第18卷 第12期 光 学 学 报 Vol. 18, No. 12
1998年12月 ACTA OPTICA SINICA December, 1998

与 q 形变玻色算符逆算符相关的相干态及其量子统计性质*

奚定平[1)] 韦联福[1), 2)] 李雄军[1)]

1), 深圳大学理学院物理系, 深圳 518060
2), 西南交通大学现代物理研究所, 成都 610031

摘 要 讨论了 q 形变玻色算符的广义逆算符作用于 q-相干态所得到的两类量子态的数学及量子统计性质。结果表明, q-相干态的光子激发态不存在压缩但呈现反聚束效应, 而 q-相干态的光子湮灭态却存在压缩但不呈现反聚束效应。

关键词 q 形变玻色算符的广义逆算符, q-相干态的光子激发(湮灭)态, q-反聚束效应, q-压缩特性。

1 引 言

众所周知, 构成海森伯(Heisenberg)代数的玻色算符 a 及 a^+ 在群论和物理学的各分支领域, 如量子力学、量子光学及凝聚态理论等中都有重要的应用。光场的许多典型量子态实际上都是玻色算符及其某种组合形式的本征态: Fock 态 $|n\rangle$ 是光子数算符的本征态; 相干态 $|z\rangle$ 是玻色湮灭算符 a 的本征态; 而压缩真空态则是双光子湮灭算符 $(a^+)^{-1}a$ 的本征态, 这里 $(a^+)^{-1}$ 是最先由狄拉克(Dirac)提出并在最近由范洪义给出严格表述的玻色产生算符 a^+ 的广义逆算符[1]。近年来, 在量子群理论及其可能的物理应用的研究中, 构成 q 类似海森伯代数

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \tag{1}$$

$$[N_q, a_q] = -a_q, \qquad [N_q, a_q^+] = a_q^+, \tag{2}$$

的 q 形变玻色算符 a_q 及 a_q^+ 也起着非常重要的作用。这里 $N_q = [a_q^+ a_q]$, 符号 $[x]$ 的定义为 $[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, q 为形变参数。一方面, 利用 q 形变玻色算符的某种组合形式容易得到典型量子代数如 $SU_q(1, 1)$ 和 $SU_q(2)$ 等的玻色实现; 另一方面, 作为 q 类似海森伯代数的一种最直接物理实现的 q-振子已被用于唯象地描述核物理及量子光学中的某些非线性效应[2, 3], 因而构造典型量子态的 q 类似形式并研究它们的量子特性一直是这几年来人们所关注的研究课题。1989 年 Biedenharn 首先构造了 q-相干态[4], Gray 等人利用 q-微积分的性质证明了 Glauber 相干态的这种 q 类似形式也是完备的[5]; 文献[6] 引进了 q 类似奇偶相干态, 并证明了它们的量子统计性质与通常奇偶相干态的量子统计性质直接地相对应, 即对于有限

* 国家自然科学基金和深圳市科委基金资助项目。
收稿日期: 1998-04-07; 收到修改稿日期: 1998-07-27

的 q 值, q-奇相干态存在反聚束效应但不呈现压缩, 而 q-偶相干态却总存在压缩但不呈现反聚束效应。朱从旭等[7] 更是通过细致的数值计算, 全面地揭示了 q-偶奇相干态量子统计性质对不同 q 参数取值的依赖性。本文将讨论文献[8] 中所引进的 q 形变玻色算符的广义逆算符作用于 q-相干态所得到的两类量子态的数学及量子统计性质, 文献[9] 中的结果将作为形变 $q \to 1$ 时的特殊情形包含于本文的相应结论之中。

2　q 形变玻色算符的广义逆算符及其相关相干态的数学性质

利用 q-Fock 空间基矢 $\{|n\rangle_q,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 的正交归一完备性和关系式

$$a_q|n\rangle_q=\sqrt{[n]}|n-1\rangle_q,\qquad a_q^+|n\rangle_q=\sqrt{[n+1]}|n+1\rangle_q,\tag{3}$$

