

# 数字重建编码成像的迭代算法\*

程 静 韩申生 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

**摘 要** 用矩阵方法研究数字重建编码成像的迭代方法。为克服问题的不唯一与病态, 采用正规化方法, 给出正规化迭代解码算法, 分析了算法的收敛性、与真解的关系, 所得的正规解可以抑制噪声, 但不能完全反映物体的局域性质。文中分析了算法的计算复杂性, 指出巨大的计算要求是限制其实用的关键因素。

**关键词** 数字重建, 编码成像, 迭代算法, 计算复杂性。

## 1 引 言

X 射线成像无论在理论上还是在实际应用中均有重要意义。作为一种间接成像技术, 编码孔径成像(CAI)技术能对辐射物体得到高分辨的图像, 已在核医学、激光等离子体物理、惯性约束聚变<sup>[1-5]</sup>等方面得到应用。在编码孔径成像中, 物体由编码孔径的投影编码, 然后再用光学或数字方法解码, 重建源分布, 是一个两步成像过程。数学上, 编码只是卷积求和, 而解码则是一个相当复杂的问题。已经提出多种数字解码算法。可以用数字信号理论<sup>[6, 7]</sup>来分析。在文献[8, 9]中研究用迭代方法, 求解约束线性方程组来重建三维物体。文献[10]则应用于实验。文献[11, 12]用伪维纳滤波方法解码。文献[13]在傅里叶空间分析编码孔径成像的性质。文献[14]研究了中子投影成像的数字重建算法。在这些方法中, 迭代方法由于能方便地利用先验知识而有特别的价值。

编码孔径成像的解码过程在数学上是编码过程的反问题。对迭代方法, 必须研究 1) 是否有解; 2) 解是否唯一; 3) 解的稳定性。但有一些问题尚未说明, 如: 算法的收敛性, 近似解与真解的关系, 解的唯一性, 算法的复杂性等。本文将在文献[8]的框架中, 用文献[7]所介绍的线性代数矩阵方法, 研究这些问题。

## 2 数学模型

投影成像是一个两步成像技术, 首先用编码孔对源分布编码, 第二步再用光学或数字方法解码反演出源分布。令

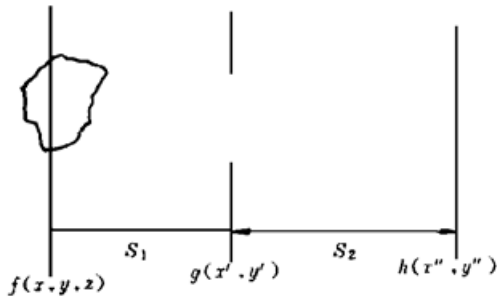
$$f(x, y, z), g(x', y'), h(x'', y'')$$

\* 国家科委 836 高科技项目。

收稿日期: 1997-06-19; 收到修改稿日期: 1997-09-29

分别为源分布、编码孔径的透过率函数、得到的编码像。图 1 为编码成像原理图。

$$h(x'', y'') = \text{const} \iiint_{s_1 + s_2 - z}^{-1} g(ax'' + bx, ay'' + by) f(x, y, z) dx dy dz \quad (1)$$



其中  $a = \frac{s_1}{s_1 + s_2 - z}$ ,  $b = \frac{s_2}{s_1 + s_2 - z}$ ,

式中  $s_1, s_2$  为物距和像距。当源分布是二维时, 可将编码像 (1) 重写为

$$h(\mathbf{r}) = f\left(-\frac{s_1}{s_2}\mathbf{r}\right) \otimes g\left(\frac{s_1}{s_1 + s_2}\mathbf{r}\right) \quad (2)$$

Fig. 1 The schematic set up of coding imaging

为数字解码, 必须将方程离散化。(1) 式经采样后, 得到方程

$$h(m', n') = \sum_{m, n, k} g(m', n', m, n, k) f(m, n, k) \quad (3)$$

通过排序, 将(3)式写成一个线性代数方程组

$$Y(p) = \sum_q C(p, q) X(q) \quad (4)$$

考虑到离散时的误差, 用矩阵形式, (4) 式可写成

$$\begin{aligned} Y &= CX + n \\ Y &= [Y(0), \dots, Y(Q - 1)]^T, \\ X &= [X(0), \dots, X(P - 1)]^T, \\ n &= [n(0), \dots, n(P - 1)]^T \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $Q$  为像的采样点数,  $P$  为源分布的采样点数,  $n$  可以算在噪声中, 这样, 就能利用线性代数的结论。

