

脉冲在时域二次折射率介质中的传播

王中阳 张正泉 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 从空域与时域的相似性出发, 把克尔介质近似为时域二次折射率介质, 从而得到了脉冲在该介质中的解析形式, 并给出了相应的时域传输矩阵。

关键词 时域二次折射率介质, 传输矩阵。

脉冲在非线性光纤波导中传播, 克尔效应引起脉冲的自相位调制, 在负色散介质中, 与群速度色散产生的啁啾相互抵消, 能形成孤子传输; 在正色散介质中, 与群速度色散共同作用, 使脉冲进一步展宽。在理论上可用非线性薛定谔方程来完全描述, 但很难给出解析解^[1]。另一方面, Kolner 和 Dijaili 等人^[2, 3]发现线性色散波动方程与空域的傍轴波动方程有相似的形式, 并相应提出了时间透镜、时间成像的概念, 给出了色散 ABCD 矩阵。张筑虹等人还讨论了相应的时间衍射积分问题^[4]。由此, 推而广之, 空域光束在二次折射率介质中的传播, 在时域有相对应的形式。本文将克尔介质近似为时域二次折射率介质, 讨论脉冲在此种介质中的传播特性。

对于 $E(z, t) = E_0(z, t) \exp [i\omega t - \beta(\omega)z]$ 的平面波脉冲电场, 脉冲在克尔介质中的传播由非线性薛定谔方程描述^[1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta' \frac{\partial}{\partial \omega} - i \frac{\beta''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + i \frac{\beta_2}{2} |E_0|^2 \right) E_0(z, t) = 0, \quad (1)$$

另外, 假如有一表示为 $E(r, t) = U(x, y, z) \exp [i(\omega t - kz)]$ 的单色傍轴光束, 它在二次折射率介质

$$n^2(r) = n^2 \left(1 - \frac{n_2}{n} r^2 \right), \quad (2)$$

中传播, 则满足傍轴波动方程^[5]

$$\nabla_{\perp}^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - k k_2 r^2 \psi = 0, \quad (3)$$

其中 $k = 2\pi m/\lambda$, $k_2 = 2\pi n_2/\lambda$ 。最低阶解为类似于高斯光束的形式

$$U(x, y, z) \propto \exp [-ikr^2/2q(z)], \quad (4)$$

其中

$$q(z) = \frac{\cos(\sqrt{k_2/kz})q_0 + \sqrt{k/k_2} \sin(\sqrt{k_2/kz})}{-\sin(\sqrt{k_2/kz})\sqrt{k_2/k}q_0 + \cos(\sqrt{k_2/kz})}, \quad (5)$$

$$q_0 = i \frac{\pi W_0^2}{\lambda}. \quad (6)$$

光束通过此二次折射率介质同样可表示为 $ABCD$ 定律

$$q^2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (7)$$

重新考虑(1)式, 并对(1)式作下列变换

$$\tau = t - \beta'z = t - z/v_g, \quad (8)$$

$$\zeta = \omega_0 \beta'' z, \quad (9)$$

得

$$(\omega_0 \beta'' \frac{\partial}{\partial \zeta} - i \frac{\beta''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + i \frac{\beta_2}{2} |E_0|^2) E_0(\zeta, \tau) = 0, \quad (10)$$

然后对第三项强度相关的克尔效应项作近似(可看成为高斯型脉冲强度泰勒展开的一阶近似)

$$\beta_2 |E_0|^2 = \beta_2' - \beta_2^* \tau^2, \quad (11)$$

且令 $E_0(\zeta, \tau) = A(\zeta, \tau) \exp\{-i\beta_2' z/2\}$, 代入(10)式得

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + 2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial \zeta} + \frac{\beta_2^*}{\beta''} \tau^2 A = 0, \quad (12)$$

注意到下列参数的等效关系, 上式与(3)式是一致的。

$$\omega_0 \beta'' z = \zeta \leftrightarrow z$$

$$t - \beta' z = \tau \leftrightarrow x \text{ (or } y)$$

$$\omega_0 \leftrightarrow -k$$

$$\frac{-\beta_2^*}{\omega_0 \beta''} \leftrightarrow k_2$$

因而将满足(11)式近似的介质称为时域二次折射率介质, 即

$$n = n_0 + \frac{1}{2} n_2 |E_0|^2 \approx n_0' - \frac{1}{2} n_2^* \tau^2, \quad (13)$$

其中 $n_2 = (2\pi/\lambda_0)^{-1} \beta_2$, $n_0' = (2\pi/\lambda_0)^{-1} (\beta_2 + \beta_2'/2)$, $n_2^* = (2\pi/\lambda_0)^{-1} \beta_2^*$ 。

