

分数傅里叶变换光学实现的基本单元*

华建文 刘立人 李国强

(中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学研究室, 上海 201800)

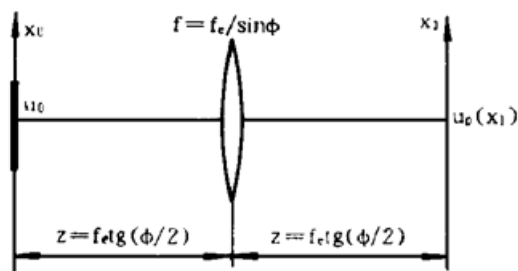
摘 要 提出一些实现分数傅里叶变换的新型的基本光学单元。这些基本单元仅使用一个透镜和一个菲涅耳衍射, 给光学设计增加一些新的可选基本类型。对于给定焦距的透镜, 它能完成的分数傅里叶变换是 Lohmann 给出的单透镜结构无法实现的。

关键词 傅里叶, 光学变换。

分数傅里叶变换是光学信息处理中的一个新的分支。它的数学定义是由 Namias 给出的^[1]。1993 年 Lohmann 完成了它的光学实现^[2]。不少应用可在文献[3~ 12]中找到。在以往的单透镜傅里叶光学实现装置中, 变换的输入及输出平面都是对称地分布在透镜两旁。也即必须使用两个菲涅耳衍射和一个透镜, 其结构为“菲涅耳衍射-透镜-菲涅耳衍射”的单一模式(见图 1)。只有一种模式在很多场合往往是不够用的。本文提出并研究一些新型的模式来实现分数傅里叶变换。它仅使用一个透镜和一个菲涅耳衍射。这种结构可以是“透镜-菲涅耳衍射”或“菲涅耳衍射-透镜”模式。它们是一些基本的单元, 因为其它的光学实现装置可由它们构成, 并且它的结构已不能再简化, 菲涅耳衍射和透镜缺一不可。

1 分数傅里叶变换及单透镜光学实现的回顾

Lohmann 把分数傅里叶概念引入到信息光学中^[2]。他给出的分数傅里叶变换的定义为:



$$\begin{aligned} u_P(x_1) &= F^P[u_0(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \exp\left[\frac{j\pi x^2 + x_1^2}{\lambda f_e \operatorname{tg} \phi}\right] \exp\left[\frac{-j2\pi x x_1}{\lambda f_e \sin \phi}\right] dx \end{aligned} \quad (1)$$

Fig. 1 Previous setup with one single lens for performing optical fractional Fourier transform

其中 $u_0(x)$ 表示要变换的物体, $u_P(x_1)$ 表示它的分数傅里叶变换, 角度 ϕ 和分数 P 由等式 $\phi = P\pi/2$ 联系。从(1)式可见 $u_P(x_1)$ 不但与 ϕ 有关而且与 f_e 有关。

Lohmann 把 f_e 称为标准焦距。在分数傅里叶变换的级联系统中, 每一级的标准焦距必须相等。Lohmann 给出的、实现(1)式运算的光学装置如图 1 所示。在这种实现装置中, 标准焦距 $f_e = f \sin \phi$, f 为透镜的焦距。

* 国家自然科学基金资助课题。

2 分数傅里叶变换光学实现的基本单元

作者用图 2 所示的几种基本单元来实现分数傅里叶变换。图中 $u_0(x)$ 表示被变换物体, ϕ 和 f_e 表示要实现的分数傅里叶变换的参数。 f 表示透镜焦距, z 表示菲涅耳衍射距离。