容易写出 q 形变玻色算符 a_q 和 a_q^+ 的矩阵表示, 显然每个对角元的元素必定都为零, 因此 a_q 和 a_q^+ 都不存在严格意义上的逆算符, 然而类似于文献[1] 中的做法, 可以通过如下的方式引入 q 形变玻色算符 a_q 和 a_q^+ 的广义逆算符[8]:

$$a_q^{-1}|n\rangle_q=\frac{1}{\sqrt{[n+1]}}|n+1\rangle_q,\qquad (a_q^+)^{-1}|n\rangle_q=(1-\delta_{n,0})\frac{1}{\sqrt{[n]}}|n-1\rangle_q,\tag{4}$$

a_q^{-1} 作用于数态的结果是产生一个粒子, 而$(a_q^+)^{-1}$ 作用于数态则湮灭一个粒子。显然 a_q 只有右逆而无左逆, 即

$$a_qa_q^{-1}=I,\qquad a_q^{-1}a_q=I-|0\rangle_{qq}\langle 0|\neq I;\tag{5}$$

但 $(a_q^+)^{-1}$ 却只有左逆而无右逆, 即

$$(a_q^+)^{-1}a_q^+=I,\qquad a_q^+(a_q^+)^{-1}=I-|0\rangle_{qq}\langle 0|\neq I\tag{6}$$

这里 $|0\rangle_q$ 是 q-真空态: $a_q|0\rangle_q=0$。值得指出的是, 尽管 q-相干态 $|z\rangle_q$ 是 q 形变玻色湮灭算符 a_q 的本征态[4],

$$a_q|z\rangle_q=z|z\rangle_q,\qquad |z\rangle_q=N(z)\sum_{n=0}\frac{z^n}{\sqrt{[n]!}}|n\rangle_q.\tag{7}$$

其中 $N(z)=\left(\sum_{n=0}\frac{(|z|^2)^n}{[n]!}\right)^{-1/2}$, q-阶乘$[n]!=[n][n-1]\cdots[2][1]$。但 $|z\rangle_q$ 却不是 a_q^{-1} 本征态, 即 $a_q^{-1}|z\rangle_q\neq z|z\rangle_q$。事实上, a_q^{-1} 作用于 $|z\rangle_q$ 将得到完全不同于 q-相干态 $|z\rangle_q$ 的新量子态:

$$|z,+1\rangle_q=A_1a_q^{-1}|z\rangle_q=A_1z^{-1}\{|z\rangle_q-N(z)|0\rangle_q\},\tag{8}$$

它可称为 q-相干态 $|z\rangle_q$ 的单光子激发态。其中 A 为归一化系数 $|A_1|^2=|z|^{-2}/[1-N^2(z)]$。$a_q^{-1}$ 重复 $k(k=1,2,\cdots)$ 次作用于 $|z\rangle_q$ 则得 q-相干态 $|z\rangle_q$ 的 k 光子激发态:

$$|z,+k\rangle_q=A_ka_q^{-k}|z\rangle_q=A_kz^{-k}\{|z\rangle_q-N(z)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{z^i}{\sqrt{[i]!}}|i\rangle_q\}\tag{9}$$

由恒等式 $a_q^ka_q^{-k}=I$ 可以证明 $|z,+k\rangle_q$ 实际上是算符 $A=a_q^{-k}a_q^{k+1}$ 的本征态, 即

$$a_q^{-k}a_a^{k+1}|z,+k\rangle_q=z|z,+k\rangle_q\tag{10}$$

(9) 式表明, 数态集 $\{|i\rangle_q,\ i=0,1,2,\cdots,k-1\}$ 并不包含于态 $|z,+k\rangle_q$ 中, 但它们却都是算符 $a_q^{-k}a_q^{k+1}$ 的本征值为零的本征态; 所以尽管 $|z,+k\rangle_q$ 本身不是完备的, 但它和数态集 $\{|i\rangle_q,\ i=0,1,2,\cdots,k-1\}$ 一起则可以组成一个完备的集合。即算符 $a_q^{-k}a_q^{k+1}$ 的所有本征态可以进行如下的单元分解:

$$\frac{1}{2\pi}\int A_k^{-2}|z,+k\rangle_{qq}\langle z,+k|(a_q^{+k}a_q^k)^{-1}\mathrm{d}\mu(z)+\sum_{i=0}^{k-1}|i\rangle_{qq}\langle i|=I\tag{11}$$