这样(12)式的最低阶解为高斯型时间包络脉冲

$$A(z, t) \propto \exp[i\omega_0 \tau^2 / 2p(\zeta)], \quad (14)$$

其中 p 为复高斯脉冲参量, 与光束复参量 q 等价。它给出了脉冲在介质中的脉宽 σ 及啁啾量 $S^{[3]}$

$$\frac{1}{p} = \frac{S}{\omega_0} + i \frac{1}{\omega_0 \sigma^2}, \quad (15)$$

脉冲在时域二次折射率中的传播由复参量随 ζ 的演化来描述

$$p(\zeta) = \frac{\cos(\alpha\zeta) p_0 + \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha\zeta)}{-\sin(\alpha\zeta) \alpha p_0 + \cos(\alpha\zeta)}, \quad (16)$$

其中 $\alpha = \sqrt{\beta_2^* / \omega_0^2 (-\beta'')}$, $\zeta = \omega_0 \beta'' z$, $p_0 = -i\omega_0 \sigma_0^2$ 。

考虑到

$$\alpha\zeta = \sqrt{\beta_2^*/\omega_0^2(-\beta'')} \omega_0\beta''z = \begin{cases} -\sqrt{\beta_2^*|\beta''|}z, & \beta'' < 0, \\ i\sqrt{\beta_2^*|\beta''|}z, & \beta'' > 0, \end{cases}$$

定义脉冲在时域二次折射率介质中传播的特征长度

$$L_n = 1/\sqrt{\beta_2^*|\beta''|}, \quad (17)$$

由(11)、(13)式可知, 此处定义的特征长度, 与在克尔介质中定义的非线性特征长度($L_n' = \sqrt{cL_\omega/2\omega_0|\Delta n|}$, $L_\omega = \sigma_0^2/\beta''$, $\Delta n = \frac{1}{2}n_2|E_0|^2$)是一致的。因而脉冲在时域二次折射率介质中的演化, 在一定程度上能阐明它在克尔介质中的行为。

由(15)、(16)和(17)式, 可求得脉冲在介质中的啁啾 S 与脉宽 σ 分别为

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_0^2} \frac{L_\omega}{L_n} \frac{\sin(2z/L_n)(L_\omega^2/L_n^2 - 1)}{\cos^2(z/L_n)L_\omega^2/L_n^2 + \sin^2(z/L_n)}, & \beta'' < 0, \\ \frac{1}{2\sigma_0^2} \frac{L_\omega}{L_n} \frac{\sinh(2z/L_n)(L_\omega^2/L_n^2 + 1)}{\cosh^2(z/L_n)L_\omega^2/L_n^2 + \sinh^2(z/L_n)}, & \beta'' > 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sigma_0^2[\cos^2(z/L_n) + (L_n^2/L_\omega^2)\sin^2(z/L_n)], & \beta'' < 0, \\ \sigma_0^2[\cosh^2(z/L_n) + (L_n^2/L_\omega^2)\sinh^2(z/L_n)], & \beta'' > 0, \end{cases} \quad (19)$$

其中 $L_\omega = \sigma_0^2/\beta''$ 为脉冲在色散介质中传播的特征长度。

另外, 若初始脉冲振幅为 E_0 , 在介质中传播 z 距离后, 其复振幅为

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha p_0 \cos(\alpha\zeta) + \sin(\alpha\zeta)}} = E_0 \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma}} \sqrt{\frac{L_n}{L_\omega}} \begin{cases} \exp(i\mathcal{Q}), & \beta'' < 0, \\ \exp(i\mathcal{Q}), & \beta'' > 0, \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1}[(L_\omega/L_n) \cot(z/L_n)]$, $\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1}[(L_\omega/L_n) \coth(z/L_n)]$ 。

脉冲在时域二次折射率介质中传播, 同样可用时间光线矩阵来表示

$$\begin{bmatrix} \tau_{\text{out}} \\ \frac{d\tau_{\text{out}}}{d\zeta_{\text{out}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{\text{in}} \\ \frac{d\tau_{\text{in}}}{d\zeta_{\text{in}}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha\zeta) & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha\zeta) \\ -\alpha \sin(\alpha\zeta) & \cos(\alpha\zeta) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\alpha = \sqrt{\beta_2^*/\omega_0^2(-\beta'')}, \quad \zeta = \omega_0\beta''z,$$

传播 z 距离后, 复时间参量同样由(3)式 $ABCD$ 定律给出。

注意到(18)、(19)式与空域光束在二次折率介质中束腰和波前有相同的形式, 因此脉冲在负色散时域二次折射率介质中传播, 类似于“时间成像”系统(图1(a)、(b))。当 $L_n < L_\omega$ 时, 二次折射率首先引入一正啁啾, 同时脉冲被压窄, 随着传播距离的增大, 群速度色散引起的负啁啾与正啁啾相互补偿, 在 $z = 1.57L_n$ 处完全抵消, 此时脉宽最短, 之后群速度色散又使脉宽增大, 如此循环往复; 当 $L_n = L_\omega$ 时, 正啁啾与负啁啾在传播的每一处都相互抵消, 脉冲宽度在传输中保持不变, 但此时脉冲形状不是 *sech* 型而是高斯型, 这与克尔介质中在相同条件下形成的孤子略有不同; 当 $L_n > L_\omega$ 时, 脉冲首先因群速度色散而展宽, 啁啾为负, 当负啁啾完全被二次折射率产生的正啁啾抵消时, 脉冲展宽至最大值, 之后二次折射率介质重新压窄脉冲至初始值。由此可见, 时域二次折射率使脉冲产生正啁啾的同时对脉冲压窄, 可