2.1 “缩小物体-菲涅耳衍射-透镜”模式

先把待变换物体 $u_0(x)$ 缩小为 $u_0(x/\cos \phi)$ 。然后放到图 2(a) 中并以相干平行光照明。在物体后方距离 z 处放置一块焦距

$$f = f_e / \text{tg } \phi \quad (2)$$

的透镜, 并安排距离

$$z = f_e \sin (2\phi) / 2 \quad (3)$$

那么紧贴透镜后方的光场分布 $u_1(x_1)$ 可用物体的菲涅耳衍射乘上一个透镜因子来描述:

$$u_1(x_1) = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x/\cos \phi) \exp \left[\frac{j\pi(x-x_1)^2}{\lambda z} \right] dx \right\} \exp \left[\frac{-j\pi}{\mathcal{M}} x_1^2 \right] \quad (4)$$

$$\text{令} \quad x = x_0 \cos \phi, \quad (5)$$

将(2)、(3)和(5)式代入(4)式, 就有

$$u_1(x_1) = \cos \phi \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0) \exp \left[\frac{j\pi(x_0^2 + x_1^2)}{\mathcal{M} f_e \text{tg } \phi} \right] \exp \left[\frac{-j2\pi x_0 x_1}{\mathcal{M} f_e \sin \phi} \right] dx_0 \quad (6)$$

略去因子 $\cos \phi$ 是无要紧要的, 那么按照(1)式的定义, $u_1(x_1)$ 就是物体 $u_0(x)$ 的分数傅里叶变换。

2.2 “放大物体-透镜-菲涅耳衍射”模式

把物体 $u_0(x)$ 首先放大成 $u_0(x \cos \phi)$, 然后紧贴透镜并以单色平行光照明, 如图 2(b) 所示。安排距离

$$z = f_e \text{tg } \phi \quad (7)$$

透镜焦距采用

$$f = 2f_e / \sin (2\phi) \quad (8)$$

在 z 处的菲涅耳衍射场为:

$$u_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x \cos \phi) \exp \left[\frac{-j\pi}{\mathcal{M}} x^2 \right] \exp \left[\frac{j\pi(x-x_1)^2}{\lambda z} \right] dx \quad (9)$$

$$\text{令} \quad x = x_0 / \cos \phi \quad (10)$$

并把(7)、(8)和(10)式代入(9)式, 就有

$$u_1(x_1) = \frac{1}{\cos \phi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0) \exp \left[\frac{j\pi(x_0^2 + x_1^2)}{\mathcal{M} f_e \text{tg } \phi} \right] \exp \left[\frac{-j2\pi x_0 x_1}{\mathcal{M} f_e \sin \phi} \right] dx_0 \quad (11)$$

略去因子 $1/\cos \phi$ 后, (11)式同样是一个分数傅里叶变换。

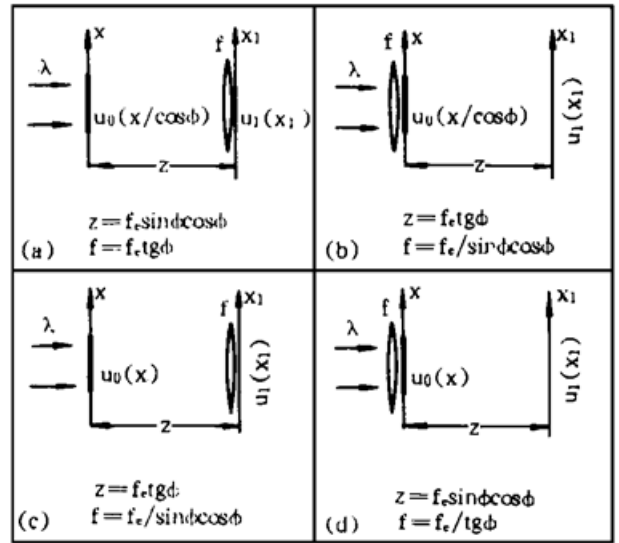


Fig. 2 Four basic units for performing optical FFT

2.3 “原物体-菲涅耳衍射-透镜”模式

上述两种方法需要预先把物体放大或缩小, 可得到与定义完全一致的分数傅里叶变换。如果不进行这种预处理, 将会得到一个放大或缩小的分数傅里叶变换。这对于光信息处理同样是有用的。在图 2(c) 中物体 $u_0(x)$ 是原有尺寸。安排距离

