

自适应光学系统的模式法数值模拟*

严海星 陈 涉 张德良 李树山

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要 建立了利用模式法(Zernike 多项式展开法)对自适应光学系统进行数值模拟的理论模型, 编制了计算程序, 并与激光大气传输计算程序衔接起来, 进行了大量数值模拟计算。首次发现: 存在泽尼特(Zernike)多项式展开的最佳项数, 大于一定项数的展开式的效果迅速变坏, 竖排和斜排的泽尼特多项式展开有类似的结果, 文献中认为可以采用的 15 项泽尼特多项式展开的效果不好, 最佳项数随着横向风速的增加而减小, 在风速较大时最佳项数下的模式法结果稍好于直接斜率控制法的结果。

关键词 自适应光学, 数值模拟, 泽尼特多项式展开。

1 引 言

众所周知, 自适应光学(AO)系统可以实时地检测和校正畸变的位相波前, 显著地改善光波在湍流大气中传输的效果, 从而在天文和激光传输等领域得到广泛的应用^[1~4]。对于自适应光学系统中经常使用的 Hartmann-Shack (HS) 波前传感器, 实现波前复原适宜采用模式法和直接斜率控制法^[5]。作者专门研究了自适应光学的直接斜率控制法数值模拟^[6], 本文将只涉及模式法。虽然在国外文献中提到对自适应光学系统已作了不少理论模拟计算工作^[7], 但具体的报道很少, 且没有详细的算法和结果。

2 理论模型

在自适应光学系统的三个组成部分(波前探测, 波前复原, 波前校正)中, 模式法与直接斜率控制法的差别只在于波前复原采用了不同的控制矩阵。下面只具体推导模式法的控制矩阵, 其它内容可以参见文献[6]。

用泽尼特多项式对信标光经过湍流大气后畸变了的位相波前 $\psi(x, y)$ 进行展开, 得到

$$\psi(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k Z_k(x, y) \quad (1)$$

式中 $Z_k(x, y)$ 为第 k 阶的泽尼特多项式^[8], n 为泽尼特多项式展开的最高项数。

将上式在 X 和 Y 方向上进行微分, 并在各子孔径上平均, 可得

* 得到国家高技术激光技术领域的资助。

收稿日期: 1996-12-16

$$\begin{pmatrix} G_{x1} \\ G_{y1} \\ \vdots \\ G_{xm} \\ G_{ym} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{x1}(1) & \cdots & Z_{xn}(1) \\ Z_{y1}(1) & \cdots & Z_{yn}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{x1}(m) & \cdots & Z_{xn}(m) \\ Z_{y1}(m) & \cdots & Z_{yn}(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

用矩阵的形式可以写成 $G = DA$ (3)

其中 m 为 HS 传感器的子孔径的数目, G 为畸变的位相波前所对应的斜率矩阵, A 为其泽尼特多项式展开系数矩阵, 变换矩阵 D 的元素为

$$Z_{xk}(i) = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i} \frac{\partial Z_k(x, y)}{\partial x} dx dy, \quad Z_{yk}(i) = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i} \frac{\partial Z_k(x, y)}{\partial y} dx dy \quad (4)$$

其中 S_i 为第 i 个子孔径的面积, \iint_{S_i} 为在第 i 个子孔径上的积分。

矩阵方程(3)为一个过约束面积, 变换矩阵 D 的行数 $2m$ 通常大于列数 n 。它的解可表示为

$$\bar{A} = D^+ G \quad (5)$$

其中 D^+ 为 D 的广义逆矩阵, 可以用奇异值分解法求出。 \bar{A} 为方程的一个最小二乘解。

所对应的经复原的位相波前为

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k Z_k(x, y) \quad (6)$$

重要的是得到与位相波前 $\Psi(x, y)$ 相应的控制信号, 即变形镜的各驱动器的驱动量。假设变形镜的驱动器的影响函数为

$$R_j(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \exp \{ \ln a [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] / d^2 \} \quad (7)$$

