可由(13)、(14) 和(15) 式求出。脉冲的时间宽度和啁啾参数的演化分别由 $\sigma_f^2=|\mathrm{Im}(\omega_0/p_f)|^{-1}$ 和 $C_f=\sigma_f^2\mathrm{Re}(\omega_0/p_f)$ 得到:

$$\sigma_f=\frac{\sigma_0}{\sqrt{1+C_0^2}}\left\{\left[C_0\cos\left(\frac{\pi z}{L_c}\right)+s\frac{L_c}{\pi L_d}(1+C_0^2)\sin\left(\frac{\pi z}{L_c}\right)\right]^2+\cos^2\left(\frac{\pi z}{L_c}\right)\right\}^{1/2},\quad N_2>0 \tag{17}$$

$$C_f=C_0\cos(2\pi z/L_c)+s\frac{\pi L_d}{2L_c}\left[(I+C_0^2)\left(\frac{L_c}{\pi L_d}\right)^2-1\right]\sin(2\pi z/L_c),\qquad N_2>0 \tag{18}$$

对于 $N_2<0$ 的情况，类似的推导得出:

$$\sigma_{\mathrm{f}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + C_0^2}} \left\{ \left[C_0 \cosh\left(\frac{\pi z}{L_{\mathrm{c}}}\right) + \frac{s L_{\mathrm{c}}(1 + C_0^2)}{\pi L_{\mathrm{d}}} \sinh\left(\frac{\pi z}{L_{\mathrm{c}}}\right) \right]^2 + \cosh^2\left(\frac{\pi z}{L_{\mathrm{c}}}\right) \right\}^{1/2}, \quad N_2 < 0 \tag{19}$$

$$C_{\mathrm{f}} = C_0 \cosh(2\pi z/L_{\mathrm{c}}) + s \frac{\pi L_{\mathrm{d}}}{2L_{\mathrm{c}}} \left[(I + C_0^2) \left(\frac{L_{\mathrm{c}}}{\pi L_{\mathrm{d}}}\right)^2 + 1 \right] \sinh(2\pi z/L_{\mathrm{c}}), \quad N_2 < 0 \tag{20}$$

其中 z 为几何长度，波导介质的特征长度 L_{c} 和色散长度 L_{d} 分别定义为：

$$L_{\mathrm{c}} = \pi/n_0\gamma|k_2|\omega_0, \qquad L_{\mathrm{d}} = \sigma_0^2/|k_2|, \tag{21}$$

当 $C_0 = 0$，就得到无啁啾的高斯脉冲的演化[7]。当波导作用很弱，即 $\pi z/L_{\mathrm{c}} \ll 1$ 时，(17)～(20) 式作一级近似后，回到均匀二阶色散介质中脉冲宽度和啁啾参数演化公式[5, 8]：

$$\sigma_{\mathrm{f}} = \sigma_0 [(1 + C_0 k_2 z/\sigma_0^2)^2 + (k_2 z/\sigma_0^2)^2]^{1/2} \tag{22}$$

$$C_{\mathrm{f}} = C_0 + (1 + C_0^2) k_2 z/\sigma_0^2 \tag{23}$$

(17) 和 (18) 式给出了初始啁啾参数为 C_0 和脉宽为 σ_0 的高斯脉冲在稳定的时间波导中传播时，脉冲宽度 σ_{f} 和啁啾参数 C_{f} 随传播距离 z 演化的严格解析解。由 (19) 式得出，C_{f} 在一系列位置 z_{cn} 上取极值：

$$z_{cn} = (L_c/2\pi) \arctan\{(\pi L_{\mathrm{d}}/2sC_0L_{\mathrm{c}})[(L_c/\pi L_{\mathrm{d}})^2(1 + C_0^2) - 1]\} + nL_c/4, \quad n = 0, 1, 2\cdots \tag{24}$$

