

# 椭圆芯手征光纤的基模特性研究\*

董建峰

(宁波大学物理系, 宁波 315211)

**摘 要** 对椭圆芯手征光纤进行了严格的求解, 得到了模式场的解析解; 推出了模式特征方程; 并对基模的偶模和奇模特征方程进行数值求解; 研究了手征参数对不同椭圆比下基模的色散曲线、双折射、模间色散等特性的影响。

**关键词** 椭圆芯手征光纤, 手征参数, 模式特征方程, 色散曲线, 模间色散。

由于在微波、毫米波和集成光学等领域有广阔的应用前景, 近十年来, 人们对新型的由手征介质材料构成的手征波导进行了广泛而深入的研究<sup>[1~7]</sup>。对手征光纤的理论研究表明, 手征参数可极大地改变手征光纤中导模的色散特性<sup>[5]</sup>, 对截止频率<sup>[6]</sup>、光功率<sup>[7]</sup>等也有很大的影响, 手征光纤在光纤传感技术、光纤通信、新型光波导耦合器件等许多领域有潜在的应用。本文对椭圆芯手征光纤进行了严格的求解, 得到了模式场的解析解, 推出了模式特征方程。当椭圆趋于圆时, 都退化到圆芯手征光纤情形<sup>[7]</sup>, 当手征参数等于零时, 都退化成椭圆光波导情形<sup>[8]</sup>。对基模的偶模和奇模特征方程进行数值求解, 研究了手征参数对不同椭圆比下基模的色散曲线、双折射、模间色散等特性的影响。

## 1 椭圆芯手征光纤中的模式场解

对各向同性的无损耗的互易手征介质, 时谐场变化  $\exp(j\omega t)$ , 本构关系可写成<sup>[2]</sup>:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0(\epsilon_r \mathbf{E} - j\chi Z_0 \mathbf{H}) \\ \mathbf{B} = \mu_0(\mu_r \mathbf{H} + j\chi Y_0 \mathbf{E}) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  为真空的本征阻抗,  $\chi$  为手征参数。由麦克斯韦方程及上述本构关系, 可以导出  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  满足的方程:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + 2k_0 \chi \nabla \times \mathbf{E} + k_0^2(n^2 - \chi^2) \mathbf{E} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + 2k_0 \chi \nabla \times \mathbf{H} + k_0^2(n^2 - \chi^2) \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ 。令

$$\mathbf{F}_{\pm} = [\mathbf{E} \pm (-j\eta \mathbf{H})]/2 \quad (3)$$

其中,  $\eta = \sqrt{\mu_r \mu_0 / \epsilon_r \epsilon_0}$ , 则由(2)式、(3)式可以得到

\* 浙江省宁波市青年科学基金资助项目。

收稿日期: 1997-08-03; 收到修改稿日期: 1997-11-06

$$\nabla^2 \mathbf{F}_{\pm} + k_0^2(n \pm \chi)^2 \mathbf{F}_{\pm} = 0 \quad (4)$$

在柱形坐标系统中, 设沿  $z$  轴传播的电磁波形式为  $\exp(-j\beta z)$ , 其中  $\beta$  是传播常数。令

$$\mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{F}_{\pm t} + z \hat{\mathbf{F}}_{\pm z} \quad (5)$$

则由(4)式、(5)式可推出  $\mathbf{F}$  的纵向分量  $F_{\pm z}$  满足的方程和横向分量  $\mathbf{F}_{\pm t}$  与纵向分量  $F_{\pm z}$  之间的关系分别为

$$\nabla_t^2 F_{\pm z} + h_{\pm}^2 F_{\pm z} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_{\pm t} = (1/h_{\pm}^2) [-j\beta \nabla_t F_{\pm z} \mp (h_{\pm}^2 + \beta^2)^{1/2} z \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t F_{\pm z}] \quad (7)$$