式中 a 为驱动器间的耦合率, λ 为光波波长, d 为驱动器的间距, x_j 和 y_j 为第 j 个驱动器的坐标。这样, 变形镜的面形可以表示为

$$\psi_m(x, y) = \sum_{j=0}^t V_j R_j(x, y) \quad (8)$$

式中 t 为变形镜驱动器的总数, V_j 为第 j 个驱动器的驱动量。若希望得到的是变形镜补偿位相波前 $\Psi(x, y)$, 所以最好的情况为

$$\iint_S [\psi_m(x, y) - \Psi(x, y)]^2 dx dy = \iint_S \left[\sum_{j=1}^t V_j R_j(x, y) - \Psi(x, y) \right]^2 dx dy = \min \quad (9)$$

其中积分号表示在变形镜的镜面上的积分。用最小二乘法求解上式, 可以得到

$$\sum_{g=1}^t V_g C_{jg} = B_j \quad (10)$$

$$C_{jg} = \iint_S R_j(x, y) R_g(x, y) dx dy, \quad B_j = \iint_S \Psi(x, y) R_j(x, y) dx dy \quad (11)$$

即 $CV = B$ (12)

把(6)式代入(11)式, 可得

$$B_j = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \iint_S Z_k(x, y) R_j(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k Z_{rk}(j)$$

即 $B = Z_r \bar{A}$ (13)

从而有

$$CV = Z_r \bar{A}, \quad \text{或} \quad V = C^{-1} Z_r \bar{A}$$

把(5)式代入可得

$$V = C^{-1} Z_r D^+ G = V_g G \quad (14)$$

$$V_g = C^{-1} Z_r D^+ \quad (15)$$

其中(15)式就是所求的控制矩阵。在一个实用的自适应光学系统中, HS 传感器和变形镜的布局已经确定, 当选定泽尼特多项式展开的项数之后, 控制矩阵就完全确定下来。只要由传感器测出信标光的畸变的位相波前的斜率矩阵 G , 就可以由(14)式得到校正所需的各驱动器的驱动量 V 。应该提到的是, 模式法的控制矩阵和直接斜率控制法的控制矩阵是不同的, 泽尼特多项式展开的项数不同, 控制矩阵也是不同的。

3 数值计算

与文献[6]类似, 本文以湍流大气中的激光传输作为自适应光学系统进行相位补偿的对象和对补偿效果的检验, 对实际场景进行了数值模拟计算: 把对自适应光学的模式法模拟计算程序与湍流大气中的激光传输模拟计算程序^[9]连接起来, 采用经大气湍流畸变了的位相供自适应光学系统补偿用; 利用多相屏法考虑湍流大气对光波传输的效应; 采用 von Karman 谱描述湍流; 采用湍流冻结假设考虑自适应光学系统的延迟时间的效应; 对自适应光学系统的模拟计算可以包括对波前相位补偿的迭代计算; 采用长时间曝光 Strehl 比(以下简称 S 比)作为评价光束传输效果的品质参数; STRCC 为光心环围能量 S 比。

控制矩阵 V_g 由三个矩阵 Z_r 、 D^+ 和 C^{-1} 构成。在计算 V_g 的过程特别是计算其组成矩阵 Z_r 和 D 的矩阵元时, 要用二维变步长的 Simpson 公式计算大量的面积分, 耗时甚多。经过仔细的考察, 以对感兴趣的计算结果(最后集中体现为带自适应光学相位补偿的激光大气传输的 S 比的数值)没有明显的影响的前提下, 在计算中采取了一些优化措施: 首先, 发现三个矩阵的矩阵元对计算误差限的敏感程度很不相同, 在大量数值实验的基础上, 对三个矩阵采用了不同的误差限, 并且, 在一些情况下把计算误差取得较高, 从而显著地提高了计算效率。其次, 通过对矩阵元的计算次数的仔细观察, 发现大量时间耗费在个别矩阵元的计算上, 而矩阵元的数目很多, 个别矩阵元的计算准确与否对于最终结果的影响很小, 特别是当该矩阵元的数值很小时(而对这些矩阵元的计算耗时又特别多)更是如此。从理论上进行了分析, 并在计算实践上得到证实, 对这些矩阵元的计算在进行到一定次数之后, 强迫停止计算, 这样不仅明显加快了计算, 而且不会加大总计算误差。为此, 在作第一维积分时, 使积分次数达到某一定值或者计算误差小于所要求值时结束对该矩阵元的计算。如果在总的积分次数达到一定值之前没有“自然”收敛, 就人为地使计算误差限加大, 使计算强迫收敛。但这种处理只限于第一维积分的计算, 第二维积分的计算仍保持“自然”收敛。第三, 在计算 Z_r 的矩阵元时, 采取了另外一种特殊的优化: 将整个的面积分分成有序的几部分来分别计算, 再叠加在一起。采用这些优化措施使计算效率提高了几十倍。

