

# 声光双稳系统的混沌同步

刘金刚<sup>1, 2</sup> 沈 柯<sup>2</sup> 周立伟<sup>1</sup>

1. 北京理工大学工程光学系, 北京 100081

2. 长春光学精密机械学院理学院, 长春 130022

**摘 要** 首先给出布拉格(Bragg)型声光双稳系统耦合驱动的混沌同步化方案, 用最大条件 Lyapunov 指数分析方法得出耦合驱动下系统混沌输出同步化条件, 发现通过适当比例的耦合驱动可以使两组混沌系统达到同步的混沌输出。分析表明此混沌同步化方案可以抵抗噪声的干扰, 并且在两系统出现偏差时仍可以实现混沌同步, 找到了实用的单变量延时微分系统非 Pecora-Carroll 规则的混沌同步化方案。最后做了实验验证。

**关键词** 混沌同步, 声光双稳系统, Lyapunov 指数, 混沌。

## 1 引 言

混沌同步化是近几年来令人感兴趣的研究课题, 对它的研究一方面可以帮助深入认识非线性动力学中混沌的机制和特性, 另一方面能够推动混沌同步化在实际应用领域的发展(特别是保密通讯中的可能应用<sup>[1]</sup>)。Pecora 和 Carroll 于 1990 年就提出了混沌同步化方案(现称为 P-C 同步法), 对洛仑兹(Lorenz)系统等经典模型作了数值验证, 并在电路实验中获得了混沌的同步输出<sup>[2-4]</sup>。此后, 这方面的其他一些研究报道相继出现<sup>[5-10]</sup>。其中, Roy 等实现了 YAG 激光系统在两路光泵浦下的混沌光互耦合同步输出<sup>[8]</sup>。由于激光系统的光发射机制在于受激辐射的光放大, 因此一个系统的不稳定“种子光”信息可能被两个激光系统同时进行光放大而在适当条件下导致同步的混沌光输出。同年, Sugawara 等实现了双 CO<sub>2</sub> 激光系统混沌同步<sup>[9]</sup>, 这是基于 P-C 规则实现的混沌同步。由 P-C 法实现混沌同步要求把动力系统分为二个子系统, 分别作为驱动系统和响应系统, 如果响应系统的所有响应变量对扰动都是不敏感的, 也即系统的所有条件 Lyapunov 指数皆为负时, 不论它们的初始状态是否相同只要保证它们处于同一吸引域, 则混沌同步就可以实现。

已经出现的混沌同步研究大多集中于经典力学系统, 实验报道中对电路混沌同步研究较多。光学中出现的 YAG 及 CO<sub>2</sub> 激光系统混沌同步, 结果由于装置结构庞大复杂而距应用还有段距离, 目前应用方面的研究才刚刚展开。另一方面, 光学双稳系统以其在光电子及信息科学等应用领域占有的特殊重要的地位已有较多研究结果, 它具有响应快、小型化易集成的优点, 如果能实现其混沌同步对加速混沌在光电子信息领域的应用将起到重要作用。但是, 对包括延时光学双稳系统在内的单变量延时非线性微分方程描述的系统, P-C 混沌同步化方

法无法直接使用, 必须研究新的同步方案。因此, 深入研究光学双稳系统混沌的同步将具有广泛的理论意义和应用价值。

本文对布拉格型声光双稳系统的混沌提出一种单向耦合驱动的方法来实现同步化, 由于延时系统相当于无穷维自治系统, 因此不宜使用条件 Lyapunov 指数作为可同步化判据, 本文给出了最大条件 Lyapunov 指数判定法及同步化实现与耦合强度的关系, 从离散模型和连续方程两方面讨论, 而且验证了噪声干扰下及两系统有一定的偏离时混沌同步的稳定性, 最后给出了定性的实验验证。目前, 此项研究国内外未见报道。

## 2 迭代模型及 Lyapunov 指数分析

布拉格声光双稳系统的动力学方程为<sup>[11]</sup>:

$$\tau_0 dx(t)/dt + x(t) = \pi\{A - \lambda \sin^2[x(t - \tau_d) - x_b]\} \quad (1)$$

