在热压缩态中测量相位算符的涨落

董传华*
(上海大学物理系, 上海 200072)

摘　要　利用热场动力学的方法计算了热压缩态中测量相位算符的涨落。引入了两种类型的基础量子涨落, 一种是与测量相位的两个正交分量相联系; 另一种是与一个测量相位分量和光子数相联系。由此, 研究了热压缩态中测量相位涨落的两种压缩及其与温度的关系。

关键词　测量相位算符,　热压缩态。

1　引　　言

在物理学中, 特别在光学中, 相位是一个很重要的概念。在经典理论中, 相位的定义是十分明确的, 但在光的量子理论中相位算符的定义并不是唯一的, 而可以根据不同的要求而有多种选择。Barnett 和 Pegg 对 Dirac、Louisell 和 Susskind-Glogower 提出的相位算符作了一个很好的评述[1]。同时, 他们也给出了相位算符的另外二种新的选择: 么正的指数相位算符和测量相位算符(measured phase operator, 简写为 MPO)。在零差探测以及处于特定的迭加态中的两能级原子和场的相互作用的实验中, 相位的测量对应于测量相位算符的测量, 因此他们建议采用测量相位算符作为实验中相位的定义。在量子光学中, 某些态的测量相位算符的性质已有了研究[2, 3], 但这些研究中所处理的场态均处于零温度。实际情况中, 温度通常并不为零, 本文讨论在有限温度下的热压缩态中测量相位算符的性质及其与温度的关系。

2　测量相位算符和热压缩态

Barnett 和 Pegg 在研究零差探测的实验中发现相位对应于一个简单的形式

$$\cos_M \Phi = k(a + a^+) \tag{1}$$

式中 k 是一个 c 数。k 的一个合理的选择是 $0.5(0.5+\bar{n})^{-1/2}$, $\bar{n}$ 为被测光场中的光子数平均值。$\cos_M \Phi$ 是归一化测量相位算符的一个正交分量, 其另一个正交分量是 $\sin_M \Phi = -ik(a - a^+)$。利用场振幅的两个分量 x_1 和 x_2, $(a = x_1 + ix_2)$, 测量相位算符可以写作

$$\cos_M \Phi = (0.5+\bar{n})^{-1/2} x_1, \qquad \sin_M \Phi = (0.5+\bar{n})^{-1/2} x_2 \tag{2}$$

如果把 $(0.5+\bar{n})^{1/2}$ 看作一个矢量的长度, x_1 和 x_2 分别是它在复平面上实轴和虚轴上的分量, 那么 Φ 就可以看作该矢量的相角, 这是 Φ 的几何意义。同时, a 可以写作

---

*　通讯地址: 上海市延长路 149 号上海大学 31 信箱物理实验室, 200072。
收稿日期: 1996 年 8 月 23 日

$$a = (0.5 + \bar{n})^{1/2}(\cos_M \phi + i \sin_M \phi) \tag{3}$$

测量相位算符的两个分量表现出相位应有的经典性质，即

$$\langle\cos_M \phi^2\rangle + \langle\sin_M \phi^2\rangle = 1 \tag{4}$$

这两个分量之间及其与光子数算符之间有下列对易关系

$$[\cos_M \phi, \sin_M \phi] = i/(1 + 2\bar{n}) \tag{5}$$

$$[\cos_M \phi, N] = i \sin_M \phi, \qquad [\sin_M \phi, N] = - i \cos_M \phi \tag{6}$$

为了讨论在有限温度下的热态，在热场动力学(TFD)[4]中通过 tilde 共轭，引入了热自由度，使自由度增加一倍。在这样的一个双希尔伯特空间中，真空态是$|0\tilde{0}\rangle$，而热场真空定义为$|0\rangle_T = T(\theta)|0\tilde{0}\rangle$。$T(\theta)$ 是一个幺正的热化算符

$$T(\theta) = \exp[-\theta(a\tilde{a} - a^+\tilde{a}^+)] \tag{7}$$

算符 $T(\theta)$ 提供了 a 和 a^+ 的一个热正则 Bogolubov 变换：

$$T^+(\theta)aT(\theta) = ua + v\tilde{a}^+, \qquad T^+(\theta)a^+T(\theta) = ua^+ + v\tilde{a} \tag{8}$$

