

基于相位展开的三维流场干涉层析术

姚 卫 贺安之

(南京理工大学应用物理系, 南京 210094)

摘 要 提出用傅里叶变换进行干涉图相位展开(Phase Unwrapping) 的办法直接恢复变形波面, 从而可以提取轴向任意截面上的投影数据, 实现真正意义上的三维层析。模拟温度场实验证明基于相位展开的投影数据提取方法能够更好地完成层析计算。

关键词 相位展开, 光学层析, 流场。

自 1981 年 Takeda 提出基于一维傅里叶变换法的条纹分析的拓扑形貌术^[1]以来, 1983 年 Macy 提出了二维傅里叶变换分析干涉条纹在全息轮廓术中的应用, 相位展开技术已应用于全息、拓扑等采样干涉图较简单或定量要求不高的场合。但在流场定量三维层析中, 相位展开方法的巨大潜力尚有待开发。本文力图在这一领域作一些有益的尝试。

流场的光学干涉层析术(OCT)可分为三个步骤: 采样、投影数据提取和计算重建。在投影数据提取方面, 目前多采用条纹跟踪方法, 即将干涉图经过适当的图像预处理, 如滤波、灰度变换、增强等提高信噪比, 然后对图像作信息消减, 即二值化、细化、骨架抽取得到干涉图的单像素线条状的几何特征线, 通过选取某一细化后的条纹, 跟踪位移量 $m(x, y_0, z)$, 如图 1 所示, 则可转化为光线经流场层析面产生的光程差 $\Phi(x, y_0, z)$ 。将光程差代入干涉方程:

$$\Phi(x, y_0, z) = \int_0^l \Delta n(x', y_0', z) dz, \quad (1)$$

并写成 Radon 变换的形式(如图 2 所示):

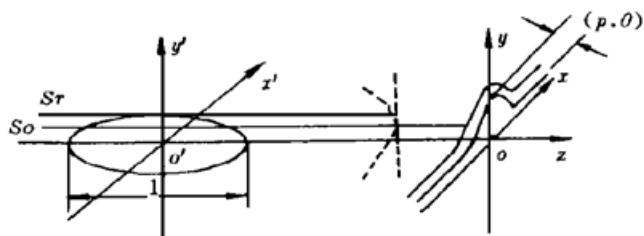


Fig. 1 Scheme of interferometric tomography



Fig. 2 Diagram for illustrating Radon transform

$$\Phi(p, \theta) = \iint \Delta n(r, \psi) \delta[p - r \sin(\psi - \theta)] dx_0 dz \quad (2)$$

反演此方程, 求出 $\Delta n(x_0, y_0, z)$, 即高度为 y_0 截面上的折射率分布。可见, 准确提取投影数

据对于整个层析重建过程是至关重要的一步。

条纹跟踪方法提取投影数据存在许多问题。首先，对于干涉图的预处理及二值化、骨架抽取等过程中，不可避免地丢失了大量有用的信息。可以想象，灰度呈现余弦分布的条纹，削减成单像素曲线后，误差范围有可能达到近一个条纹宽度，还可能出现条纹断裂、分歧、跟踪数据不准确，给以后的计算引入不能允许的损害。其次，更直观的是，条纹跟踪不能得到连续的各个轴向截面上的投影数据，相邻两层的高度差大于等于一个条纹宽。这样事实上并不能实现真正意义上的三维层析，而只能重建某些特定层面上的场分布。条纹跟踪是对干涉图的一种基于几何形状的理解。实际上，干涉图更表现为一种连续的灰度的余弦分布^[2]：

$$I(r) = A(r) \{1 + V(r) \cos [2\pi f_0 r - \mathcal{Q}(r)]\} \tag{3}$$

$A(r)$ 为背景光强， $V(r)$ 为条纹的可见度， f_0 为参考频率， $\mathcal{Q}(r)$ 为两相干光束的相位差。按照此模型，由灰度分布经过相位展开求出 $\mathcal{Q}(r)$ ，参考光为平面波时， $\mathcal{Q}(r)$ 表示波面的形状，从而可求出流场任意高度截面引起的光程差 $\Phi(r) = \mathcal{Q}(r) \lambda / 2\pi$ ，实现真正意义上的三维重建。