### 3 正规化迭代解码算法分析

在文献[8, 9]中, 给出了一种求解  $Y = CX$  的迭代算法: 迭代背投影(BP)

$$X^{k+1} = X^k + \alpha C^T(Y - CX^k) \quad (6)$$

注意到迭代背投影实际是

$$Y' = C'X \quad (7)$$

的 van Cittert 迭代算法,  $Y' = C^T Y$ ,  $C' = C^T C$  为已知。其中当  $C'$  可逆, 存在唯一解  $X$ 。一般情况下, 由于真实的方程是(5)式, 存在噪声, 所以相应的(7)式是一个病态问题,

$$\begin{aligned} Y' &= C'X + n \\ n' &= C^T n \end{aligned} \quad (8)$$

用(6)式求得的解对噪声非常敏感。为了克服迭代背投影算法的噪声敏感性, 本文提出正规化迭代算法。用文献[7]所介绍的正规化方法处理病态问题(8)式。对于正则化参数  $\mu > 0$ , 定义正规解为使如下泛函最小的  $X$ :

$$\Phi_\mu[X] = |Y' - C'X|^2 + \mu |X|^2 \quad (9)$$

式中  $|X|^2$  项是稳定泛函,  $\mu$  的选择使  $|Y' - C'X|^2 \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  为噪声限。

根据先验知识, 可以选择不同的稳定泛函。(9)式的稳定泛函的物理意义是能量最小。在所有满足  $|Y - CX|^2 \leq \epsilon$  的  $X$  中, 选择  $|X|^2$  最小的  $X$  为解。对(9)式解得

$$X = (C' + \mathcal{Y})^{-1}Y', \quad \mathcal{Y} = 1/\mu \quad (10)$$

(10) 式中的矩阵求逆当矩阵阶数很大时难以直接计算, 给出正规化迭代算法:

$$X^{k+1} = X^k + \alpha[Y' - (C' + \mathcal{Y})X^k] \quad (11)$$

式中  $C'$  为正的实对称矩阵, 而由矩阵理论, 众所周知正的实对称矩阵是非负定的, 即本征值非负。进而  $C' + \mathcal{Y}$  是正定矩阵, 本征值都大于 0。

本文用本征值分解的方法来正规化迭代算法(11)式。记  $C'$  的本征值(由小到大)为  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_p\}$ ,  $\lambda_m \geq 0$  对应的本征向量是  $\{V_1, \dots, V_m, \dots, V_p\}$ , 本征值与本征向量符合  $C'V_k = \lambda_k V_k$ , 将第  $k$  次迭代解用本征向量展开为  $X^k = \sum_m (X^k, V_m)V_m$ , 从(11)式可得

$$\begin{aligned} X^k &= \sum_m (Y', V_m)V_m + [I - \alpha(C' + \mathcal{Y})] \sum_m (X^{k-1}, V_m)V_m = \\ &= \sum_m [(Y', V_m) + [1 - \alpha(\lambda_m + \mathcal{Y})](X^{k-1}, V_m)]V_m = \dots = \\ &= \sum_m \{1 - [1 - \alpha(\lambda_m + \mathcal{Y})]^{k+1}\} \frac{1}{\lambda_m + \mathcal{Y}} (Y', V_m)V_m \end{aligned} \quad (12)$$

当  $|1 - \alpha(\lambda_m + \mathcal{Y})| \leq 1$ , 则  $k \rightarrow \infty$  的(12)的迭代解收敛于

$$\begin{aligned} X_\infty &= \sum_m \frac{1}{\lambda_m + \mathcal{Y}} (Y', V_m)V_m = \sum_m \frac{1}{\lambda_m + \mathcal{Y}} [(X, C'V_m)V_m + (n', V_m)V] - m] = \\ &= \sum_m \frac{1}{\lambda_m + \mathcal{Y}} \lambda_m (X, V_m)V_m + \sum_m \frac{1}{\lambda_m + \mathcal{Y}} (n', V_m)V_m \end{aligned} \quad (13)$$