式中  $x(t)$  为系统状态变量;  $\lambda$  与入射光强及放大器的放大倍数有关, 是决定系统运行状态的分叉参数;  $A, x_b$  分别为放大器和驱动源偏压;  $\tau_0, \tau_d$  为系统响应时间及延时时间。对于长延时情况, 在一定的参数条件下, 方程(1) 将给出混沌解。一般在长延时极限( $\tau_d \gg \tau_0$ ) 近似情况下, 用迭代形式分析比较方便, 其迭代式为:

$$x_{n+1}(t') = \pi\{A - \lambda \sin^2[x_n(t') - x_b]\} \quad (2)$$

其中  $0 \leq t' < \tau_d$ 。从方程(2) 可以看出, 这里无法进行子系统的分解来直接应用 P-C 方法实现混沌同步。下面构造这样的两个相同系统  $S_1$  和  $S_2$ , 使  $S_1$  的输出变量以一定的比例耦合到  $S_2$  中的延时项,  $S_1$  为驱动系统,  $S_2$  为响应系统, 总系统的动力学迭代方程为:

$$x_{1, n+1}(t') = \pi\{A - \lambda \sin^2[x_{1, n}(t') - x_b]\} \quad (3)$$

$$x_{2, n+1}(t') = \pi\{A - \lambda \sin^2[\frac{x_{2, n}(t') + Kx_{1, n}(t')}{K+1} - x_b]\} \quad (4)$$

其中  $K$  为耦合强度因子。当  $K = 0$  时, 相当于无耦合情况, 两系统将由于初值的不同而给出二条不同的轨道, 若参数值合适将是二条独立的混沌轨道; 当  $K \neq 0$  时, 对于方程(4) 无法求解无穷阶本征矩阵的本征值来获得所有条件 Lyapunov 指数的正负性信息。为此, 本文使用最大条件 Lyapunov 指数作为混沌同步化的判定依据, 将会看到, 这种方法不但有效而且方便。

把(4) 式的变分方程整理后求解最大条件 Lyapunov 指数, 可得响应系统的最大条件 Lyapunov 指数, 记为  $\lambda_{MCLE}$ :

$$\lambda_{MCLE} = \sup_{0 \leq t' < \tau_d} \left\{ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \log \left| \frac{\pi\lambda}{K+1} \sin \left[ 2 \frac{x_{2, n}(t') + Kx_{1, n}(t')}{K+1} - 2x_b \right] \right| \right\} \quad (5)$$

同时求解(3)、(4)、(5) 三式就可以得到系统的最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLE}$ , 其意义不同于标志轨道不同本征方向稳定程度的单个条件 Lyapunov 指数, 它标志  $x_2$  轨道沿  $x_1$  的总稳定程度, 由它的正负可以作为混沌能否同步的判据。

图 1 给出了  $A = 0.5, x_b = \pi/6$  时的分叉图及  $\lambda_{MLE}^*$  和  $\lambda_{MCLE}$  与分叉参数  $\lambda$  的关系曲线。a 为分叉图; b 为 Lyapunov 指数, 其中 1 是未加同步措施时系统的  $\lambda_{MLE}$ , 2 和 3 分别是耦合强度  $K = 0.3$  及  $0.5$  时的  $\lambda_{MCLE}$ 。由图可见,  $\lambda = 0.69$  处在  $K = 0.5$  的耦合驱动下最大条件 Lyapunov 指数为负, 因此混沌同步可以实现。图 2 给出图 1 条件下  $\lambda = 0.69$  时响应变量和驱动

\* 这里的  $\lambda_{MLE}$  是系统的最大 Lyapunov 指数, 可由(5) 式令  $K = 0$  得到, 它的正负标志系统是否处于混沌状态。

变量同步化之差(初值为  $x_{1,0} = 1.6, x_{2,0} = 0.1$ ), 可见在  $\lambda = 0.69$  处,  $K = 0.5$  时的确实现了混沌的同步化, 而  $K = 0.3$  时不同步。对图 1 中其它一些同时满足  $\lambda_{MLE} > 0$  和  $\lambda_{MCLE} < 0$  的位置计算响应变量和驱动变量之差, 都有与图 2 类似的结果。