$$z = f_e \operatorname{tg} \phi, \quad (12)$$

采用焦距

$$f = 2f_e / \sin(2\phi) \quad (13)$$

的透镜, 在平面 x_1 上的菲涅耳衍射场为

$$u_1(x_1) = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \exp \left[\frac{j\pi(x-x_1)^2}{\lambda z} \right] dx \right\} \exp \left[\frac{-j\pi x_1^2}{\lambda f} \right] \quad (14)$$

$$\text{令} \quad x_1 = x_e / \cos \phi, \quad (15)$$

并把(12)、(13)及(15)式代入(14)式, 就得到

$$u_1(x_e / \cos \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \exp \left[\frac{j\pi(x^2 + x_e^2)}{\lambda f_e \operatorname{tg} \phi} \right] \exp \left[\frac{-j2\pi x x_e}{\lambda f_e \sin \phi} \right] dx \quad (16)$$

按照定义方程(1)式, $u_1(x_e / \cos \phi)$ 就是物体 $u_0(x)$ 的分数傅里叶变换。因此, $u_1(x_1)$ 就是物体 $u_0(x)$ 的分数傅里叶变换的放大, 其比例因子为 $1/\cos \phi$, 即

$$u_1(x_1) = u_F(x_1 \cos \phi) \quad (17)$$

2.4 “原物体-透镜-菲涅耳衍射”模式

如图 2(d) 所示, 物体还是原来尺寸。安排距离

$$z = f_e \sin(2\phi)/2 \quad (18)$$

和透镜焦距

$$f = f_e / \operatorname{tg} \phi \quad (19)$$

x_1 平面上的衍射场为

$$u_1(x_1) = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \exp \left[\frac{j\pi(x-x_1)^2}{\lambda z} \right] dx \right\} \exp \left[\frac{-j\pi x_1^2}{\lambda f} \right]. \quad (20)$$

$$\text{令} \quad x_1 = x_e \cos \phi, \quad (21)$$

并将(18)、(19)及(21)式代入(20)式, 就有

$$u_1(x_e \cos \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \exp \left[\frac{j\pi(x^2 + x_e^2)}{\lambda f_e \operatorname{tg} \phi} \right] \exp \left[\frac{-j2\pi x x_e}{\lambda f_e \sin \phi} \right] dx. \quad (22)$$

显然 $u_1(x_e \cos \phi)$ 是物体 $u_0(x)$ 的分数傅里叶变换。那么 $u_1(x_1)$ 就是物体 $u_0(x)$ 的分数傅里叶变换的缩小, 其比例因子为 $\cos \phi$, 即

$$u_1(x_1) = u_F(x_1 / \cos \phi) \quad (23)$$

3 实验与结论

对图 3(a) 所示的透明片作 ϕ 值为 $\pi/3$ 、 f_e 为 259.8 mm 的分数傅里叶变换, 用图 1 所示的光学系统对其进行分数傅里叶变换, 透镜的焦距为 300 mm, 用平行光照明, 波长为 632.8 nm, 得到的结果为图 3(b)。把透明片缩小 $\cos(\pi/3)$ 倍后放入图 2(a) 所示的光学系统, 把透