1 原 理

1.1 二维傅里叶变换法的相位展开

从灰度分布求出相位分布，通常有相位步进或称相移法和傅里叶变换方法^[1~5]。对瞬态流场，一般在一个方向上只能得到单幅干涉图，而相位步进法则必须有三幅以上且已知某些相位信息的干涉图，故采用傅里叶变换方法求相应于流场干涉图的“包裹”在 $-\pi \sim \pi$ 之间的相位图。在流场的定量测试中，采样的干涉图多为有限宽参考条纹。(1)式可以写成：

$$I(x, y) = A(x, y) + C(x, y) \exp [2\pi i(f_{0x}x + f_{0y}y)] + C^*(x, y) \exp [-2\pi i(f_{0x}x + f_{0y}y)] \tag{4}$$

$$C(x, y) = \{[A(x, y)V(x, y)] \exp [i\mathcal{Q}(x, y)]\} / 2 \tag{5}$$

作二维傅里叶变换：

$$I(f_x, f_y) = A(0, 0) + C(f_x - f_{0x}, f_y - f_{0y}) + C^*(f_x - f_{0x}, f_y - f_{0y}) \tag{6}$$

式中 f_{0x} 、 f_{0y} 为 f_0 的两个分量。如图 3 所示，在频率面 f_x 或 f_y 上确定 +1 级频谱的位置和宽度。用滤波函数 $H(f_x - f_{0x}, f_y - f_{0y})$ 取出 $C(f_x - f_{0x}, f_y - f_{0y})$ ，并平移到频率面原点，得 $C'(f_x, f_y)$ 。平移 +1 级频谱的过程即去除了参考频率 f_0 。下一步对 $C'(f_x, f_y)$ 作傅里叶反变换，得到(5)式。很容易求出：

$$\mathcal{Q}(x, y) = \arctan \{ \text{Im}[C(x, y)] / \text{Re}[C(x, y)] \} \tag{7}$$

如上所述，求出的 $\mathcal{Q}(x, y)$ 被“包裹”在 $-\pi \sim \pi$ 之间，如图 4 所示。它是真实波面相位 $\mathcal{Q}_0(x, y)$ 的 2π 的模。第三步的工作是沿 x, y 两个方向对 $\mathcal{Q}(x, y)$ 积分，即在“包裹”的相位图上对

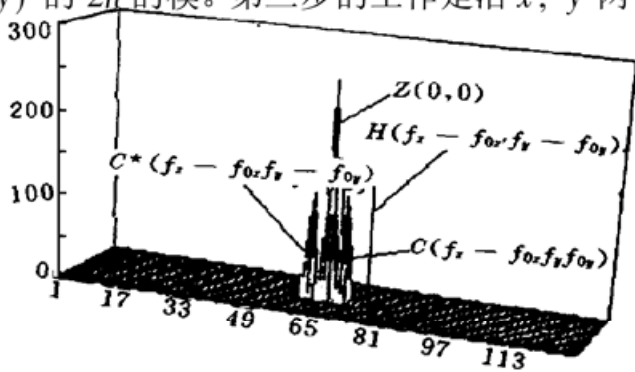


Fig. 3 Spectra of a typical interferogram

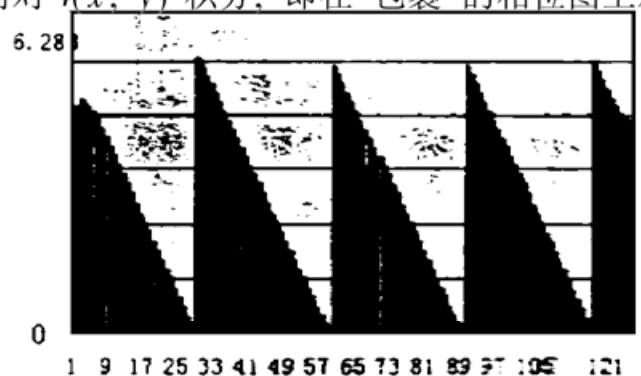


Fig. 4 Wrapped phase in $[0, 2\pi]$

发生 $2\pi \rightarrow 0$ 相位跃变处后的各点的相位增加 2π 和对发生 $0 \rightarrow 2\pi$ 相位跃变处后的各点的相位减少 2π 。对图 4 的积分即得如图 5 的相位分布。可见，二维积分后的 $\Phi(x, y)$ 真实地反映了变形波面的形状。这一过程称为相位去包裹或相位展开。

1.2 投影数据提取和三维重建

有了经流场后变形的波面的形状，可以很容易地提取任意截面的投影数据 $\Phi(p, \theta)$ ，计算光程差 $\Phi(p, \theta) = \Phi(p, \theta)\lambda/2\pi$ ，代入重建公式：

$$\Delta n(r, \psi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi / \partial p}{\sin(\psi - \theta) - p} dp \tag{8}$$