4 结果和讨论

在文献中泽尼特多项式的排列有两种形式, 为了方便, 称之为竖排^[10]和斜排^[5], 它们的项数的对应关系列于表 1, 当项数大于 12 时, 两种排法所包括的泽尼特多项式的项有所不同。对于各种不同项数的竖排和斜排的泽尼特多项式展开, 可以分别算出它们的控制矩阵 V_g , 再对不同湍流强度和某个湍流强度下的不同次湍流实现算出带有自适应光学相位补偿的

大气传输 S 比。对于 61 单元自适应光学系统的模式法计算结果汇总于图 1~ 5 中(只列出了 STRCC)。图 1~ 4, 点线为直接斜率控制法, 实线为斜排结果, 符号和虚线为竖排结果。图 5 中实线为直接斜率控制法结果, 圆圈为斜排结果, 数字为最佳项数, 十字为竖排结果, 括号中的数字为竖排的最佳项数。计算条件为: 1 km 水平传输, 聚焦光束, 信标光 $1.06 \mu\text{m}$, 主激光 $1.315 \mu\text{m}$, 10 个相屏, 61 单元自适应光学系统(48 个子孔径), 驱动器间距 8.2 cm。

Table 1. The two different arrangements of the Zernike polynomial (The upper line corresponds to the declined arrangement, the lower line corresponds to the vertical arrangement)

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0		3		8		15		24		35		48	
	0		3		10		21		36		35		78	
1		1, 2		6, 7		13, 14		22, 23		33, 34		46, 47		61, 62
		1, 2		6, 7		15, 16		28, 29		45, 46		66, 67		91, 92
2			4, 5		11, 12		20, 21		31, 32		44, 45		59, 60	
			4, 5		11, 12		22, 23		37, 38		56, 57		79, 80	
3				9, 10		18, 19		29, 30		42, 43		57, 58		74, 75
				8, 9		17, 18		30, 31		47, 48		68, 69		93, 94
4					16, 17		27, 28		40, 41		55, 56		72, 73	
					13, 14		24, 25		39, 40		58, 59		81, 82	
5						25, 26		38, 39		53, 54		70, 71		95, 96
						19, 20		32, 33		49, 50		70, 71		
6							36, 37		51, 52		68, 69		83, 84	
							26, 27		41, 42		60, 61			
7								49, 50		66, 67		72, 73		97, 98
								34, 35		51, 52				
8									64, 65		62, 63		85, 86	
									43, 44					
9										53, 54		74, 75		99, 100
10											64, 65		87, 88	

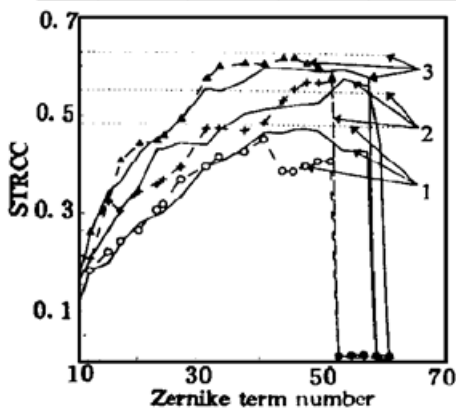


Fig. 1 Variation of strehl ratio in different turbulence realization with term number of Zernike polynomial expansion. $V = 0$; $r_0 = 5.82 \text{ cm}$, $C_n^2 = 10^{-13.5} \text{ m}^{-2/5}$