其中,  $h_{\pm}^2 = k_0^2(n \pm \chi)^2 - \beta^2$ 。

对椭圆芯是由各向同性的无损耗的互易手征介质组成的阶跃型椭圆手征光纤, 设椭圆芯中的手征参数为  $\chi$ , 纤芯和包层的相对介电常数、相对磁导率分别为  $\epsilon_{r1}$ 、 $\mu_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$ 、 $\mu_{r2}$ , 纤芯半长轴和半短轴分别为  $a$  和  $b$ 。采用椭圆柱坐标  $(\xi, \eta, z)$ , 在纤芯中 ( $0 \leq \xi \leq \xi_0$ ,  $\xi_0 = \ln \sqrt{(a+b)/(a-b)}$  代表纤芯椭圆边界), 对(6)式进行类似于椭圆光波导<sup>[8, 9]</sup>的求解,  $F_{\pm z}$  可写成(省略因子  $\exp[j(\omega t - \beta z)]$ ):

$$\begin{cases} F_{+z} = A_m [M C_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1+}^2) c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1+}^2) - j M S_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1+}^2) s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1+}^2)] \\ F_{-z} = B_m [M C_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1-}^2) c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1-}^2) - j M S_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1-}^2) s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1-}^2)] \end{cases} \quad (8)$$

则由(3)式可得纤芯中电磁场的纵向分量:

$$\begin{cases} E_{1z} = A_m M C_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1+}^2) c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1+}^2) + B_m M C_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1-}^2) c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1-}^2) - \\ \quad j [A_m M S_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1+}^2) s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1+}^2) + B_m M S_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1-}^2) s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1-}^2)] \\ H_{1z} = (j/\eta_1) \{ A_m M C_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1+}^2) c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1+}^2) - B_m M C_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1-}^2) c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1-}^2) - \\ \quad j [A_m M S_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1+}^2) s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1+}^2) - B_m M S_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1-}^2) s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1-}^2)] \} \end{cases} \quad (9)$$

(8)、(9)两式中,  $A_m$ 、 $B_m$  为待定常数,  $M C_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1\pm}^2)$ ,  $M S_m^{(1)}(\xi, \mathcal{Y}_{1\pm}^2)$  为第一类变型马修(Mathieu)函数,  $c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1\pm}^2)$ ,  $s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1\pm}^2)$  为马修周期函数<sup>[10]</sup>。 $\mathcal{Y}_{1\pm}^2 = q^2 h_{1\pm}^2/4$ ,  $h_{1\pm}^2 = k_0^2(n_1 \pm \chi)^2 - \beta^2$ ,  $q = \sqrt{a^2 - b^2}$ 。

可以证明, 当椭圆趋于圆时, (9)式与圆芯手征光纤的模式场解一致, 而当手征参数等于零时, 取(9)式的实部或虚部, 则分别得到椭圆光波导的奇模或偶模。

纤芯中电磁场横向分量可由(7)式和(3)式推出为:

$$\begin{cases} E_{1\eta} = (1/\sqrt{g} h_{1+}^2) [-j\beta(\partial F_{+z}/\partial \eta) - (h_{1+}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{+z}/\partial \xi)] + \\ \quad (1/\sqrt{g} h_{1-}^2) [-j\beta(\partial F_{-z}/\partial \eta) + (h_{1-}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{-z}/\partial \xi)] \\ H_{1\eta} = (j/\eta_1) \{ (1/\sqrt{g} h_{1+}^2) [-j\beta(\partial F_{+z}/\partial \eta) - (h_{1+}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{+z}/\partial \xi)] - \\ \quad (1/\sqrt{g} h_{1-}^2) [-j\beta(\partial F_{-z}/\partial \eta) + (h_{1-}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{-z}/\partial \xi)] \} \\ E_{1\xi} = (1/\sqrt{g} h_{1+}^2) [-j\beta(\partial F_{+z}/\partial \xi) + (h_{1+}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{+z}/\partial \eta)] - \\ \quad (1/\sqrt{g} h_{1-}^2) [j\beta(\partial F_{-z}/\partial \xi) + (h_{1-}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{-z}/\partial \eta)] \\ H_{1\xi} = (j/\eta_1) \{ (1/\sqrt{g} h_{1+}^2) [-j\beta(\partial F_{+z}/\partial \xi) + (h_{1+}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{+z}/\partial \eta)] + \\ \quad (1/\sqrt{g} h_{1-}^2) [j\beta(\partial F_{-z}/\partial \xi) + (h_{1-}^2 + \beta^2)^{1/2}(\partial F_{-z}/\partial \eta)] \} \end{cases} \quad (10)$$