其中 $d\mu(z) = \exp_q(|z|^2)\exp_q(-|z|^2)\, d_q|z|^2 d\theta$, 对 $d\theta$ 的积分是通常积分, 而对 $d_q|z|^2$ 的积分则是 q-积分[5]。

由于 q 形变玻色产生算符的广义逆算符 $(a_q^+)^{-1}$ 相当于一个湮灭算符, 故 $(a_q^+)^{-k}$ 作用于 q-相干态的结果是在 $|z\rangle_q$ 中湮灭掉 k 个光子, 即

$$|z, -k\rangle_q = B_k(a_q^+)^{-k}|z\rangle_q = B_k N(z) z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \sqrt{[n]!}}{[n+k]!}|n\rangle_q, \tag{12}$$

称为 q-减光子相干态, 其中 B_k 为归一化系数。它实际上是算符 $B = (a_q^+)^{-k} a_q (a_q^+)^k$ 的本征值为 z 的本征态

$$B|z, -k\rangle_q = z|z, -k\rangle_q, \tag{13}$$

与 $|z, +k\rangle_q$ 需和数态集 $\{|i\rangle_q, i = 0, 1, 2, \cdots, k-1\}$ 一起才能可以组成一个完备集合的特性不同, $|z, -k\rangle_q$ 本身即可组成一个完全集, 其完备性关系为

$$\frac{1}{2\pi}\int B_k^{-2}|z, -k\rangle_{qq}\langle z, -k| a_q^k (a_q^+)^k d\mu(z) = I. \tag{14}$$

可见, q 形变玻色算符的广义逆算符 $(a_q^+)^{-1}$ 和 $(a_q)^{-1}$ 分别作用于 q-相干态 $|a\rangle_q$ 上所得到的两种量子态的数学性质是完全不同的。

3 q-相干态的光子激发(湮灭)态的量子统计性质

与通常量子光场类似, 可以通过讨论 q 变形量子光场的 q-压缩特性和 q-反聚束效应来研究 q 变形量子光场态的非经典特性。为此, 先通过如下的方式定义 q 变形量子光场的两个正交位相的振幅算符[6]

$$x_1 = (a_q + a_q^+)/2, \qquad x_2 = i(a_q^+ - a_q)/2, \tag{15}$$

容易验证它们满足对易关系 $[x_1, x_2] = \frac{i}{2}[a_q, a_q^+]$, 所以如果

$$v_j(q, |z|^2) = \langle(\Delta x_j)^2\rangle - \frac{1}{4^q}\langle[a_q, a_q^+]\rangle_q < 0, \qquad j = 1, 2 \tag{16}$$

则称 q 变形光场的 $x_j (j = 1, 2)$ 分量的涨落被压缩[6]。引入记号

$$X(q, z) = {}_q\langle(\Delta a_q)^2\rangle_q + {}_q\langle(\Delta a_q^+)^2\rangle_q,$$
$$Y(q, z) = 2({}_q\langle a_q\rangle_q\, {}_q\langle a_q^+\rangle_q - {}_q\langle a_q^+ a_q\rangle_q)$$

则产生 q-压缩的条件是

$$\zeta = X(q, z) - Y(q, z) < 0. \tag{17}$$

同理, 若某态下二阶 q-相关函数[10]

$$g_q^{(2)}(0) = {}_q\langle(a_q^+)^2(a_q)^2\rangle_q / ({}_q\langle a_q^+ a_q\rangle_q)^2 < 1, \tag{18}$$

则称该态下的光场呈现 q-反聚束效应。

当 q 变形光场处于 q-相干态时, 由

$${}_q\langle z|a_q|z\rangle_q = z, \qquad {}_q\langle z|a_q^+|z\rangle_q = z^*,$$
$${}_q\langle z|a_q^+ a_q|z\rangle_q = |z|^2, \qquad {}_q\langle z|(a_q^+)^2 a_q^2|z\rangle_q = |z|^4$$