其中 $u = \cosh\theta$, $v = \sinh\theta$。参数 θ 与热真空态中的热光子数 n_0 有关，$n_0 = \sinh^2\theta$。通过玻色-爱因斯坦分布，n_0 可以和温度 T 联系起来

$$n_0 = [\exp(\bar{h}\omega/kT) - 1]^{-1} \tag{9}$$

因此也可以用 n_0 来表征温度。热相干态和热压缩态可以由几种定义来引入[5, 6]。在本文中，热相干态$|\alpha\rangle_T$ 和热压缩态$|\alpha, z\rangle_{ST}$ 采用下列定义

$$|\alpha\rangle_T = D(\alpha)|0\rangle_T = D(\alpha)T(\theta)|0\tilde{0}\rangle \tag{10}$$

$$|\alpha, z\rangle_{ST} = D(\alpha)S(z)|0\rangle_T = D(\alpha)S(z)T(\theta)|0\tilde{0}\rangle \tag{11}$$

式中 $D(\alpha)$、$S(z)$ 分别是普通的位移算符和压缩算符

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a), \qquad S(z) = \exp[(1/2)(z^* a^2 - z a^{+2})] \tag{12}$$

复参量 α 和 z 分别为 $\alpha = |\alpha|\exp(i\delta)$, $z = r\exp(i\eta)$。

3 在热压缩态中测量相位算符的涨落

利用(8)式，在热相干态$|\alpha\rangle_T$ 中测量相位算符的平均值为

$$\langle\cos_M \phi\rangle_{\alpha T} = |\alpha|(0.5 + n_0 + |\alpha|^2)^{-1/2}\cos\delta$$
$$\langle\sin_M \phi\rangle_{\alpha T} = |\alpha|(0.5 + n_0 + |\alpha|^2)^{-1/2}\sin\delta \tag{13}$$

在$|\alpha\rangle_T$ 中测量相位算符的涨落为

$$\langle\Delta\cos_M \phi^2\rangle_{\alpha T} = \langle\Delta\sin_M \phi^2\rangle_{\alpha T} = (0.5 + n_0)/(1 + 2n_0 + 2|\alpha|^2) \tag{14}$$

在热压缩态$|\alpha, z\rangle_{ST}$ 中，光子数的平均值 $\bar{n}$ 为

$$\bar{n} = |\alpha|^2 + \sinh^2 r + n_0\cosh 2r \tag{15}$$

所以测量相位算符的平均值为

$$\langle\cos_M \phi\rangle_{ST} = |\alpha|(0.5 + |\alpha|^2 + \sinh^2 r + n_0\cosh 2r)^{-1/2}\cos\delta$$
$$\langle\sin_M \phi\rangle_{ST} = |\alpha|(0.5 + |\alpha|^2 + \sinh^2 r + n_0\cosh 2r)^{-1/2}\sin\delta \tag{16}$$

相应地，在$|\alpha, z\rangle_{ST}$ 态中测量相位算符的涨落就是

$$\langle\Delta\cos_M \phi^2\rangle_{ST} = \frac{(0.5 + n_0)(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\eta)}{1 + 2(|\alpha|^2 + \sinh^2 r + n_0\cosh 2r)}$$

$$\langle(\Delta \sin_M \phi)^2\rangle_{ST} = \frac{(0.5 + n_0)(\cosh 2r + \sinh 2r \cos \eta)}{1 + 2(|\alpha|^2 + \sinh^2 r + n_0 \cosh 2r)} \tag{17}$$

$\cos_M \phi$的涨落与温度的关系, 如图1所示, 其中$|\alpha|^2 = 1$, $\eta = 0$, $r = 0.1$和0.5。在热压缩态中$\cos_M \phi$及$\sin_M \phi$的涨落都是随温度升高而增大, 但在同一温度下, 增大r可以使测量相位算符的一个分量的涨落减少(同时另一个分量的涨落增大)。由(17)式也可以考虑几种极限情况。在热真空态中, ($|\alpha|^2 = 0$, $r = 0$), $\cos_M \phi$和$\sin_M \phi$的涨落都为1/2, 与温度无关。在热相干态中($r = 0$), 它们的涨落都为$(0.5 + n_0)/(1 + 2|\alpha|^2 + 2n_0)$, 且随温度升高而增大, 并且$|\alpha|^2$越大, 测量相位算符的涨落与温度的关系越强。按照 Gerhardt 等人的处理方法, 还可以定义相位涨落的量$(\Delta\Phi)^2$, 它是正弦算符和余弦算符的方差之和[2]。在测量相位算符算符中$\langle(\Delta\Phi_M)^2\rangle$为