其中  $g = q^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)$ 。

在包层中 ( $\xi_0 \leq \xi < \infty$ ), 为非手征介质, 电磁场纵向分量可写成<sup>[8]</sup>:

$$\begin{cases} E_{2z} = C_m [M c_m^{(3)}(\xi, -\mathcal{Y}_2^2) c e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2) - j M s_m^{(3)}(\xi, -\mathcal{Y}_2^2) s e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2)] \\ H_{2z} = (j/\eta_2) D_m [M c_m^{(3)}(\xi, -\mathcal{Y}_2^2) c e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2) - j M s_m^{(3)}(\xi, -\mathcal{Y}_2^2) s e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2)] \end{cases} \quad (12)$$

式中  $C_m, D_m$  为待定常数,  $M c_m^{(3)}(\xi, -\mathcal{Y}_2^2), M s_m^{(3)}(\xi, -\mathcal{Y}_2^2)$  为第三类变型马修函数,  $c e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2), s e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2)$  为马修周期函数<sup>[10]</sup>.  $\mathcal{Y}_2^2 = q^2 h_2^2/4, h_2^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2$ . 包层中电磁场的横向分量也可以很容易地得到(参见文献[8], 本文从略)。

应该说明,  $A_m, B_m, C_m, D_m$  四个常数之间的关系可由边界条件决定, 其中只有一个常数是待定的。

## 2 模式的特征方程

根据切向分量连续的边界条件, 当  $\xi = \xi_0$  时,  $E_{1z} = E_{2z}, H_{1z} = H_{2z}, E_{1\eta} = E_{2\eta}, H_{1\eta} = H_{2\eta}$ , 分别令等式两边的实部和虚部相等, 则通过与椭圆光波导中类似的推导<sup>[8]</sup>, 得到奇模的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} a_{1e} & a_{2e} & -b_{1e} & 0 \\ a_{1o} & -a_{2o} & 0 & -\frac{\eta_1}{\eta_2} b_{1o} \\ a_{3o} & a_{4o} & -b_{3o} & b_{4o} \\ a_{3e} & -a_{4e} & -\frac{\eta_1}{\eta_2} b_{4e} & -\frac{\eta_1}{\eta_2} b_{3e} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

偶模的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} a_{1o} & a_{2o} & -b_{1o} & 0 \\ a_{1e} & -a_{2e} & 0 & -\frac{\eta_1}{\eta_2} b_{1e} \\ a_{3e} & a_{4e} & -b_{3e} & -b_{4e} \\ -a_{3o} & a_{4o} & -\frac{\eta_1}{\eta_2} b_{4o} & \frac{\eta_1}{\eta_2} b_{3o} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

其中参数定义如下:

$$\begin{aligned} a_{1e} &= M c_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1+}^2) \alpha_{1+}, & a_{2e} &= M c_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1-}^2) \alpha_{1-}, & b_{1e} &= M c_m^{(3)}(\xi_0, -\mathcal{Y}_2^2), \\ a_{1o} &= M s_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1+}^2) \beta_{1+}, & a_{2o} &= M s_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1-}^2) \beta_{1-}, & b_{1o} &= M s_m^{(3)}(\xi_0, -\mathcal{Y}_2^2), \\ a_{3e} &= - (1/h_{1+}^2) [\beta M s_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1+}^2) \theta_{1+} + (h_{1+}^2 + \beta^2)^{1/2} M c_m^{(1)'}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1+}^2) \alpha_{1+}], \\ a_{4e} &= - (1/h_{1-}^2) [\beta M s_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1-}^2) \theta_{1-} - (h_{1-}^2 + \beta^2)^{1/2} M c_m^{(1)'}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1-}^2) \alpha_{1-}], \\ b_{3e} &= (\beta/h_2^2) M s_m^{(3)}(\xi_0, -\mathcal{Y}_2^2) X, & b_{4e} &= (n_2 k_0/h_2^2) M c_m^{(3)'}(\xi_0, -\mathcal{Y}_2^2), \\ a_{3o} &= - (1/h_{1+}^2) [\beta M c_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1+}^2) \nu_{1+} - (h_{1+}^2 + \beta^2)^{1/2} M s_m^{(1)'}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1+}^2) \beta_{1+}], \\ a_{4o} &= - (1/h_{1-}^2) [\beta M c_m^{(1)}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1-}^2) \nu_{1-} + (h_{1-}^2 + \beta^2)^{1/2} M s_m^{(1)'}(\xi_0, \mathcal{Y}_{1-}^2) \beta_{1-}], \\ b_{3o} &= (\beta/h_2^2) M c_m^{(3)}(\xi_0, -\mathcal{Y}_2^2) W, & b_{4o} &= (n_2 k_0/h_2^2) M s_m^{(3)'}(\xi_0, -\mathcal{Y}_2^2); \end{aligned}$$