重建此截面上的场分布。

2 实验和结果

图 6(a) 是模拟轴对称温度场的干涉条纹强度分布。它的生成函数为：

$$g(x, y) = 127.5 + 127.5 \times \cos \left\{ \left[x + \frac{x_{\max}}{2} \exp \frac{-(y - y_{\max}/3)^2}{y_{\max}/6} \right] \frac{2\pi}{x_{\max}/4} \right\} \tag{9}$$

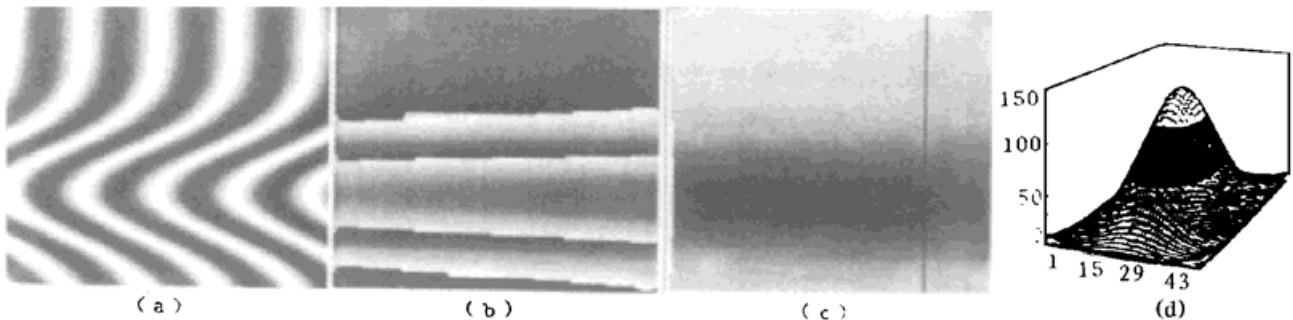


Fig. 6 A computer generated temperature field and its reconstruction results. (a) Computer generated interferogram, (b) Wrapped phase map of wave-front imaging as interferogram (a), (c) Unwrapped phase map, (d) Temperature distribution on a certain cross-section

其中， x_{\max} 、 y_{\max} 分别表示 x 和 y 坐标的最大值。 x 方向的余弦条纹为参考条纹， y 方向上的正态分布反映了轴对称温度场的影响。模拟干涉图为 128×128 像素。可见，条纹位移量服从上述正态分布，最大位移量为两个条纹宽。设激光波长为 $0.6328 \mu\text{m}$ ，由(8)式可解 $\Delta n(x, y)$ 。再设场的直径为 2 cm ，环境温度为 10°C ，则由 G-D 公式及气体状态方程导出的^[6]：

$$\Delta n = KMP/R(1/T - 1/T_0) \tag{10}$$

可求出场的温度分布。式中 K 为 G-D(Gladstone-Dale) 常数， M 为气体分子量， P 为气体压强， R 为气体常数， T 、 T_0 分别为环境温度和场温度。理论计算的峰值温度为 145°C 。

按照本文所提出的相位展开的投影数据提取方法对图 6(a) 进行模拟对称温度场的三维重建，图 6(b) 给出了变形波面的“被包裹”在 $-\pi \sim \pi$ 之间的相位图；图 6(c) 是经过相位展开后的相位图，其灰度表示了波面的形状，黑线指出选择重建截面的位置距离左边界 1.7 cm ；图 6(d) 给出对此截面温度场的重建结果，与理论计算符合得很好。由于相位展开提取投影数据的过程中自然地进行了频域滤波，所以这种方法有天然的抗噪声的能力。对于光场照度不

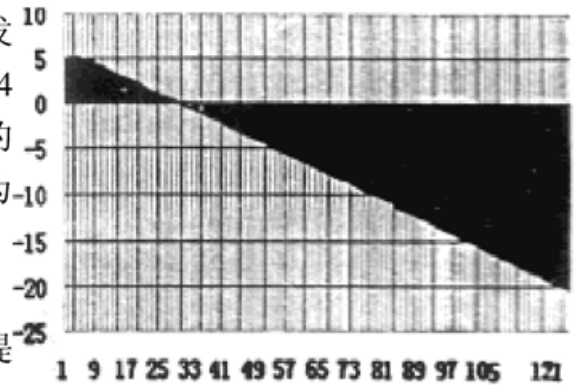


Fig. 5 Integral of Fig. 4 to be real phase value

均或其他相对缓变的噪声, 在空间频域内基本上集中在零频分量附近, 即如图 3 中 $z(0, 0)$ 的领域内, 而高频或散斑噪声则分布在频域离中心较远的高频区, 频域滤波准确取出 + 1 级频率分量的同时自然地进行了去噪声处理。图 7(a) 是对图 6(a) 卷积随机噪声的结果:

$$g'(x, y) = \text{rand} \odot g(x, y) \tag{11}$$

rand 是计算机产生的 0.2~ 1.0 之间的随机数。图 7(b) 给出变形波面的“被包裹”在 $-\pi \sim \pi$ 之间的相位图; 图 7(c) 是经过相位展开后的相位图, 由于噪声和积分路径的影响, 图像质量有一定程度的下降, 黑线指出选择同图 6 的距离左边界 1.7 cm 为要重建的截面位置; 图 7(d) 给出对此截面温度场的重建结果, 基本与理论计算相符。