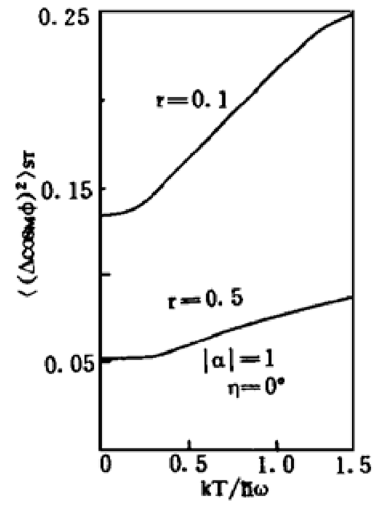

Fig. 1 Fluctuations of MPO, $\cos_M \phi$, against temperature for $|\alpha, z\rangle_{ST}$ with $|\alpha| = 1$, $\eta = 0°$, $r = 0.1$ and 0.5

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\Phi_M)^2\rangle_{ST} &\equiv \langle(\Delta \cos_M \phi)^2\rangle_{ST} + \langle(\Delta \sin_M \phi)^2\rangle_{ST} \\ &= \langle\cos_M \phi\rangle^2_{ST} + \langle\sin_M \phi\rangle^2_{ST} \\ &= \left[1 + \frac{|\alpha|^2}{(0.5 + n_0)\cosh 2r}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{18}$$

这一结果表明$\langle(\Delta\Phi_m)^2\rangle_{ST}$与压缩方位角$\eta$无关, 并且随温度升高($n_0$增大)而增大。$r$增大时也使$\langle(\Delta\Phi_M)^2\rangle_{ST}$增加。但是$\langle(\Delta\Phi_M)^2\rangle_{ST}$的值不会超过1。$|\alpha|^2$的增大可以使$\langle(\Delta\Phi_M)^2\rangle$减小。

4　热压缩态中测量相位算符的压缩

由量子力学中的测不准原理可知, 两个不可对易的量A和B的相对涨落是不能任意的, 测不准量受到A和B的基础量子力学涨落的限制。这基础量子力学涨落由$(1/2)|\langle[A, B]\rangle_\psi|$给出。按照 Wodkiewicz 的观点[7], 如果A(或B)在某个量子力学态$|\Psi\rangle$中的涨落小于其在该态中的基础量子力学涨落, 那么对A(或B)来说, 态$|\Psi\rangle$是压缩的, 或者称在态$|\Psi\rangle$中量A(或B)的涨落被压缩了。在这里, 判断压缩的准则是基础量子力学涨落。对光场振幅的两个正则共轭分量x_1和x_2来说, 这样的压缩定义是早已熟知的。由于x_1、x_2的基础量子力学涨落为1/4, 恰等于它们在相干态中的涨落, 因此而有振幅压缩的第二个常见的定义, 即振幅分量的涨落小于它在相干态中的涨落。对x_1和x_2而言, 这两个定义是等价的, 但第一个定义则更本质, 更带有普遍性, 因为它不仅适用于光场的振幅, 也可用于其他量的压缩, 例如原子偶极矩的压缩。本文讨论基础量子力学涨落的压缩时也将采用第一定义。

在由第一个定义得出的A的压缩条件$\langle(\Delta A)^2\rangle_\psi < (1/2)|\langle[A, B]\rangle_\psi|$中必须注意二点: 1) 不等号两边的量是在同一个态中计算平均值。基础量子力学涨落是一个与态有关的量, 因此A在态$|\Psi\rangle$中的涨落应该与其在同一个态中(而不一定是相干态)的基础量子力学涨落作比较来判断A的压缩; 2) 量A在$|\Psi\rangle$态中的基础量子力学涨落并不是唯一的, 因为它涉及到的一对量。A在与B一起考虑时A的基础量子力学涨落为$(1/2)|\langle[A, B]\rangle_\psi|$。如果存在另一个与$A$不对易的量$C$, 那么, 当$A$与$C$一起考虑时, A的基础量子力学涨落就是$(1/2)|\langle[A, C]\rangle_\psi|$。由此, A的压缩条件也将改为$\langle(\Delta A)\rangle_\psi < (1/2)|\langle[A, C]\rangle_\psi|$。所以为了使压缩有确切的含义, 当量$A$被压缩时, 不仅要说明在什么态中, 还必须说明在实验中与A一起考虑的另一个量是什么。本文讨论测量相位算符的一个分量$\cos_M \phi$在热压缩态中的压缩情况。所涉及