$$\alpha_{1\pm} = \frac{\int_0^{2\pi} c e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2) c e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1\pm}^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} c e_m^2(\eta, -\mathcal{Y}_2^2) d\eta}, \quad \beta_{1\pm} = \frac{\int_0^{2\pi} s e_m(\eta, -\mathcal{Y}_2^2) s e_m(\eta, \mathcal{Y}_{1\pm}^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} s e_m^2(\eta, -\mathcal{Y}_2^2) d\eta},$$

$$\theta_{1\pm} = \frac{\int_0^{2\pi} ce_m(\eta, -\gamma_2^2) se_m'(\eta, \gamma_{1\pm}^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} ce_m^2(\eta, -\gamma_2^2) d\eta}, \quad \nu_{1\pm} = \frac{\int_0^{2\pi} se_m(\eta, -\gamma_2^2) ce_m'(\eta, \gamma_{1\pm}^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} se_m^2(\eta, -\gamma_2^2) d\eta},$$

$$X = \frac{\int_0^{2\pi} ce_m(\eta, -\gamma_2^2) se_m'(\eta, -\gamma_2^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} ce_m^2(\eta, -\gamma_2^2) d\eta}, \quad W = \frac{\int_0^{2\pi} se_m(\eta, -\gamma_2^2) ce_m'(\eta, -\gamma_2^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} se_m^2(\eta, -\gamma_2^2) d\eta}.$$

可以证明, 当椭圆趋于圆时, 这两个特征方程就都变成圆芯手征光纤中模式的特征方程。

### 3 基模特性——数值计算结果

本文只对基模的偶模和奇模特征方程进行数值求解, 研究手征参数对不同椭圆比下基模的色散曲线、双折射、模间色散等特性的影响。这只需在(13)、(14)式中令  $m = 1$  即可。在下面的计算中, 取  $\epsilon_1 = 4, \epsilon_2 = 3, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ 。在数值计算过程中, 必须调用作者编制的马修函数组成的函数库和积分参数  $\alpha_{1\pm}, \beta_{1\pm}$  等组成的函数库(参见文献[8])。

图1给出了不同椭圆比下椭圆芯手征光纤中(手征参数  $\chi = 0.1$ ) 基模的奇模(或偶模)的色散曲线, 其中虚线代表非手征椭圆光纤情形(手征参数  $\chi = 0$ )。从图1可见, 手征的引入增大了归一化传播常数  $\beta/k_0$ 。计算还发现, 对一定的椭圆比  $a/b$  和归一化频率  $k_0b$ , 随着手征参数  $\chi$  的增大, 归一化传播常数  $\beta/k_0$  单调增加。

奇模和偶模的归一化传播常数之差仍定义为归一化双折射  $B = (\beta_o - \beta_e)/k_0$ 。当椭圆芯中引入手征时, 不同椭圆比下椭圆芯手征光纤中基模的归一化双折射  $B$  的最大值比相应的非手征情形时要大, 而且最大值的位置移向高频端。手征参数  $\chi = 0.1$  时的  $B$  随  $k_0b$  的变化关系如图2所示(虚线为  $\chi = 0$  的非手征椭圆光纤情形)。当椭圆比  $a/b$  和归一化频率  $k_0b$  一定时, 归

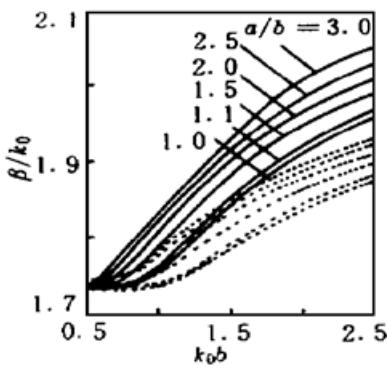


Fig. 1 Dispersion curves of the odd (or even) fundamental mode in the elliptical-core chiral optical fiber (the chiral parameter  $\chi = 0.1$ ) (dashed curves correspond to the non-chiral case,  $\chi = 0$ )

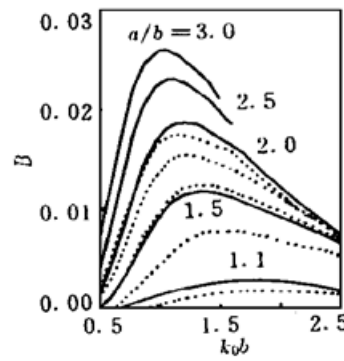


Fig. 2 Normalized birefringence  $B$  of the fundamental mode in the elliptical-core chiral optical fiber as a function of normalized frequency  $k_0b$  ( $\chi = 0.1$ ) (dashed curves correspond to the non-chiral case,  $\chi = 0$ )