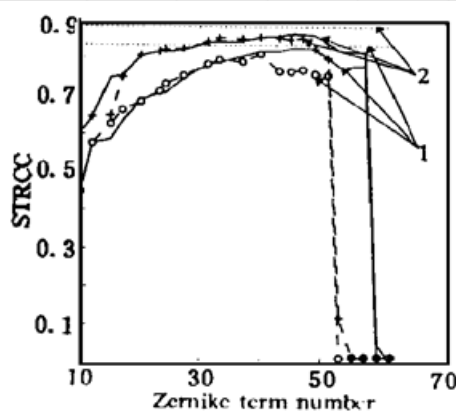


Fig. 2 Variation of Strehl ratio in different turbulence realization with term number of Zernike polynomial expansion. $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/5}$, $r_0 = 11.61 \text{ cm}$

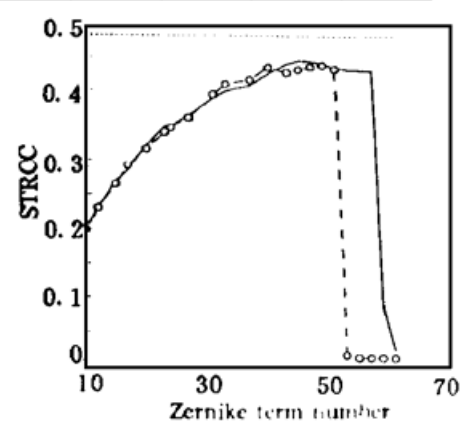


Fig. 3 Variation of Strehl ratio of average of 50 times turbulence realization with term number of Zernike polynomial expansion

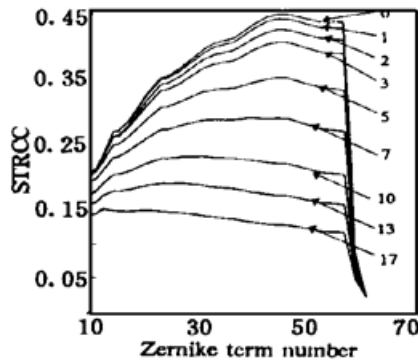


Fig. 4 Variation of Strehl ratio of average of 50 times turbulence realization with term number of Zernike polynomial expansion at different transverse wind speed (by means of modal method with declined arrangement)

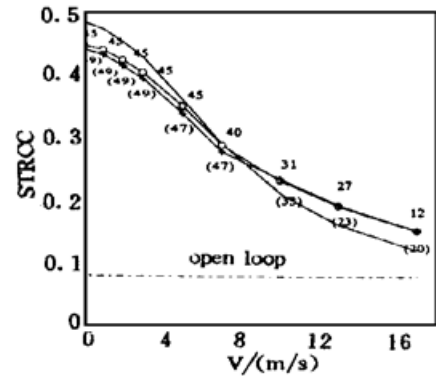


Fig. 5 Comparison of computational results by means of the modal method with optimum term number to the results by means of the direct wavefront gradient control method at different transverse wind speed

计算实验表明: 对于这两种排列方法都存在泽尼特多项式展开的最佳项数; 当展开项数为比此最佳项数大的某个数值时, 模式法计算结果陡然下降; 而在最佳项数附近有一个相对比较平缓的峰值(即在最佳项数附近不同项数的模式法计算结果接近); 在最佳项数下竖排和斜排的模式法计算结果基本相同, 但最佳项数值本身有所不同; 并且, 在最佳项数下的竖排和斜排的模式法计算结果与直接斜率控制法的结果在合理的范围内相符。在一定的横向风速下, 对不同的湍流强度和一定湍流强度下的不同次湍流实现都有类似的规律; 对于不同的横向风速, 也有类似的规律; 但在相同的横向风速和湍流强度下, 对于不同次的湍流实现, 最佳项数不尽相同, 竖排与斜排的最佳项数也有差别, 并且, 最佳项数附近的峰值有时有明显的起伏; 当对多次湍流实现进行平均之后, 在最佳项数附近的峰值相当平缓; 对多次湍流实现进行平均所得到的最佳项数与每次湍流实现的最佳项数有所不同。

本文也对 37 单元的自适应光学系统进行了模式法计算。发现, 也类似地存在泽尼特多项式展开的最佳项数, 并有与上述类似的规律性结果。但是, 这种条件下的最佳项数显著地小于 61 单元系统的最佳项数。对于不同的自适应光学系统, 规律是: 子孔径数目越少, 泽尼特多项式展开的最佳项数越低。文献[11]采用了 15 项的泽尼特展开式进行自适应光学系统的模式法相位复原。由图中所示出的结果可以明显地看出, 至少对于本文的 61 单元系统来说, 15 项的泽尼特多项式展开不可能给出正确的结果。