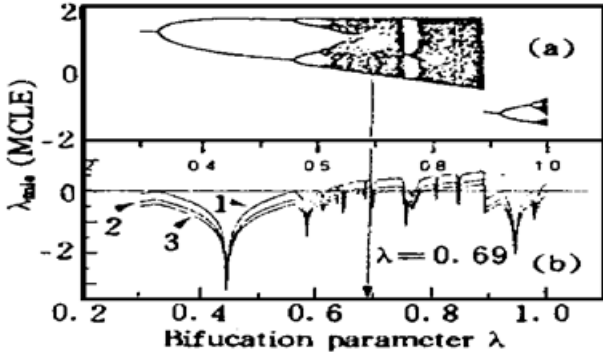


Fig. 1 Bifurcation diagram and Lyapunov exponents. (a) bifurcation diagram, (b) 1.  $\lambda_{MLE}$ , 2, 3.  $\lambda_{MCLE}$  for  $K = 0.3, 0.5$  respectively

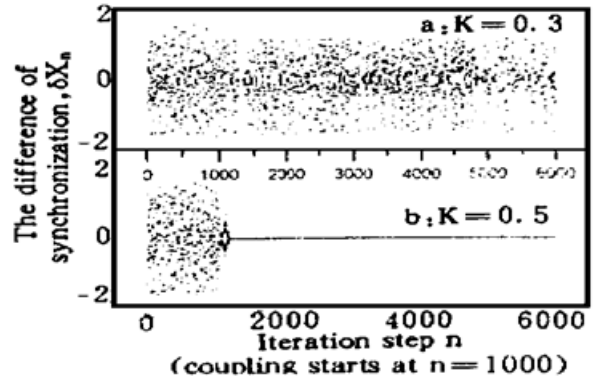


Fig. 2 Difference  $\delta x$  for synchronization. (a)  $\delta x$  for coupling stiffness  $K = 0.3$ , (b)  $\delta x$  for coupling stiffness  $K = 0.5$

为分析同步化可否实现与耦合强度有何关系, 作  $\lambda_{MCLE}$  与  $K$  的关系曲线, 示于图 3(a) (此时以  $\lambda = 0.69$  为例), 它与  $\lambda_{MCLE} = 0$  的交点就是可实现同步化的最小耦合强度  $K_{min}$ 。对所有分叉参数  $\lambda$  作一族这样的曲线, 就可以作出  $K_{min}$  与  $\lambda$  的关系曲线, 如图 3(b)。可见, 不同的分叉参数  $\lambda$  对应不同的  $K_{min}$  值, 但总体上是  $\lambda$  越大要求  $K_{min}$  越大, 其中在周期 3 窗口  $K_{min}$  降至 0,

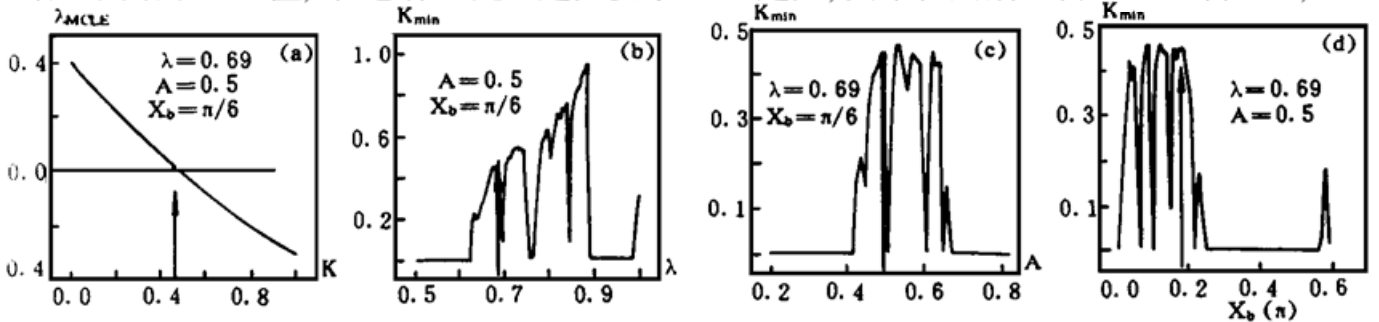


Fig. 3 The curves of minimum coupling stiffness vs  $\lambda, A, x_b$ . (a)  $\lambda_{MCLE} \sim K$ , (b)  $K_{min} \sim \lambda$ , (c)  $K_{min} \sim A$ , (d)  $K_{min} \sim x_b$

说明周期状态的同步不需要维持耦合(但需要耦合驱动的初始作用), 从图中还看出, 另一些  $K_{min}$  历经 0 的点对应着其它周期窗口。因此, 根据此曲线可以确定不同程度的混沌(由  $\lambda$  标志)实现同步所需的最小耦合强度。

