

微小孔衍射——近场光学理论

郭继华¹⁾ 郭 峰²⁾ 朱兆明¹⁾

1), 清华大学现代应用物理系, 北京 100084
2), 北京大学物理系, 北京 100871

摘 要 推导了圆孔衍射公式, 该公式不受孔径大小和到屏距离的限制, 可以作为近场光学的理论。它满足麦克斯韦方程标量形式和基尔霍夫边界条件, 包括传播波和衰减波。数值计算表明, 此结果优于用 Bethe 模型所得到的近场理论的结果。

关键词 衍射, 近场光学, 衰减波。

1 引 言

近场光学在生物、单分子探测及计算机存储等领域得到了广泛重视, 这是由于超衍射极限分辨率可以用近场光学的方法得到。近场光学的理论研究也受到重视, 发表了相当多论文^[1, 2]。这些论文大都使用 Bethe 模型: 认为屏是一个无限薄的理想导体和屏前无物。光的衍射理论也可在这个基础上进行简化, 但基尔霍夫积公式还是无能为力的。这是由于用了子波源的概念, 而此概念不可能给出衰减波的存在, 近场光学的理论必须包括衰减波。

本文放弃了子波源的概念, 引入光只能以本征态形式传播的概念。在此基础上解标量麦克斯韦方程和基尔霍夫边界条件, 在单色平面波正入射的条件下得到了简单衍射场分布公式, 这个公式不受孔径大小和到屏距离的限制, 特别适于处理近场光学问题。

2 基本概念

在处理圆孔衍射问题时, 很难用麦克斯韦方程的矢量形式, 索末菲的严格衍射理论只能处理非常简单的情况, 所以本文从标量方程出发,

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0 \quad (1)$$

基尔霍夫边界条件

$$\psi = \begin{cases} \psi_i & \text{孔上} \\ 0 & \text{屏上} \end{cases} \quad (2)$$

仍然被采用。子波的概念被放弃, 认为光只能以本征态的形式传播。过去只在闭腔强调本征态, 现在在自由空间也强调本征态。具体的方法是求解满足方程(1)的本征函数, 这些本征函数构成一个完备正交集。用这些本征函数的线性叠加表示 ψ , 使其满足边界条件(2)式。即

$$\psi = \sum C_n \psi_n \quad (3)$$

式中 ψ_n 是自由空间的本征函数, C_n 称为耦合系数。且在 $z = 0$ 处满足边界条件(2)式。

3 圆孔衍射

为了简单, 设

$$\psi_i = \exp[-i(\omega t - k_0 z)] \quad (4)$$

没有这个假设耦合系数 C_n 只能用积分的形式表示。对圆孔衍射选用柱坐标, 由于孔和入射场都不是 φ 的函数, 在标量场情况衍射场也不是 φ 的函数, 令

$$\psi = R(\rho) Z(z) \quad (5)$$

用分离变量法可以求出 $R(\rho)$ 和 $Z(z)$

$$R(\rho) = J_0(x_n^0 \rho / r_0), \quad Z(z) = \exp(ik_z z), \quad (x_n^0 / r_0)^2 + k_z^2 = k_0^2 \quad (6)$$

推导(6)式时用了 $R(\rho = 0)$ 有限和 $R(\rho = r_0) = 0$ 的条件, 因而必须过渡到 $r_0 \rightarrow \infty$ 。 x_n^0 为零阶贝塞尔函数 $J_0(x)$ 的第 n 个正零点。可以证明 $J_0(x_n^0 \rho / r_0)$ 是正交的, 要使其完备 x_n^0 / r_0 和 k_z^2 的取值范围为

$$0 < x_n^0 / r_0 < \infty, \quad -\infty < k_z^2 < k_0^2 \quad (7)$$

k_z^2 小于零所对应的本征态是衰减波。衰减波的引入是合理的, 因为它是方程(1)的解; 同时也是必要的, 因为只有引入衰减波才能构成完备集, 才能使本征态的线性叠加满足边界条件(2)式。将 $R_n(\rho)$ 归一化,

$$R_n(\rho) = [\sqrt{2}/r_0 J_1(x_n^0)] J_0(x_n^0 \rho / r_0) \quad (8)$$

$R_n(\rho)$ 即(3)式中 ψ_n 的径向部分。令衍射场 $\psi = \psi' \exp(ik_z z) \exp(-i\omega t)$

$$\psi' = \sum_n \{ \int_0^{\rho_0} R_n(\rho) \rho d\rho \} R_n(\rho) \quad (9)$$