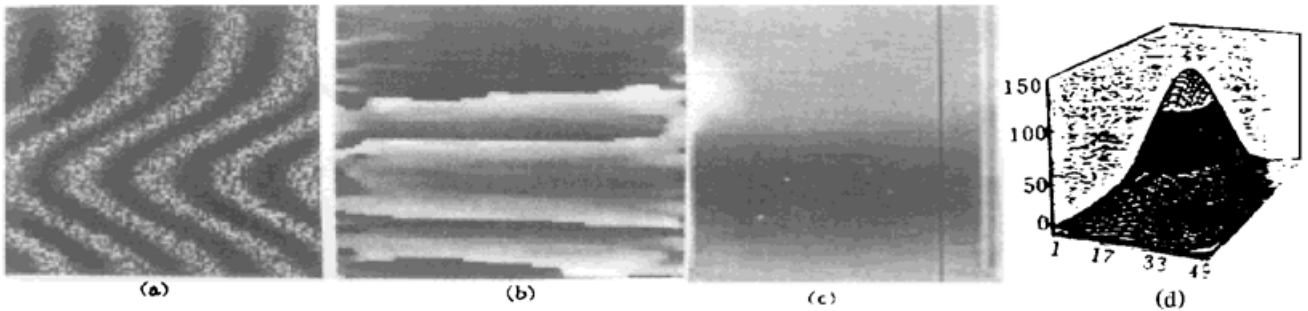


Fig. 7 Noise-immune capability of FTM phase unwrapping and successive field reconstruction

为与经典的条纹跟踪方法对比, 作者对图 6(a) 与图 7(a) 分别用条纹跟踪提取投影数据, 然后按轴对称温度场进行重建。图 8(a) 是对理想无噪声的图 6(a) 二值化、骨架抽取后的条纹图; 图 8(b) 是重建的同样高度的温度场分布, 与相位展开法所得的结果一致。但显然, 条纹

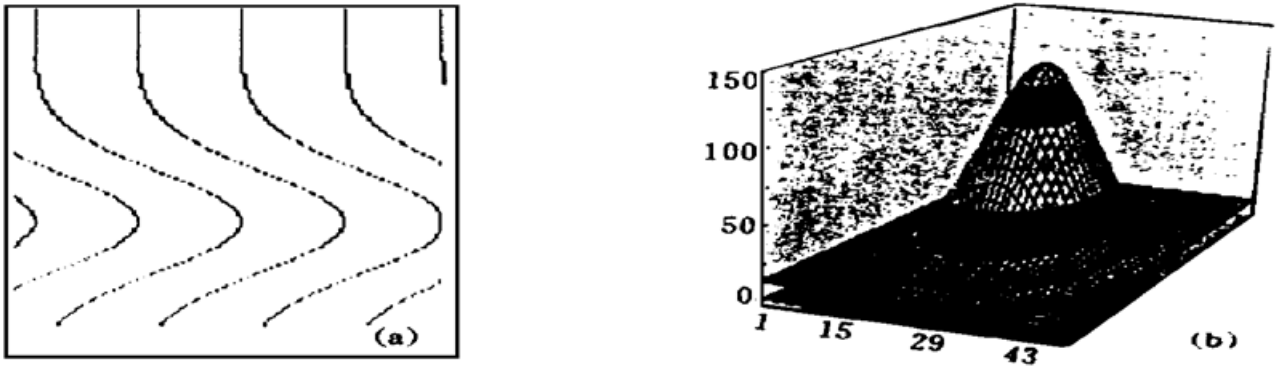


Fig. 8 (a) The skeletonized fringes of interferogram Fig. 6 (a), (b) The reconstructed distribution from one of the fringes. The result is well conformed with that in Fig. 7 (d)

跟踪法最多只能重建出四个截面的场分布。对于噪声严重的图像, 条纹跟踪的方法就非常依赖于图像预处理, 常规的预处理如中值滤波、灰度变换、对数变换等等, 对于图 7(a) 往往都不能得到好的效果, 使得细化后的条纹断裂或分歧, 如图 9 所示, 条纹跟踪无法进行, 重建失败。