为分析当  $A, x_b$  变化时是否有类似的关系, 作  $K_{min}$  与  $A, x_b$  的关系曲线, 示于图 3(c)、图 3(d) 中。由图可见, 当  $A$  或  $x_b$  不同时实现混沌同步化要求的最小耦合强度是不同的, 其中同样存在周期态不需维持耦合的周期窗口。图 4 给出  $K_{min}$  随  $A, \lambda$  变化的三维图, 可见, 同步化所需最小耦合强度不规则地依赖于参数。由图 4 可以确定特定参数下实现同步所需的最小耦合强度。

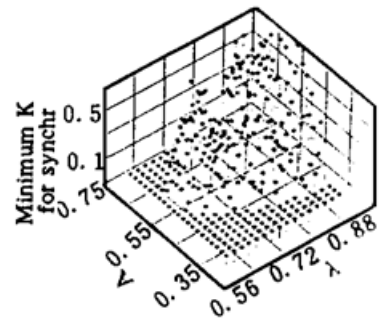


Fig. 4 The 3-D diagram of  $K_{min} \sim A, \lambda$

### 3 连续延时微分系统混沌同步及噪声影响

由布拉格声光双稳系统的动力学方程(1)出发直接进行耦合驱动有:

$$\tau_{01} \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t) = \pi\{A_1 - \lambda_1 \sin^2[x_1(t - \tau_{d1}) - x_{b1}]\} \tag{6}$$

$$\tau_{02} \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = \pi\{A_2 - \lambda_2 \sin^2[\frac{x_2(t - \tau_{d2}) + Kx_1(t - \tau_{d1})}{1 + K} - x_{b2}]\} \tag{7}$$

(6) 式相当于驱动系统, (7) 式相当于响应系统, (6) 式的状态不影响(7) 式即为单向耦合而非互耦合。设初始时刻无耦合并且两系统同为混沌运转。

当某一时刻引入耦合使  $K > 0$ , 则(6) 式的混沌轨道开始影响(7) 式的混沌特性, 即(7) 式的轨道向(6) 式靠近, 下面先数值地证明, 当  $K$  足够强时, (7) 式的轨道将最终落在(6) 式的混沌轨道上, 因此实现了二个混沌系统的同步输出。

设:  $\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_0 = 1 \mu s$ ,  $\tau_{d1} = \tau_{d2} = \tau_d = 10 \mu s$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0.69$ ,  $A_1 = A_2 = A = 0.5$ ,  $x_{b1} = x_{b2} = x_b = \pi/6$ , 即二者是完全相同的两个系统, 初值条件取为  $x_1^0(0) \sim x_1^0(\tau_d) = 1.6$ ;  $x_2^0(0) \sim x_2^0(\tau_d) = 0.1$ , 数值求解(6) 式、(7) 式, 取  $K = 0.5$ , 则二混沌系统的轨道将逐渐趋于相同, 如图 5 所示。这与上节的结论是一致的。在图 5 中, 耦合驱动在  $t = 0$  开始实施, 系统在  $150 \mu s$  后到达同步, 以后不再出现分离。

实际系统是不可避免地带有噪声, 而且制作所有参数严格相同的两套系统也不可能。因此, 实际中必须考虑噪声及两系统的偏差。令系统参数具有 5% 的相对偏离, 即  $(A_1 - A_2)/A = 5%$ ,  $(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda = 5%$ , 同时在方程(6) ~ (7) 式的状态变量上引入相对强度为 5% 的随机噪声, 以同样初始条件求解(6) 式、(7) 式, 仍然可以实现混沌的同步, 如图 6 为  $K = 0.6$  时的同步波形。由图 6 可见  $200 \mu s$  以后两系统进入了混沌同步, 本文计算到达  $t = 100 s$ , 仍然没有发现分离。在  $\delta x$  稳定下来以后, 求得  $\delta x$  的最大摆动幅度是未加同步措施时的 10% 以下, 说明这种同步在小噪声及系统偏差情况下是稳定的。因此, 以上的同步化方案可以在实际中应用。