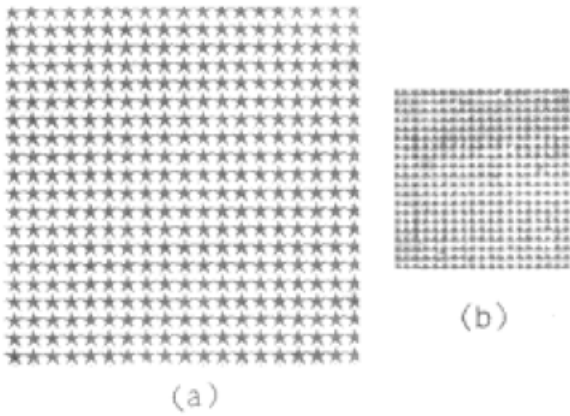


Fig. 3 The object and its FRT

(a) the object, (b) the result

明片放大 $1/\cos(\pi/3)$ 倍后放入图 2(b) 所示的光学系统以及把原图片放如图 2(c) 和图 2(d) 的光学系统, 对其进行同样参数的分数傅里叶变换, 得到的结果分别为图 4(a) 至图 4(d), 实验中使用的透镜焦距 f 以 (2)、(8)、(13) 和 (19) 式算出, 分别为 150 mm、600 mm、600 mm、及 150mm, 安排的距离 z 用 (3)、(7)、(12) 和 (18) 式算出, 分别为 112.5 mm、450 mm、450 mm 及 112.5 mm。从实验可见图 4(a)、图 4(b) 与图 3(b) 完全相同, 图

4(c) 及 4(d) 与图 3(b) 相比较, 仅是在尺度上有所不同, 一个扩大了 $1/\cos(\pi/3)$ 倍, 另一个缩小了 $\cos(\pi/3)$ 倍。这说明上述理论是正确的。

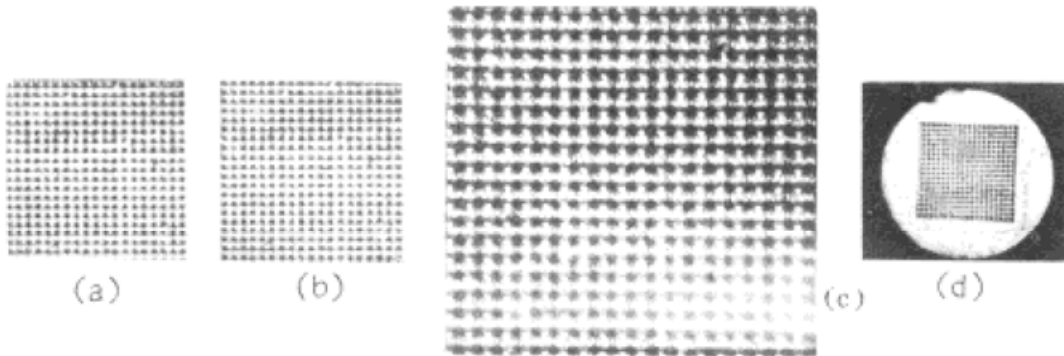


Fig. 4 The FRT performed by the four elements

本文给出的几种模式是一些新型的基本结构。与 Lohmann 给出的单透镜分数傅里叶变换装置(图 1)相比较, 其特点为: 1) 结构不对称, 对于完成具有同样参数 ϕ 及 f_e 的分数傅里叶变换, 其尺寸也不同于 Lohmann 的装置; 2) 对于同样的一个透镜, Lohmann 的装置能实现标准焦距为 $f \sin \phi$ 的分数傅里叶变换, 而本文的方法能实现标准焦距为 $f \operatorname{tg} \phi$ 或 $f \sin(2\phi/2)$ 的分数傅里叶变换。3) ‘原物体-菲涅耳衍射-透镜’和 ‘原物体-透镜-菲涅耳衍射’二种模式在实现分数傅里叶变换的同时还完成放大或缩小功能。这些特点在组织光学信息处理系统时是有用的。例如, 用本文提供的理论方法来构造 Lohmann 所给出的单透镜结构。用 ‘放大物体-透镜-菲涅耳衍射’模式紧跟 ‘原物体-菲涅耳衍射-透镜’模式, 采用同样焦距的透镜和一样大的 z , 这时从(7)、(8) 及 (12)、(13) 式可见它们所实现的 ϕ 和 f_e 相等。‘原物体-菲涅耳衍射-透镜’模式的输出是一个尺寸放大的分数傅里叶变换。其放大倍数为 $1/\cos \phi$ 。这正好是 ‘放大物体-透镜-菲涅耳衍射’模式的输入所需要的放大倍数。这就是说 ‘原物体-菲涅耳衍射-透镜’模式的输出可直接作为 ‘放大物体-透镜-菲涅耳衍射’模式的输入。这时由于它们的 ϕ 和 f_e 相等因而这种级联具有可加性。级联后所能完成的分数傅里叶变换的参数为 $2\phi, f_e$ 。还