的态是$|\alpha, z\rangle_{ST}$，与$\cos_M\Phi$一起考虑的另一个量可以是测量相位算符的另一个分量$\sin_M\Phi$，也可以是光子数N。因此，将引出两种压缩情况。如果实验中涉及到的是$\cos_M\Phi$和$\sin_M\Phi$这一对非对易量，那么在$|\alpha, z\rangle_{ST}$中的基础量子力学涨落(记为F_{CS})为$1/(4\bar{n}+2)$。$\cos_M\Phi$的压缩条件即为

$$\langle\langle(\Delta\cos_M\Phi)^2\rangle\rangle_{ST} < 1/(4\bar{n}+2) \tag{19}$$

又因为

$$\langle\langle(\Delta\cos_M\Phi)^2\rangle\rangle_{ST} = \langle\langle(\Delta x_1)^2\rangle\rangle_{ST}/(0.5+\bar{n}) \tag{20}$$

因此，可以得出结论：考虑x_1和x_2时，若x_1能发生压缩，那么考虑$\cos_M\Phi$和$\sin_M\Phi$时，$\cos_M\Phi$也一定发生压缩，反之亦然。同样，x_2如果被压缩，则$\sin_M\Phi$也将发生压缩。

在$|\alpha, z\rangle_{ST}$态中，$\cos_M\Phi$压缩条件可具体写为

$$(0.5+n_0)\lambda_c < 1/2, \qquad \lambda_c \equiv \cosh 2r - \sinh 2r\cos\eta \tag{21}$$

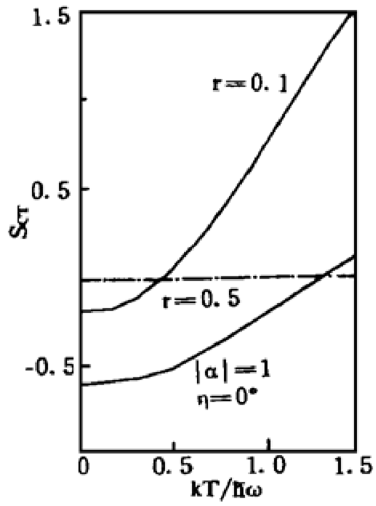

Fig. 2 Squeezing parameter of $\cos_M\Phi$ for $|\alpha, z\rangle_{ST}$, S_{CT}, against temperature, which is assciated with two non-commuting observables $\cos_M\Phi$ and $\sin_M\Phi$, where $|\alpha| = 1$, $\eta = 0°$, $r = 0.1$ and 0.5

通常，引入参量S_{CT}来度量热压缩态中$\cos_M\Phi$的压缩，$S_{CT} = [\langle\langle(\Delta\cos_M\Phi)^2\rangle\rangle_{ST} - F_{CS}]/F_{CS}$。压缩条件就可写为$S_{CT} < 0$。$S_{CT}$与温度的关系，如图2所示。$\cos_M\Phi$的涨落随温度升高而增大，当温度高于某个临界温度$T_C$时，$|\alpha, z\rangle_{ST}$态中$\cos_M\Phi$就不再发生压缩。$T_C$与$\lambda_C$有下列关系

$$(k/h\omega)T_c = \{\ln[(1+\lambda_c)/(1-\lambda_c)]\}^{-1} \tag{22}$$

其中要求$\lambda_c < 1$，即$\cos\eta > \tanh r$，这就是x_1的压缩条件。当x_1不发生压缩，即$\lambda_c \geqslant 1$，T_c就不存在，这时在任何温度下$\cos_M\Phi$都不压缩，与前面结论一致。T_c与η、r的关系如图3所示。

如果考虑的是$\cos_M\Phi$和N这一对量，则由(6)式可知基础量子力学涨落记为(F_{CN})为$(1/2)|\langle\langle\sin_M\Phi\rangle\rangle_{ST}|$。这时，$\cos_M\Phi$的压缩条件是

$$(0.5+n_0)(0.5+\bar{n})^{-1/2}\lambda_c < |\alpha||\sin\delta| \tag{23}$$

式中$\bar{n}$由(5)式给出。发生压缩的临界温度T_c为

$$\frac{k}{\omega h}T_c = \left[\ln\frac{D+1}{D-1}\right]^{-1},$$

$$D \equiv \mu_c^2\cosh 2r + \mu_c\sqrt{4|\alpha|^2 + \mu_c^2\cosh^2 2r} \tag{24}$$