式中 ψ_i 为入射场, 取 $z = 0, t = 0$ 时 $\psi_i = 1$ 。 $\int_0^{\rho_0} R_n(\rho) \rho d\rho$ 即为(3)式中的 C_n 。于是得

$$\psi = \sum_n \left[\frac{\sqrt{2}}{r_0 J_1(x_n^0)} \right]^2 \left\{ \int_0^{\rho_0} J_0\left(\frac{x_n^0}{r_0} \rho\right) \rho d\rho \right\} J_0\left(\frac{x_n^0}{r_0} \rho\right) \quad (10)$$

又因为 $\int_0^{\rho_0} J_0\left(\frac{x_n^0}{r_0} \rho\right) \rho d\rho = J_1\left(\frac{x_n^0}{r_0} \rho_0\right) \rho_0 r_0 / x_n^0$, 当 $x_n^0 \rightarrow \infty$ 时,

$$x_n^0 = n\pi - \pi/4, \quad J_1(x_n^0) = (-1)^n \sqrt{2/\pi x_n^0} \quad (11)$$

当 $r_0 \rightarrow \infty$ 时, 用 $x_n^0 \rightarrow \infty$ 代替是合理的, 故

$$\psi = \sum_n \frac{\pi \rho_0}{r_0} J_1\left(\frac{x_n^0}{r_0} \rho_0\right) J_0\left(\frac{x_n^0}{r_0} \rho\right) \quad (12)$$

将求和改为积分, 令 $x_n^0 / r_0 = k_\rho$, 则 $dn = (r_0 / \pi) dk_\rho$ 。这样就得到衍射场

$$\psi = \int_0^{k_0} \rho_0 J_1(k_\rho \rho_0) J_0(k_\rho \rho) \exp(ik_z z) \exp(-i\omega t) dk_\rho + \int_{k_0}^{\infty} \rho_0 J_1(k_\rho \rho_0) J_0(k_\rho \rho) \exp(-az) \exp(-i\omega t) dk_\rho$$

$$= \psi_p + \psi_e \tag{13}$$

式中 $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$, $k_\rho \leq k_0$; $a = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$, $k_\rho > k_0$

ψ_p 表示传播波, 这一项可以从基尔霍夫衍射理论得到, ψ_e 表示衰减波, 基尔霍夫衍射理论不含这一项。

4 数值计算

(13) 式并没有对 ρ_0 、 ρ 和 z 作任何限制, 为了检验具体使用情况如何, 下面给出一些数值计算结果。

4.1 一般情况

取 $\rho_0 = 4\lambda$, $z = 100\lambda$, 计算光强 $I = \psi \cdot \psi^*$ 随 ρ 变化。结果如图1所示。从参数的选取看这仍应属于菲涅耳衍射, 但又接近夫琅和费衍射, 结果也如此。第一个暗环的位置及第二个极大值和第一个极大值的比都同由基尔霍夫积分得到的夫琅和费衍射公式的结果差别很小。图没有归一化, 因为实际数值本身就有意义。

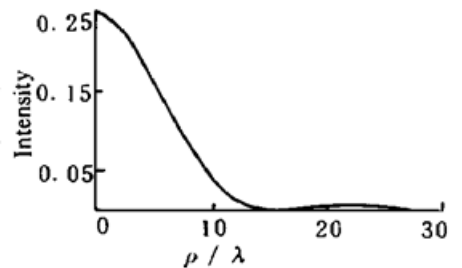


Fig. 1 Light intensity $I(\rho, z)$ at a distance $z = 100\lambda$ from the screen. The radius of the aperture is $\rho_0 = 4\lambda$