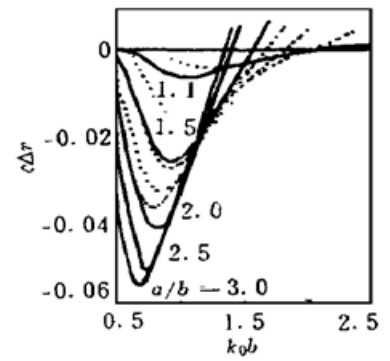


Fig. 3 Modal dispersion  $c\Delta\tau$  of the fundamental mode in the elliptical-core chiral optical fiber as a function of normalized frequency  $k_0b$  ( $\chi = 0.1$ ) (dashed curves correspond to the non-chiral case  $\chi = 0$ )

一化双折射的最大值  $B$  随手征参数  $\chi$  的增大而单调增加, 最大值位置也连续地移向高频端。

图3是不同椭圆比下椭圆芯手征光纤中基模的模间色散 ( $c\Delta\tau = \partial(\beta_o - \beta_c)/\partial k_0$ ) 随归一化频率  $k_0b$  的变化关系曲线(手征参数  $\chi = 0.1$ ), 其中虚线为  $\chi = 0$  的非手征椭圆光纤情形, 与双折射的情形类似, 模间色散的最大值随手征的增大而增大, 最大值位置和零色散位置也移向高频端。

**结 论** 本文对椭圆芯手征光纤进行了严格的求解, 得到了模式场的解析解表达式, 并且推出了模式特征方程, 当椭圆趋于圆或当手征参数等于零时, 退化成圆芯手征光纤或椭圆光波导情形。用数值方法研究了手征参数对不同椭圆比下基模的色散曲线、双折射、模间色散等特性的影响。

### 参 考 文 献

- [1] N. Engheta, P. Pelet, Modes in chirowaveguide. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(11) ·593~ 595
- [2] C. R. Pavia, A. L. Topa, A. M. Barbosa, Semileaky waves in dielectric chirowaveguides. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(23) ·1670~ 1672
- [3] H. Cory, E. Segall, Coupling between parallel circular open chirowaveguides. *J. Mod. Opt.*, 1994, **41**(4) ·777~ 790
- [4] E. O. Kamenetskii, Mode interactions in chirowaveguides. *J. Appl. Phys.*, 1996, **79**(12) ·8899~ 8905
- [5] R. C. Qiu, I-T Lu, Guided waves in chiral optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(12) ·3212 ~ 3219
- [6] A. K. Singh, Kh. S. Singh, P. Khasigin *et al.*, Model cutoff condition of an optical chiral fiber with different chiralities in the core and the cladding. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1994, **11**(7) ·1283~ 1287
- [7] 董建峰, 手征参数对光纤中模式特性的影响. *光学学报*, 1997, **17**(4) ·476~ 481
- [8] 董建峰, 聂秋华, 椭圆光波导解析解及第一个高阶模的截止频率研究. *光通信研究*, 1995, **21**(3) ·35~ 39
- [9] 董建峰, 聂秋华, 双包层椭圆光波导解析解. *光学学报*, 1997, **17**(1) ·106~ 111
- [10] Edited by Milton Abramowitz, Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover Publications Inc., 1965, 721~ 750

## Characteristics of Fundamental Mode in the Elliptical-Core Chiral Optical Fiber

Dong Jianfeng

(Department of Physics, Ningbo University, Ningbo 315211)

(Received 3 August 1997; revised 6 November 1997)

**Abstract** Analytical solutions of electromagnetic fields in the elliptical-core chiral optical fiber have been studied. The modal fields distribution and modal characteristic equations are obtained. The numerical solutions for the modal characteristic equations of the even and odd fundamental mode are given. For different aspect ratios of the elliptical-core, effects of chirality parameter on the characteristics such as dispersion curves, birefringence and modal dispersion of the fundamental modes in the elliptical-core chiral optical fiber are discussed.

**Key words** elliptical-core chiral optical fiber, chirality parameter, modal characteristic equation, dispersion curve, modal dispersion.