分母大小有下界, 故噪声得到了控制。如用(6)式求解(8)式, 则迭代解收敛于

$$X_\infty = \sum_m \frac{1}{\lambda_m} (Y', V_m)V_m = \dots = \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \lambda_m (X, V_m)V_m + \sum_m \frac{1}{\lambda_m} (n', V_m)V_m \quad (14)$$

此时(14)式中相应于  $\lambda_m = 0$  的  $(Y', V_m) = (n, V_m)$  并不能保证为 0, 噪声的这些分量将得到放大。所以用迭代背投影算法(9)式求解(12)式对噪声非常敏感, 是病态问题。比较(13)式与(14)式, 正规化迭代算法克服了迭代背投影算法的噪声敏感性。

然而, 从一些数值计算的例子发现  $\{\lambda_m\}$  中一般只有很少一部分  $\lambda_m$  较大, 而大部分本征向量  $\lambda_m$  较小, 从(13)式右边第一项可以看出,  $X$  的这些分量受到较大的抑制。所以正规解在小本征值本征分量上与真实解有较大的差异。真实源分布的小本征值本征分量所占的比重越大, 正规解与真实解相差越大。这是正规化方法为克服病态问题所付出的代价, 局域结构的扭曲。

对常见编码孔径的  $C'$ , 由于  $\lambda_p$  比任何其他的  $\lambda_m$  大很多, 如取  $Y'/\lambda_p$  为初始解, 则  $CY'/\lambda_p$  与  $Y$  相差很小, 可以加速收敛。注意到不计常数因子  $Y'/\lambda_p$  正比于  $Y' = C^T Y = C^T C X$ , 又如作适当的变量替换, 可将编码像(1)式重写为

$$h(\mathbf{r}) = \int dz f\left(-\frac{s_1(z)}{s_2(z)}\mathbf{r}\right) \odot g\left(\frac{s_1(z)}{s_1(z) + s_2(z)}\mathbf{r}\right) \quad (15)$$

基于(15)式, 表示  $C$  的作用的(3)式可写成

$$h(m', n') = \sum_{m, n, k} g[(m' - m), (n' - n), k] f(m, n, k) \quad (16)$$

$C^T$  的作用就是

$$f(m, n, k) = \sum_{m', n} g[(m' - m), (n' - n), k] h(m', n') \quad (17)$$

显然(17)式是一个相关运算。所以  $C^T$  的作用就是相关解码, 匹配滤波。从而可以在迭代中用匹配滤波解作初值, 可加速收敛。

给出两个例子。

例 1: 用一维菲涅耳波带板作编码器件, 对 1+ 1 维源分布编码成像。采样后, 源分布是 121×3 的网格, 编码像是 321×1 的网格。图 1(a) 是源分布, 纵向只有三层。在像上加小扰动后解码。图 1(b) 直接求逆。图 1(c) 用(11) 式迭代 100 次求解, 图 1(d) 用(11) 式迭代 1000 次求解, 图 1(e) 直接用(10) 式求正规解, 图 1(f) 是相关解  $Y'/\lambda_p$ 。从(a) ~ (f),  $|Y - CX|/|Y| = 0.0029, 0.0000, 0.0095, 0.0011, 0.0042, 0.0382$ ;  $|X| = 25.80, 27.60, 25.25, 25.78, 25.50, 24.54$ 。综合两个量, 正规化方法的解是比较恰当的。

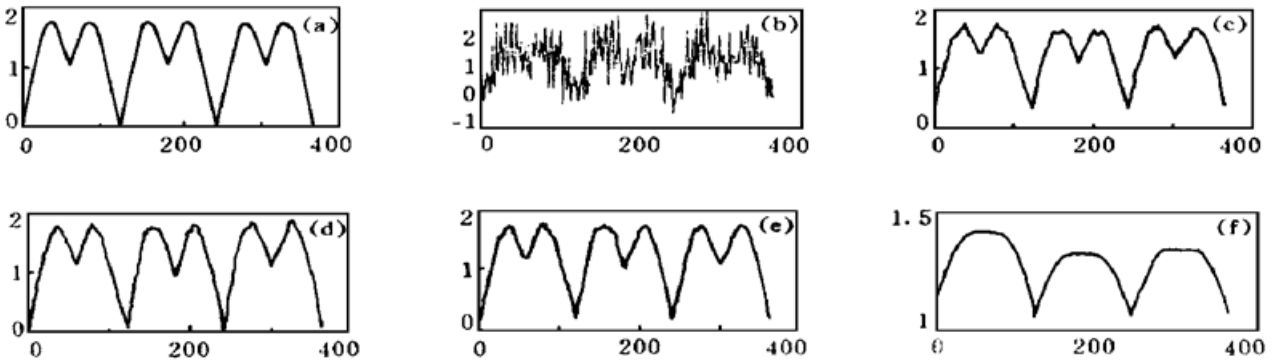


Fig. 2 The example 1 (seeing text), where (a) The real source; (b) The inverse solution of CAI; (c) The result using (11), iteration number is 100; (d) The result using (11), iteration number is 1000; (e) The regular inverse solution of (10); (f) The correlated solution