图 10(a) 是实际拍摄的电烙铁单峰温度场的干涉图, 存在大量噪声。图 10(b) 是由干涉图进行相位展开获得的温度场二维投影, 即变形波前, 图 10(c) 给出按轴对称重建的温度分布(高 2.28 cm 处), 环境温度 24℃, 峰值温度 74.7℃, 与热电偶实测结果 78℃ 基本相符。

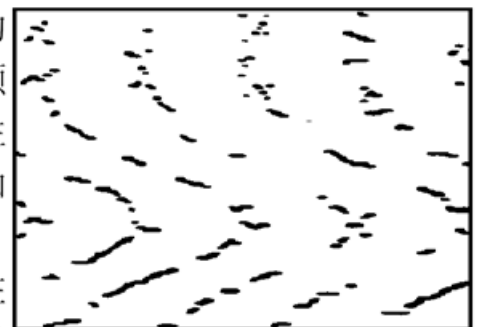


Fig. 9 Skeleton result by morphological methods for a noisy interferogram

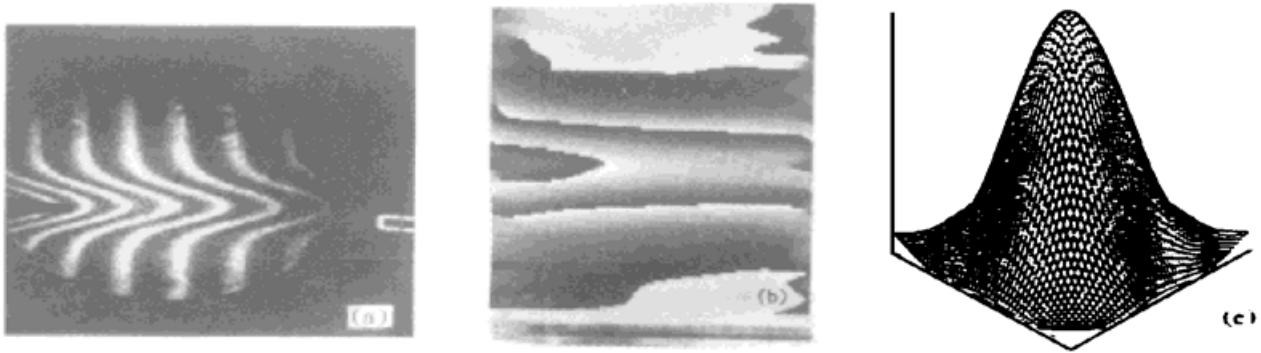


Fig. 10 (a) A practical interferogram of a temperature field, (b) Wrapped phase map of field-caused deformed wave-front, (c) Reconstructed distribution on 2.28 cm cross section

结 论 理论分析和模拟实验的结果都表明, 本文提出的用傅里叶变换相位展开法提取投影数据, 对于流场层析计算有着独特的连续和高精度的优点, 非常有利于三维重建计算。如何更好地选择频域滤波函数, 选择最佳相位展开的积分路径, 而使得提取的二维投影数据精度更高, 是值得深入探讨的问题。这些方面的研究和有关结果, 将另文详述。

参 考 文 献

- [1] M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi, Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based tomography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1) : 156~ 160
- [2] Claude Roddier, Francois Roddier, Interferogram analysis using Fourier transform techniques. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(9) : 1668~ 1673
- [3] Thomas Kreis, Digital holographic interference-phase measurement using the Fourier-transform method. *J. Opt. Soc. Am.*, 1986, **3**(6) : 847~ 855
- [4] Donald J. Bone, Fourier fringe analysis: The two-dimensional phase unwrapping problem. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(25) : 3627~ 3632
- [5] T. R. Judge, P. J. Bryanston-Cross, A review of phase unwrapping techniques in fringe analysis. *Opt. & Laser Engng.*, 1994, **21**(3) : 199~ 239
- [6] 贺安之, 闫大鹏, 激光瞬态干涉度量学. 北京: 机械工业出版社, 1992.

Three-Dimensional Flow Field Tomography Based on Phase Unwrapping

Yao Wei He Anzhi

(Department of Applied Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210014)

(Received 23 July 1997; revised 24 November 1997)

Abstract A method of direct retrieval of deformed wavefront by phase unwrapping using 2-D Fourier-transform is presented. The projection data of any axial cross-section can be extracted to implement 3-D tomography in full meaning. A simulated temperature field experiment proved that the projection data extraction method based on the phase unwrapping succeeded in facilitating computation of tomography.

Key words phase unwrapping, optical tomography, flow field.