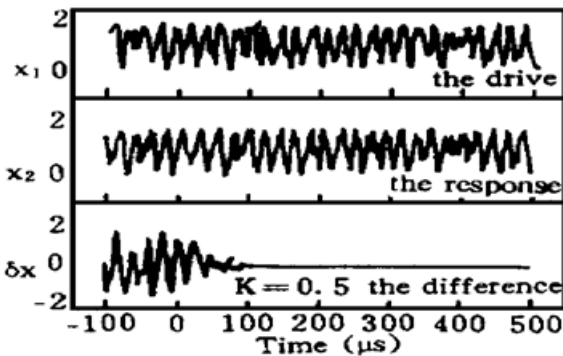


Fig. 5 Waveforms of synchronized chaos.  $K = 0.5$

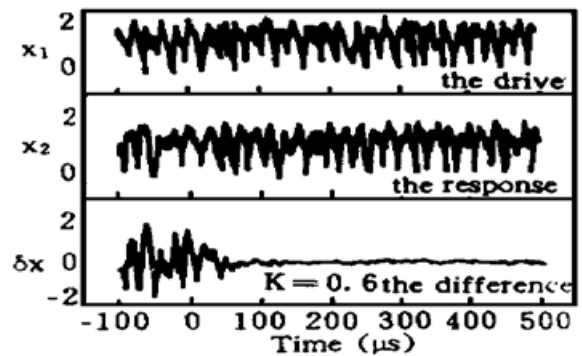


Fig. 6 Synchronized waveforms when the noise and deviation of systems are introduced 5% relatively,  $K = 0.6$

### 4 实验结果

为验证前面的理论分析, 作者建立一套实验装置。图 7 是实验装置原理图。

整个装置包括完全相同的驱动和响应系统及中间的同步装置, 驱动和响应系统是经典布拉格型声光双稳系统<sup>[11]</sup>, 将输出变量隔离取样后再按上述的同步原理耦合到响应系统, 开关 S 接通至响应系统一侧 b 时二系统将各自独立地工作, 把它们调整在相同参数状态的混沌区后, 只需闭合 S 到同步装置一侧 a 便可以进行混沌同步化实验研究。

为尽量减小噪声的干扰, 选择两组长 50 m, 电阻值为  $0.50 \Omega/\text{m}$  的同轴缆线来分别作为驱动和响应系统的延时线, 这样, 每个系统总的延时时间约为  $2.85 \mu\text{s}$ , 而系统响应时间小于  $0.5 \mu\text{s}$ , 因此可作为微分模型的近似(而非迭代模型的长延时极限近似)\*。

实验时, 调整放大器 10、12 倍数分别在 0.7 及 0.6 左右(相当于  $K = 0.7$ ) 开始出现同步化趋势, 继续增加放大器 10 的倍数为 0.8 左右并相应减小放大器 12 的倍数为 0.55 左右可出现稳定的混沌同步。图 8(a)、图 8(b) 给出 HP-54503 数字示波器记录的同步化前后的波形。图 8 中, 上面是二条同步化的波形曲线, 下面是二者之差, 所用刻度同为  $4 \text{ V}/\text{div}$ 。从图可见, 未加耦合驱动时二系统的混沌输出处于无关状态, 当耦合驱动启动后便处于同步的混沌输出状态。同步差值曲线因实际噪声及系统的偏差而有所起伏, 这里无法避免, 要进一步减小差值曲线的起伏(即提高同步化程度), 必须提高系统精度, 降低噪声。这在实际应用中是可以做到的。

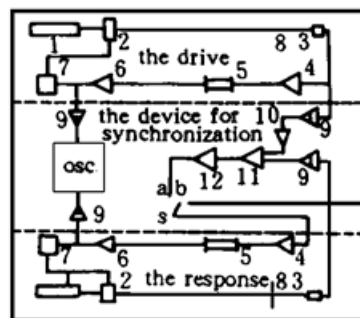


Fig. 7 Experimental setup. 1. He-Ne laser, 2. AOM, 3. detector, 4, 6, 10, 12. amplifier, 5. delay line, 7. supersonic drive source, 8. light diaphragm, 9. isolator, 11. adder, S. coupling-drive key, Osc. oscilloscope