若满足 $(1 + C_0^2)(L_c/\pi L_{\mathrm{d}})^2 < 1$，在 $s = -1$ 的波导介质传播过程中，C_{f} 先从 C_0 增加到最大值 $C_{\mathrm{fmax}}(z_{c0})$，然后减小到最小值 $C_{\mathrm{fmin}}(z_{c1})$；若 $(1 + C_0^2)(L_c/\pi L_{\mathrm{d}})^2 > 1$，则刚好相反，$C_{\mathrm{f}}$ 先从 C_0 减小到最小值 $C_{\mathrm{fmin}}(z_{c0})$，然后增加到最大值 $C_{\mathrm{fmax}}(z_{c1})$，此后，随传播距离而周期变化。脉冲在 $s = 1$ 的波导介质中传播时，C_{f} 的演化又与上述情况刚好相反。容易得出，当 $C_{\mathrm{f}} = 0$，即传播的时间波面成为平面的位置，刚好是脉冲宽度取极值的一系列位置 z_{sn}：

$$z_{sn} = (L_c/2\pi) \arctan\{(sC_0 2L_c/\pi L_{\mathrm{d}})/[1 - (L_c/\pi L_{\mathrm{d}})^2(1 + C_0^2)]\} + nL_{\mathrm{c}}/4, \quad n = 0, 1, 2\cdots \tag{25}$$

σ_{f} 的周期变化，也是开始过程稍有差别。由 (17) 式可以得到：对于 $sC_0 > 0$，σ_{f} 先从 σ_0 加宽到最大值 $\sigma_{\mathrm{fmax}}(z_{s0})$，然后再压缩到最小值 $\sigma_{\mathrm{fmin}}(z_{s1})$；而对于 $sC_0 < 0$，σ_{f} 则先从 σ_0 压缩到最小 $\sigma_{\mathrm{fmin}}(z_{s0})$，再加宽到最大 $\sigma_{\mathrm{fmax}}(z_{s1})$。对 $C_0 = 0$ 的情况，如 $L_{\mathrm{c}}/\pi L_{\mathrm{d}} \neq 1$，则 C_{f} 从 0 增加(或减小) 到极值 $s(\pi L_{\mathrm{d}}/L_{\mathrm{c}})[(L_c/\pi L_{\mathrm{d}})^2 - 1]$ 后再回复到 0；而 σ_{f} 由 σ_0 加宽(或压缩) 到 $\sigma_0(L_c/\pi L_{\mathrm{d}})$，再回复到 σ_0，此后，随传播都周期式演化。值得注意的一种特殊情况是，在 $C_0 = 0$ 的情况下，若能满足 $\pi L_{\mathrm{d}}/L_{\mathrm{c}} = n_0\gamma\omega_0\sigma_0^2 = 1$，则有 $C_{\mathrm{f}} = 0$，$\sigma_{\mathrm{f}} = \sigma_0$，即实现高斯脉冲形状和宽度不变地类孤波传播。对于 $N_2 < 0$ 情况，属于折射率分布在 ζ 轴上最小，由轴向外逐渐增加，根据费马原理，光线将偏向高折射率区，高斯脉冲在该系统中传播，由 (19) 和 (20) 式，其啁啾参数 $|C_{\mathrm{f}}|$ 和脉冲宽度 σ_{f} 都将一直增加，这是一种不稳定的时间波导，可以等效为一时间凹透镜。

4 讨　论

以上利用波动方程的时-空对称性，将描述光脉冲色散传播方程变换成与光束在一个横向方向衍射或聚焦的近轴波方程对应等价形式，不去直接求解 (5) 式，而是利用空间-时间类似，采用光束传播的研究方法，得到了啁啾高斯脉冲在类时间透镜介质中传播的解析解，由于平方律介质本身就是一种光波导，因此其形式与光束在渐变折射率的空间波导中传播类似，因而可使用时间光线、时间透镜、时间波导等概念形象地描述脉冲传播的时间行为。与平行光束在自由空间传播的衍射效应类似，无啁啾的光脉冲在色散介质中传播变成啁啾脉