式中$\mu_c \equiv |\alpha||\sin\delta|/\lambda_c$。这里要求$D > 1$。如果$D \leqslant 1$，则$T_c$不存在，说明这时任何温度下$\cos_M\Phi$不会被压缩。也可以定义一个参量$Q_{CT} = [\langle\langle(\Delta\cos_M\Phi)^2\rangle\rangle_{ST} - F_{CN}]/F_{CN}$来度量$\cos_M\Phi$的压缩情况。这样，$\cos_M\Phi$的压缩条件(23)式就是$Q_{CT} < 0$。$Q_{CT}$与温度的关系如图4所示。

总之，本文利用热场动力学理论讨论了热压缩态中测量相位算符的涨落。这涨落不仅与压缩参数有关，而且随温度升高而增加。讨论了热压缩态中两种基础量子力学涨落，与之相对应，$\cos_M\Phi$存在两种压缩。当温度高于临界温度时，无论在什么样的压缩参数下，压缩不再发生。在这里，虽然只讨论了一个分量$\cos_M\Phi$的情况，同样也可以讨论另一个分量$\sin_M\Phi$。热场动力学理论也可以用于研究其他热化态中的相位算符。

参 考 文 献

[1] S. M. Barnett, D. T. Pegg, Phase in quantum optics. *J. Phys.* (*A*), *Math. Gen.*, 1986, **19**(18): 3849~3861

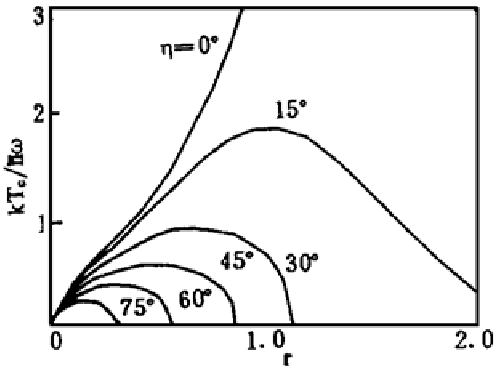

Fig. 3 Critical temperature T_c of squeezing for $\cos_M \Phi$ (asociated with $\sin_M \Phi$). Two non-commuting operators are $\cos_M \Phi$ and $\sin_M \Phi$

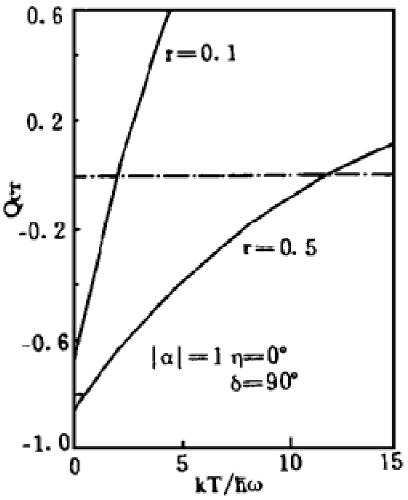

Fig. 4 Squeezing parameter of $\cos_M \Phi$ for $|\alpha, z\rangle_{ST}$, Q_{CT}, against temperature in the case of $|\alpha| = 1$, $\eta = 0°$, $r = 0.1$ and 0.5. Two non-commuting operators are $\cos_M \Phi$ and N

[2] Robert Lynch, Phase fluctuations in a squeezed state using measured phase operators. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1987, **4**(10): 1723~1726

[3] Hsi-Ten Tu, Chang-De Gong, Properties of the measured phase opertors in the squeezed number states. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**(1): 57~72

[4] H. Umezawa, Y. Yamanaka, Micro, macro and thermal concepts in quantum field theory. *Adv. Phys.*, 1988, **37**(5): 531~557

[5] J. Oz-Vogt, A. Mann, M. Revzen, Thermal coherent states and thermal squeezed states. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(12): 2339~2347

[6] H. Fearn, M. J. Collett, Representations of Squeezed states with thermal noise. *J. Mode. Opt.*, 1988, **35**(3): 553~564

[7] K. Wodkiewwicz, On the quantum mechanics of squeezed states. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7): 941~948

Fluctuations of Measured Phase Operators in Thermal Squeezed States

Dong Chuanhua
(*Department of Physics, Shanghai University, Shanghai* 200072)

(Received 23 August 1996)

Abstract The fluctuations of the measured phase operators in the thermal squeezed states are calculated with the aid of thermo field dynamics. Two kinds of fundamental quantum-mechanical fluctuation are introduced, one is associated with two quadrature components of measured phase, an other is associated with one quadrature component of measured phase and photon number. From these, we investigate two kinds of squeezing of fluctuations for measured phase in thermal squeezed states and their relations to temperature.

Key words measured phase operators, thermal squeezed states.