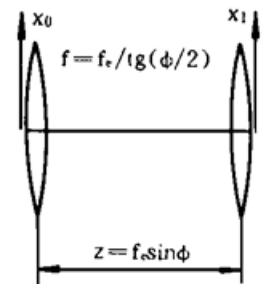


Fig. 5 Setup (type II) with two lenses given by Lohmann for performing a fractional Fourier transform

是不变。这样如果把紧靠着的、焦距为 f 的两个透镜用一个焦距为 $f/2$ 的透镜来代替, 就得到图 1 所示的系统, 相应地要把(13) 式中的 2ϕ 改写成 ϕ 、 $2f$ 改写成 f 、(12) 式中的 ϕ 改写成 $\phi/2$ 。同理, 如果用“原物体-透镜-菲涅耳衍射”模式的输出作为“缩小物体-菲涅耳衍射-透镜”模式的输入, 只要透镜焦距 f 和距离 z 相等, 它们也可以级联, 从而得到 Lohmann 的第二种方案即图 5 所示的双透镜结构。

参 考 文 献

- [1] V. Namias, The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Maths Applies*, 1980, **25**: 241~ 265
- [2] W. Lohmann, Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993, **10**(10): 2181~ 2186
- [3] D. Mendlovic, M. Ozaktas, Fractional Fourier transform and their optical implementation: I. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993, **10**(9): 1875~ 1881
- [4] M. Ozaktas, D. Mendlovic, Fractional Fourier transform and their optical implementation: II. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993, **10**(12): 2522~ 2531
- [5] G. Dorsch, Adolf W. Lohmann, Fractional Fourier transform used for a lens-design problem. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(20): 4111~ 4112
- [6] G. Dorsch, A. W. Lohmann, Y. Bitran *et al.*, Chirp filtering in the fractional Fourier domain. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(32): 7599~ 7602
- [7] M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*, Space-variant filtering in fractional Fourier domains. *Inst. Phys. Conf. Ser.*, 1994, 139, Part III 285~ 288
- [8] Mendlovic, H. M. Ozaktas, A. W. Lohmann, Graded index fibers, Wigner-distribution functions, and the fractional Fourier transform. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(30): 6188~ 6193
- [9] M. Ozktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*, Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(2): 547~ 559
- [10] W. Lohmann, D. Mendlovic, Fractional Fourier transform: photonic implementation. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(32): 7661~ 7664
- [11] L. M. Bernardo, O. D. D. Soares, Fractional Fourier transforms and imaging. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(10): 2622~ 2626
- [12] H. M. Ozaktas, David Mendlovic, Fractional Fourier transform as a tool for analyzing beam propagation and spherical mirror resonatos. *Opt. Lett.*, 1994, **19**(21): 1678~ 1680

Some Basic Fractional Fourier Transform Units

Hua Jianwen Liu Liren Li Guoqiang

(Information Optics Laboratory, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 9 May 1996; revised 28 August 1996)

Abstract Some novel basic optical units to produce fractional Fourier transforms are suggested, which are constructed by one Fresnel transform and one lens. It augments an alternation for the available models in optical designing. For a given lens, they can perform some fractional Fourier transforms that can not be implemented by Lohmann's setup composed of one lens.

Key words optical Fourier transform.