姜文汉基于物理概念上的分析提出: 当横向风速较大时, 采用项数较少的泽尼特多项式展开进行相位复原可能会得到较好的校正效果。本文在不同横向风速下进行了大量数值模拟计算, 由图 4 和图 5 可以看到, 泽尼特多项式展开的最佳项数随着横向风速的提高而逐渐降低, 在横向风速较小(小于 5 m/s)时, 最佳项数基本不变, 风速更高时, 最佳项数明显减小。在较高的横向风速下(大于 7 m/s), 最佳项数的泽尼特多项式展开法的校正效果变得比直接斜率控制法要好一些, 显示出当横向风速较大时, 采用项数较少的泽尼特多项式展开进行相位复原确实可能得到较好的校正效果, 但是, 这种改善不是很大。

作者对于与中国科学院光电技术研究所姜文汉院士的多次有益的讨论, 深表谢意。

参 考 文 献

- [1] R. Y. Tyson, Principles of Adaptive Optics, Academic Press, New York, 1991
- [2] 周仁忠(主编), 自适应光学, 北京, 国防工业出版社, 1996
- [3] 姜文汉, 严佩英, 李明全等, 自适应光学实时大气湍流补偿实验. 光学学报, 1990, **10**(6) : 558~ 564
- [4] C. A. Primmerman, T. R. Price, R. A. Zollars *et al.*, Atmospheric-compensation experiments in strong-scintillation conditions. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(12) : 2081~ 2088
- [5] Wenhan Jiang, Huagui Li, Hartmann-Shack wavefront sensing and wavefront control algorithm. *Proc. SPIE*, 1990, **1271** : 82~ 93
- [6] 严海星, 张德良, 李树山, 自适应光学系统的数值模拟: 直接斜率控制法. 光学学报, 1997, **17**(6) : 758~ 764
- [7] P. B. Ulrich, L. E. Wilson *et al.*, Propagation of high-energy laser beams through the earth's atmosphere. *Proc. SPIE*, 1990, **1221**
- P. B. Ulrich, L. E. Wilson *et al.*, Propagation of high-energy laser beams through the earth's atmosphere II. *Proc. SPIE*, 1991, **1408**
- [8] M. Born, E. Wolf, Principle of Optics. (pergamon, London, 1980, Sec. 9.2 and App. VII
- [9] 严海星, 李树山, 孙原隆, 大气湍流中激光传输的理论模拟计算. 中国激光, 1992, **19**(12) : 936
- [10] R. J. Noll, Zernike polynomial and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am*, 1976, **66**(3) : 207~ 211
- [11] M. A. Von Bokern, Design of a linear quadratic gaussian control for an adaptive optics system. 1990, AD-A230547
- D. J. Anderson, LQG control of a deformable mirror adaptive optics system with time delayed measurements. 1991, AD-A243623

Numerical Simulation of An Adaptive Optics System by Means of Modal Wavefront Reconstruction

Yan Haixing Chen She Zhang Deliang Li Shushan
(*Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080*)

(Received 16 December 1996)

Abstract A theoretical model of numerical simulation of an adaptive optics (AO) system by modal wavefront reconstruction (i. e. by means of the Zernike polynomials expansion) is presented and the corresponding computer program is compiled. The AO computer program is combined with our simulation computational program of atmospheric propagation of laser beam to carry out a lot of simulation computations. It is found for the first time that there is an optimum term number of Zernike polynomials expansion. When the term number of Zernike polynomials expansion is higher than a certain value, results become worse very quickly. Zernike Polynomials expansions of vertical arrangement and declined arrangement can give quite similar results. 15 terms of Zernike polynomials expansion which is thought usable in the wavefront reconstruction in literature, in fact can not give a correct result. The optimum term number gets lower as transverse wind speed is larger and the results of AO phase compensation by means of the modal wavefront reconstruction with optimum term number are slightly better than those by means of the direct wavefront gradient control method.

Key words adaptive optics, numerical simulation, Zernike polynomials expansion.