例 2: 用二维菲涅耳波带板作编码器件, 对三维源分布编码成像。采样后, 源分布是 7×7×7 的网格, 编码像是 31×31 的网格。图 2 是源的一维表示。(a) 是真实分布。加小扰动后解码。(b) 是正规迭代(11) 式解得的分布。对真实解与正规迭代解,  $\frac{|Y - CX|}{|Y|} = 0.000866, 0.000865$ ;  $|X| = 7.61, 7.54$ 。可见, 正规化迭代算法的解好于迭代背投影算法。

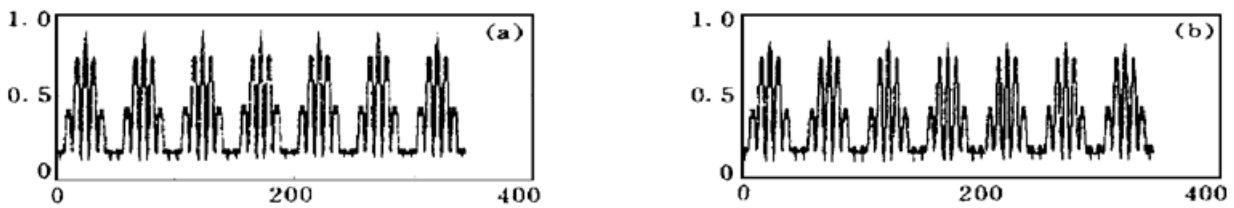


Fig. 3 The example 2 (seeing text), where (a) The real source; (b) The result using (11), iteration number is 100

### 4 算法的计算复杂性分析

评价一个算法性能的一个重要指标是计算复杂性。计算复杂性是指为计算一定规模的问题所要的时间(计算次数)与空间(存储单元)。由于在计算机的硬件实现中, 乘(除)法比加法费时得多, 所以一般用所需的乘(除)法次数来表示时间复杂性。重新表述算法为:

$$g[\frac{c_1(x_0'' + m'\Delta'') + c_2(x_0 + m\Delta)}{(s_2 + s_1 - z_0 - k\Delta)^2}, \frac{c_1(y_0' + n'\Delta') + c_2(y_0 + n\Delta)}{(s_2 + s_1 - z_0 - k\Delta)^2}]$$

其中  $c_1 = \frac{s_1 - z_0 - k\Delta}{s_1 + s_2 - z_0 - k\Delta}$ ,  $c_2 = \frac{s_2}{s_1 + s_2 - z_0 - k\Delta}$ 。

1) 计算编码矩阵 C;

- 2) 计算  $Y' = C^T Y$ ;
- 3) 计算  $C' = C^T C$ ;
- 4) 选择初值  $X = \alpha Y'$ ;
- 5) 按(11)式进行迭代;

设采样后, 源分布为  $M \times N \times K = Q$ , 像分布为  $M' \times N' = P$ 。第一步要计算  $P \times Q$  个矩阵元, 每个矩阵元要 12 次乘、除法和 1 次采样运算, 所以共需  $12PQ$  次乘除法运算和  $PQ$  次采样运算。第二步需要  $PQ$  次乘法运算。第三步由于  $C$  是非负对称矩阵, 所以需要  $Q(Q+1)P/2$  次乘法。而每计算一次, (11) 式要  $Q(Q+1)$  次乘法。设进行了  $S$  次迭代, 那么, 总的计算次数是  $PQ(Q+27)/2 + Q(Q+1)S$  乘除法运算和  $PQ$  次采样运算。