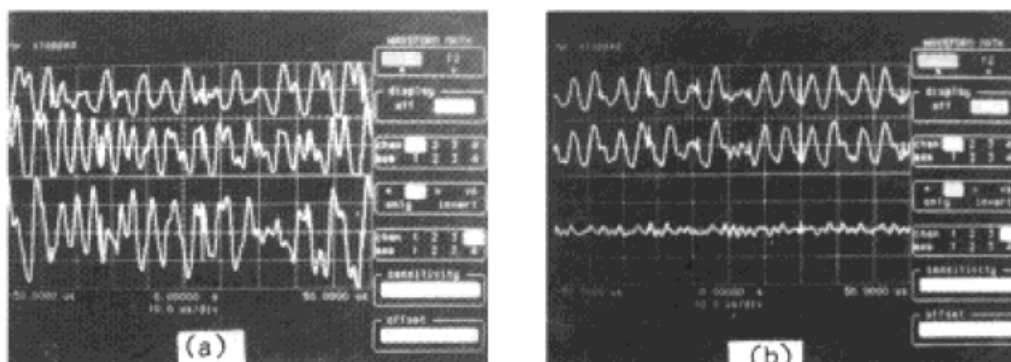


Fig. 8 Experimental results of chaos synchronization. where: a. before and b. after synchronizing

## 5 结论及讨论

从数值计算和实验上研究了声光双稳系统的混沌同步, 数值分析得出实现混沌同步化的条件, 验证了用最大条件 Lyapunov 指数作为可同步化判据的有效性, 给出同步化所需最小耦合强度与系统参数的关系。从声光双稳系统的数学模型出发展开讨论, 但此混沌同步方法对某些自治微分系统的混沌同步也适用, 有关这方面的研究将另文报道。

在进行 Lyapunov 指数分析时, 若用求解延时微分方程的办法也可以, 但将占用相当大的计算时间, 本文使用了长延时极限近似, 其迭代模型简单方便, 定性结果与解微分方程所得完全一致。一般说来, 长延时极限近似求得的 Lyapunov 指数要稍高些, 由此所得最小耦合强度  $K_{\min}$  比实际微分方程求出的稍大些。本文的混沌同步方案为光学双稳装置在光电子领域实现光学混沌同步的应用作了理论和实验探索。

\* 未使用单片机延时来做长延时极限近似的迭代模型情况的验证, 主要是考虑到这可能进一步引入附加噪声, 并且此情况也不适合于应用。

## 参 考 文 献

- [1] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**(1) : 65~ 68
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(4) : 2374~ 2383
- [3] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(8) : 821~ 824
- [4] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1991, **38**(4) : 453~ 456
- [5] Young Hun Yu, Keumcheol Kwak, Tong Kun Lim, Synchronization via small continuous feedback. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **191**(3) : 233~ 237
- [6] T. C. Newell, P. M. Alsing, A. Gavrielides *et al.*, Synchronization of chaotic diode resonators by occasional proportional feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(11) : 1647~ 1650
- [7] H. G. Winful, L. Rahman, Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(13) : 1575~ 1578
- [8] R. Roy, K. S. Thornburg, Experimental synchronization of chaotic laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(13) : 2009~ 2012
- [9] T. Sugawara, M. Tachikawa, T. Tsukamoto *et al.*, Observation of synchronization in laser chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(22) : 3502~ 3505
- [10] U. Parlitz, S. Ergezinger, Robust communication based on chaotic spreading sequences. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **188**(2) : 146~ 150
- [11] R. Vallee, C. Delisle, J. Chrostowski, Noise versus chaos in acousto-optic bistability. *Phys. Rev. (A)*, 1984, **30**(1) : 336~ 342

## Synchronization of Chaos in Acousto-Optic Bistable Systems

Liu Jingang<sup>1, 2</sup>    Shen Ke<sup>2</sup>    Zhou Liwei<sup>1</sup>

1. *Engineering Optics Department, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*  
 2. *Physics Department, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Changchun 130022*

(Received 10 June 1996; revised 20 September 1996)

**Abstract** The method of chaotic synchronization by coupling-drive is proposed for Bragg acousto-optic bistable systems, and the condition of chaotic synchronization in two systems is derived by the analysis of the maximum conditional Lyapunov exponent. It is found that the chaotic outputs of the two systems is synchronized if one system is coupling-driven appropriately by another. Numerical results show that this scheme of chaos synchronization resists noise and the synchronization can be realized even if the two systems are not identical. A practical method—non-Pecora-Carroll's scheme—of chaotic synchronization is given for delayed differential system with a single variable. Experimental result is presented.

**Key words** synchronization of chaos, acousto-optic bistable system, Lyapunov exponent, chaos.