可知态 $|z\rangle_q$ 的二阶 q-相关函数 $g_q^{(2)}(0) \equiv 1$, 故 q-相干态不存在 q-反聚束效应。同样地, 还可以证明 $|z\rangle_q$ 也不存在 q-压缩效应。

为简便起见, 下面考察 q-相干态的单光子激发(湮灭)态的量子统计性质, 分别计算算符 a_q、a_q^2、a_q^+、$(a_q^+)^2$、$a_q^+ a_q$、$(a_q^+)^2 a_q^2$ 在态 $|z, +1\rangle_q$ 及 $|z, -1\rangle_q$ 中的期望值得

$$
\begin{aligned}
&{}_q\langle z,+1|a_q|z,+1\rangle_q = z, && {}_q\langle z,+1|a_q^+|z,+1\rangle_q = z^*,\\
&{}_q\langle z,+1|a_q^+a_q|z,+1\rangle_q = \frac{|z|^2}{1-N^2(z)}; && {}_q\langle z,+1|a_q^2|z,+1\rangle_q = z^2,\\
&{}_q\langle z,+1|(a_q^+)^2|z,+1\rangle_q = (z^*)^2, && {}_q\langle z,+1|(a_q^+)^2a_q^2|z,+1\rangle_q = \frac{|z|^4}{1-N^2(z)};\\
&{}_q\langle z,-1|a_q|z,-1\rangle_q = (z^*)^{-1}P/Q, && {}_q\langle z,-1|a_q^+|z,-1\rangle_q = z^{-1}P/Q,\\
&{}_q\langle z,-1|a_q^+a_q|z,-1\rangle_q = R/Q, && {}_q\langle z,-1|a_q^2|z,-1\rangle_q = (z^*)^{-2}S/Q,\\
&{}_q\langle z,-1|(a_q^+)^2|z,-1\rangle_q = z^{-2}S/Q, && {}_q\langle z,-1|(a_q^+)^2a_q^2|z,-1\rangle_q = G/Q,
\end{aligned}
$$

式中

$$
Q=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{[n]![n]},\qquad S=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{[n-1]|z|^{2n}}{[n]!},\qquad R=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[n-1]|z|^{2n}}{[n]![n]}
$$

$$
P=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{[n]!},\qquad G=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{[n]^2[n-3]!}.
$$

因而在态 $|z,+1\rangle_q$ 下,

$$
\begin{aligned}
&X_{+1}(q,z)=0,\\
&Y_{+1}(q,z)=-\frac{2|z|^2N^2(z)}{1-N^2(z)}<0,\\
&g_{q,+1}^{(2)}(0)=1-N^2(z)<1.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

这说明 q-相干态的单光子激发态不存在 q-压缩, 但呈现 q-反聚束效应。可验证这一结论对 q-相干态的多光子激发态 $|z,+k\rangle_q$ 同样成立。当形变 $q\to1$ 时, 将过渡到文献[9]中的结果。

对 q-相干态的单光子湮灭态 $|z,-1\rangle_q$, 有

$$
\begin{aligned}
&X_{-1}(q,z)=2\,\mathrm{Re}\{z^{-2}(S/Q-P^2/Q^2)\},\\
&Y_{-1}(q,z)=2\{|z|^{-2}P^2/Q^2-R/Q\},\\
&g_{q,-1}^{(2)}(0)=GQ/R^2.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

对应于形变实参数 q 的不同取值, 图 1 给出了变数 z 的幅角为零, 不同 q-情况下 ζ 随 $|z|^2$ 的变化特性, 图 2 则给出了二阶 q-相关函数 $g_{q,-1}^{(2)}$ 随 $|z|^2$ 的变化规律。由图可见 q-相干态的单光子湮灭态不呈 q-反聚束效应, 但却存在 q-压缩。