冲, 使脉冲逐渐加宽, 可形象地看成时间波面曲率半径的大小和符号的改变。光脉冲传播形成的啁啾特性由介质群速率色散的符号和时间折射率分布决定。使光脉冲形状和宽度稳定不变地传播的关键, 在于采用某些措施抵消这种啁啾, 如让光脉冲在具有正 k_2 光纤和负 k_2 光纤交替拼接的系统中传播; 使用时间透镜以集总的方式消除因长距离传播而累积的啁啾量等等方法。本文所考虑的介质特征, 是设想的以分布式时间透镜的方式去平衡因传播产生的啁啾, 如能处处恰好平衡, 并用无啁啾高斯脉冲注入, 就可实现高斯型脉冲的类孤波传播。由于脉冲在时间波导中传播的方程仍是线性的, 需要通过严格地选择脉冲和介质参数, 才能实现高斯型脉冲形状和宽度不变地类孤波传播, 这种特殊传播状态不是通过自作用的调整过程形成的, 因而与孤子传播有差别。文献[7]的研究表明, 在一定的条件下, 可以将克尔介质近似为时间二次折射律介质, 这就是以上所考虑的稳定时间波导传播情况。由(6)式和(7)式得出, 在由脉冲自作用形成的时间波导中, 轴上折射率为 $N_0 = n_0(1 - n_2|A_0|^2/k_2c\omega_0)$, 叠加的折射率变化为 $N_2 = (n_2/2c\omega_0k_2)\tau^2\partial^2|A_0|^2/\partial\tau^2$, 对于 $n_2 > 0$ 介质, 要求 $N_2 > 0$, 仅当 $(1/k_2)\partial^2|A_0|^2/\partial\tau^2 > 0$, 才就能形成稳定的时间波导。于是, 对 $\partial^2|A_0|^2/\partial\tau^2 < 0$ 的亮脉冲, 只能在 $k_2 < 0$ 的负色散介质中稳定传播。在 $k_2 > 0$ 的区域, 只有 $\partial^2|A_0|^2/\partial\tau^2 > 0$ 的暗脉冲才能形成稳定传播。当 $(1/k_2)\partial^2|A_0|^2/\partial\tau^2 < 0$, 则属于不稳定的时间波导。这些结果也在一定程度上反映了孤子的形成和传播特征。

参 考 文 献

[1] A. E. Siegman, Laser. (Univ. Sci. Book,) California: Mill Valley, 1986

[2] S. A. Akhmanov, R. V. Khokhlov, A. P. Sukhlov, Self-focusing, self-defocusingand self-modulation of laser beams. *Laser Handbook*, edited by F. T. Arecchi and F. O. Schulz-Dubois, Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1972

[3] B. H. Kolner, M. Nazarathy, Temporal imaging with a time lens. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(12) : 630~632

[4] S. P. Dijaili, A. D. Dienes, J. S. Smith, ABCD Matrices for dispersive pulse propagation. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, **QE-26**(6) : 1158~1164

[5] 张筑虹, 范滇元, 光学系统的时间衍射积分及其应用. 光学学报, 1992, **12**(2) : 179~182

[6] 王中阳, 张正泉, 徐至展, 脉冲在时域二次折射率介质中的传播. 光学学报, 1997, **17**(7) : 937~940

[7] A. C. Newell, J. V. Mononey, *Nonlinear Optics*. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1992

[8] G. A. Agrawal, *Nonlinea Fiber Optics*, 2nd ed. San Diego, CA: Academic Press, Inc. 1995

Analytical Description of Chirped Pulses Propagated Inside Temporal Guiding Media

Li Dayi Tang Yongling Han Song Chen Jianguo

(*Optoelectronics Department, Sichuan University, Chengdu* 610064)

(Received 30 December 1997)

Abstract Using the similarity between the time and space and adopting the ray trace method, the analytical solutions to the equation of the propagation of chirped pulses inside the temporal lenslike media have been deduced. With the aid of the solutions, the periodic variation features of the chirped pulses traveling inside the temporal lenslike media have been specified, especially evolution of the pulse width and chirp parameter with the propagation distance analyzed. Also, comparisons have been made between the soliton-like waves traveling inside the temporal lenslike media and the solitons propagating inside the Kerr-media.

Key words chirped pulse, propagation, temporal lenslike media.