4.2 微小孔衍射

直接将(13)式用来计算微小孔衍射处理近场光学问题, 并与 Bethe 模型的结果进行比较。

首先计算了 $\rho_0 = 0.02\lambda$, 轴上光强随到屏距离的变化: $I(\rho = 0, z)$, 结果如图 2 所示。

同样将结果分成三区: 靠近屏区, 近场区和远场区。在靠近屏区 I 基本不变, 由于

$$\psi(\rho = 0, z = 0) = \int_0^\infty J_1(x) dx = 1 \tag{14}$$

所以在靠近屏区衍射理论给出的结果是完全正确的, 而 Bethe 模型在这个区不能给出正确结果。在近场区光强 I 是指数衰减, 这一结果与 Bethe 模型一致, 在远场区两结果不一致, 目前还不能确定哪一个更合理(因为受计算机限制, 在 $z \gg \lambda$ 时, 计算是相当粗糙的)。Hosaka 等人的实验^[3]支持这一结果而不支持 Bethe 模型的结果。

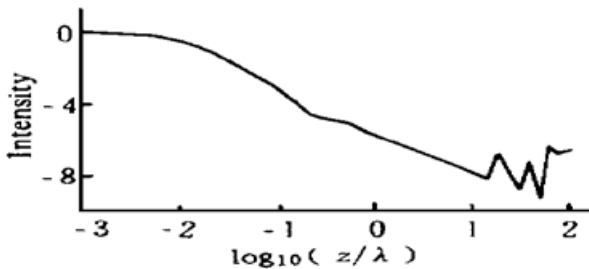


Fig. 2 Light intensity along the axis $I(\rho = 0, z)$ vs. the distance (z) from the screen. The radius of the aperture is $\rho_0 = 0.02\lambda$

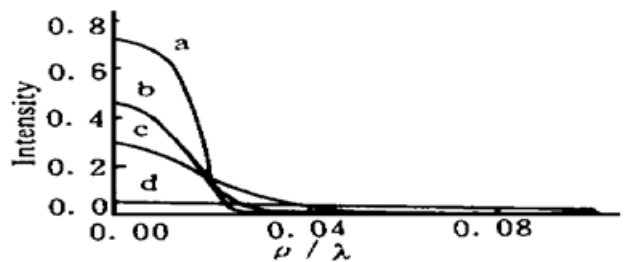


Fig. 3 Light intensity at different distance from the screen $I(\rho, z = z_0)$: a: $I(\rho, z = 0.003\lambda)$; b: $1.5 \times I(\rho, z = 0.01\lambda)$; c: $10 \times I(\rho, z = 0.03\lambda)$; d: $100 \times I(\rho, z = 0.1\lambda)$. The radius of the aperture is $\rho_0 = 0.02\lambda$

本文也计算了不同 z 处光强随 ρ 的变化。结果如图 3 所示。为了画在同一图上, 对一些结果进行了线性放大。这些结果与 Bethe 模型的结果基本一致。

5 讨论和结论

在处理过程中忽视无限薄理想导体屏的假设是多余的。实际是将这一方法用于有限厚理想导体屏就会发现: 只有在上面的假设下, 基尔霍夫边界条件(2)式才成立。本文不宜将此问题展开。

在处理光的衍射问题时, 标量场理论看来是一个很好的近似, 即使在比波长小的范围内。

近场光学的理论并不一定要借助于 Bethe 模型, 它并不比衍射理论好, 特别是此模型在靠近屏区完全不能描述光场。

参 考 文 献

- [1] Yehuda Leviatan, Study on near-zone fields of a small aperture. *J. Appl. Phys.*, 1986, **60**(5) : 1577 ~ 1583
- [2] U. Dürig, D. W. Pohl, F. Rohner, Near-field optical-scanning microscopy. *J. Appl. Phys.*, 1986, **59**(10) : 3318~ 3327

Diffraction of a Small Aperture — Near-Field Optics Theory

Guo Jihua¹⁾ Guo Feng²⁾ Zhu Zhaoming¹⁾

[1), *Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084*
 2), *Department of Physics, Peking University, Beijing 100871*]

(Received 2 October 1996; revised 15 December 1997)

Abstract A general diffraction formula for circular apertures is derived. This formula is not limited by the aperture radius and the distance from the screen and can be used as a theory of near-field optics. It satisfies the Maxwell's scalar equations and Kirchhoff's boundary conditions and includes propagating waves and evanescent waves. The numerical calculation shows that the results are better than those which are based on the Bethe model.

Key words diffraction, near-field optics, evanescent waves.