总的存储单元由  $C$  决定, 是  $PQ$  个单元。

从计算复杂性分析可以知道, 如果要重建三维物体, 绝不是个人计算机所能承担的任务。例如, 取  $M = N = K = 50$ ,  $M' = N' = 200$ , 则计算次数大于  $10^{14}$  次, 存储单元多于  $5 \times 10^9$ , 这远远超出了个人计算机的能力, 所以在前面只给出了一个非常小的三维玩具作为示例。

但注意到计算的时间复杂性分析中, 第一步占用了很多的计算时间。如果用模拟方法来计算(18)式, 即在标度变化的孔径上直接采样, 可能极大地减小计算时间。另外, 如果源分布的维数等于像的维数, 都是二维, 可以用快速傅里叶变换(FFT)来计算迭代过程, 大大减小计算时间。

## 5 讨 论

本文用矩阵方法研究数字重建编码成像的迭代算法。将离散化的编码成像问题表述为线性代数方程组的求解。对于极高阶的方程组, 难以直接求解, 因此运用迭代方法。迭代方法可以方便的利用先验知识, 如非负性、有界性等等, 并可选择不同的稳定泛函, 得到更好的解。

为克服问题的不唯一与病态, 采用正规化方法, 给出正规化迭代解码算法, 分析了算法的收敛性, 与真解的关系, 所得的正规解有抑制噪声的能力, 但不能完全反映物体的高频性质。用相关解作初值可以加快收敛。

但从计算复杂性的分析可以知道, 数字重建编码成像的迭代算法的实际应用中, 特别对于三维情况, 巨大的计算量以及需要的数据存储容量均限制了其运用范围。如果采用模拟-数字混合方法, 有可能改善计算的时间复杂性。

## 参 考 文 献

- [1] H. H. Barrent, F. A. Horrigan, Fresnel zone plate imaging of gamma rays: Theory. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(11): 2686~ 2702
- [2] 王之江, 伍树东, 成像光学, 北京: 科学出版社, 1990
- [3] N. M. Ceglio, D. W. Sweeney, Zone plate coding imaging: Theory and applications. in: *Progress in Optics XXI*, ed. E. Wolf, Amsterdam: North-Holland, 1984. P289
- [4] H. H. Barrent, W. Swindell, 放射成像. 北京: 科学出版社, 1988
- [5] 欧阳斌, 余加进, 陆海鹤, 激光等离子体 X 光编码照相. *光学学报*, 1985, **4**(2): 173~ 177

- [6] 关肇直, 许文源, 贾沛璋, 信号分析与处理. 北京: 科学出版社, 1986
- [7] 王延平, 信号复原与重建. 南京: 东南大学出版社, 1992
- [8] G. R. Gind, R. G. Paxman, H. H. Barrent, Reconstruction of an object from its coded image and object constraints. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(6) : 851~ 856
- [9] W. E. Smith, R. G. Paxman, H. H. Barrent, Image reconstruction from coded data. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1985, **2**(4) : 491~ 500
- [10] Y. W. Chen, M. Yamanaka, N. Miyanaga *et al.*, Three dimensional reconstruction of laser-irradiated targets using URA coded aperture cameras. *Opt. Commun.*, 1989, **71**(5) : 249~ 255
- [11] J. Brunol, R. Sauneuf, J. P. Gex, Micro coded aperture imaging applied to laser plasmas diagnosis. *Opt. Commun.*, 1979, **31**(2) : 129~ 134
- [12] D. Ress, R. A. Lerche, L. Da. Silva, Demonstration of an X-ray ring-apertures microscope for inertial-confinement fusion experiments. *Appl. Phys. Lett.*, 1992, **60**(4) : 410~ 412
- [13] K. A. Nugent, Coded aperture imaging: A Fourier space analysis. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(3) : 563~ 569
- [14] O. Delage, J-P. Garconnet, C-T. Le *et al.*, Image processing in neutron penumbral imaging. *Proc. SPIE*, 1995, **2564** : 242~ 255

## The Iterative Algorithm of Digital Reconstruction of Coding Imaging

Cheng Jing      Han Shensheng      Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 19 June 1997; revised 29 September 1997)

**Abstract** The iterative algorithm of digital reconstruction of coding imaging is studied by matrix analysis. We use regularization method to overcome the ill-posed problem. The convergence and error of the algorithm is studied. It is shown that the noise can be compressed, but some local structure is distorted. The computation complexity of the algorithm is analysed.

**Key words** digital reconstruction, coding imaging, iterative algorithm, computational complexity.