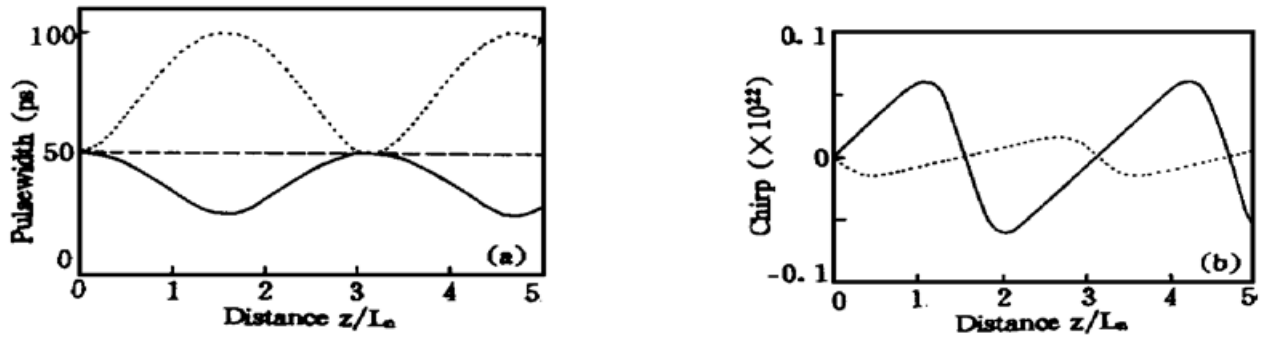


Fig. 1 Illustrate the evolution of the pulsewidth (a) and chirp (b) in anomalous dispersive time-quadratic index media with the different value: (i) $L_n = 0.5L_w$ (solid line) (ii) $L_n = L_w$ (dashed line), (iii) $L_n = 2L_w$ (dotted line), versus the propagating distance z/L_n . The initial $1/e$ pulsewidth is 50 ps

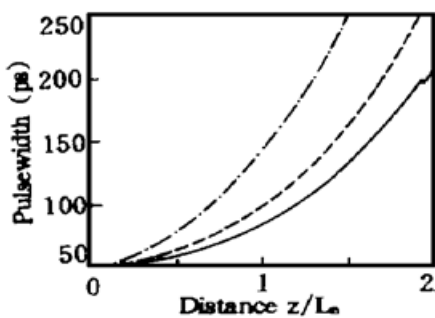


Fig. 2 Illustrate the evolution of the pulsewidth in normal dispersive time-quadratic index media versus the propagating distance z/L_n . The initial $1/e$ pulsewidth is 50 ps

视为“类时凸透镜”。在空域中，高斯光束聚焦使得光束空间频谱展宽。同样还认为，脉冲在时域二次折射率介质中的“时间成像”，使得时间频谱展宽，导致脉冲被压窄。其压缩量由 L_w/L_n 的比值决定。在通常的负色散光纤介质中， $L_n < L_w$ ，因此光纤的非线性折射率若能控制为二次型，则光纤在 1.57 个特征长度范围内对脉冲有压缩作用， L_n 越小（即二次折射率越大），压缩量越大。

脉冲在正色散时域二次折射率介质中传播，类似于空域的凹透镜成像，二次折射率引起的啁啾与群速度色散引起的啁啾共同作用，使脉冲宽度随着传播距离的增大而增大，并且 L_w/L_n 越小，展宽量越大（图 2）。

参 考 文 献

- [1] G. P. Agrawal, Nonlinear fiber optics. Boston, San Diego, California, Academic Press., Inc., 1989
- [2] B. H. Kolner, M. Nazarathy, Temporal imaging with a time lens. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(12) : 630~632
- [3] S. P. Djaili, A. Dienes, J. S. Smith, ABCD Matrices for dispersive pulse propagation. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, **QE-26**(6) : 1158~1164
- [4] 张筑虹, 范滇元, 光学系统的时间衍射积分及其应用. *光学学报*, 1992, **12**(2) : 179~182
- [5] A. Yariv, *Quantum Electronics*, Sec. ed., New York, John Wiley & Sons., Inc., 1975

Propagation of Optical Pulses in Time-Quadratic Index Media

Wang Zhongyang Zhang Zhengquan Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 19 July 1996)

Abstract From the analogy between pulses propagation in time and the paraxial optics, the nonlinear Kerr media is approached by a time-quadratic index media. The analytical form of the pulses propagation in this time-quadratic index media is obtained. The characteristic of the pulse in media is analyzed and the ABCD matrices for the temporal domain is given.

Key words time-quadratic index media, transport matrix.