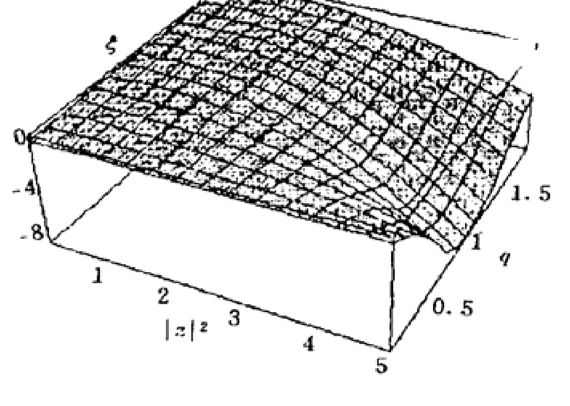

Fig. 1 Squeezing parameter ζ of $|z,-1\rangle_q$ as the function of $|z|^2$ and q. It is seen that state $|z,-1\rangle_q$ shows squeezing effect as $\zeta<0$

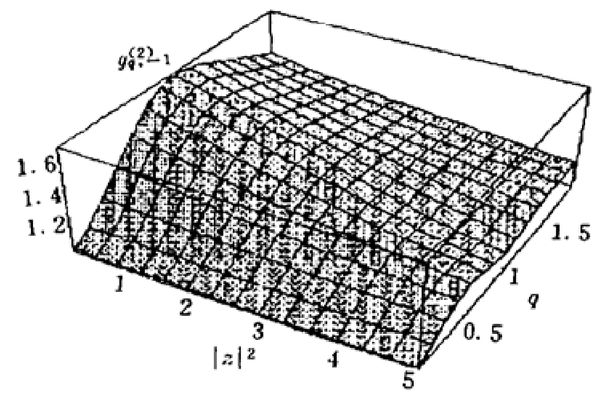

Fig. 2 Second-order correlation function $g_{q,-1}^{(2)}$ of $|z,-1\rangle_q$ as the function of $|z|^2$ and q. It is seen that state $|z,-1\rangle_q$ does not shows antibunching effect as $g_{q,-1}^{(2)}\geqslant1$

参 考 文 献

[1] Fan Hongyi, Inverse operators in Fock space studied via a coherent-state approach. *Phys. Rev.* (*A*), 1993, **47**(5) : 4521~ 4523

[2] M. Chaichian, D. Ellnias, P. Kulish, Quantum algebra as the dynamical symmtry of the deformed Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(8) : 980~ 983

[3] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, Generalized deformed oscillator for the pairing correlations in a single-j shell. *Phys. Lett.* (*B*), 1992, **278**(1) : 1~ 5

[4] L. C. Biedenharn, The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators. *J. Phys.* (*A*), 1989, **22**(17) : L873~ 878

[5] R. W. Gray, C. A. Nelson, On the completeness relation of the q-harmonic coherent states by q-integration. *J. Phys.* (*A*), 1990, **23**(6) : L954~ 950

[6] 匡乐满, 王发伯, 曾高坚, 偶奇相干态的 q-类比. 光学学报, 1993, **13**(11) : 1008~ 1011

[7] 朱从旭, 王发伯, 匡乐满, 关于奇偶 q 相干态的非经典特性. 物理学报, 1994, **43**(8) : 1262~ 1267

[8] 韦联福, 王顺金, 揭泉林, q 类似玻色算符的逆算符及其应用. 高能物理与核物理, 1997, **21**(11) : 1031~ 1034

[9] 韦联福, 王顺金, 揭泉林, 相干态的激发态及其非经典特性. 科学通报, 1997, **42**(16) : 1724~ 1726

[10] 王继锁, 王传奎, q-玻色湮没算符高次幂的本征态及其性质. 光学学报, 1994, **14**(10) : 1043~ 1048

Quantum Statistics Properties of Coherent States Associated with the q-Analogue Boson Inverse Operataors

Xi Dingping[1)] Wei Lianfu[1), 2)] Li Xiongjun[1)]

1), *Department of Physics, Shenzhen University, Shenzhen* 518060

2), *Institute of Modem Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031

(Received 15 April 1998; revised 27 July 1998)

Abstract The mathematical and Quantum properties of two kinds of quantum states generated by repeated application of the q-analogue boson inverse operators on the q-coherent state are discussed. It is shown that the excited states of q-coherent state show antibunching effect but no squeezing. However for the photon-depleted states of q-coherent state there is squeezing but no antibunching for all finite q-values.

Key words q-analogue boson inverse operators, the excited (depleted) states of q-coherent state, q-antibunching effect, q-squeezing effect.