

噪声之间的正负耦合对激光场的影响

汪 瑾 朱士群

(苏州大学物理系, 苏州 215006)

摘 要 从理论上对加性噪声和倍增噪声之间有耦合作用的一维激光模型进行了分析, 发现耦合的性质对激光场涨落影响较大。噪声之间的正耦合会延缓强度相关函数的衰减, 增强激光系统的统计涨落。噪声之间的负耦合能抑制激光系统的统计涨落, 提高激光场的相干性, 使激光系统由随机过程向确定过程过渡。

关键词 正耦合, 负耦合, 加性噪声, 倍增噪声, 涨落。

1 引 言

理论分析和实验测量表明, 既含有加性又含有倍增白噪声的单模激光系统具有较大的反常涨落行为。引起激光场涨落的噪声大致可以分为两类, 一类叫量子噪声或加性噪声, 它是由原子的自发跃迁引起的; 另一类叫泵浦噪声或倍增噪声, 它是由外界环境的扰动与激光系统的耦合引起的, 与激光泵浦源有关, 通常和光场以乘积的形式出现。在某些实际情形中, 加性噪声和倍增噪声往往同时出现。在以往的理论分析中^[1~6], 人们认为这两种噪声来自不同的噪声源, 并且作为相互独立的随机变量来处理。在某些情形中, 这两种噪声很可能来自共同的噪声源, 它们之间不是相互独立而是存在一定程度的耦合。

本文从理论上对加性噪声和倍增噪声之间有耦合作用的一维激光模型进行了分析, 求出了强度相关函数、强度相关时间和有效本征值, 分析了噪声之间的耦合作用对激光场涨落的影响。

这样的一维激光模型, 既可以用来描述在 He-Ne 激光场中选加上倍增噪声的激光系统^[1, 2], 也可以用来讨论白噪声近似下的染料激光场的统计性质^[3, 4], 因而具有一定的代表性。

2 理论推导

如果只考虑激光场的强度涨落, 加性噪声和倍增噪声之间存在耦合的一维激光场可用非线性郎之万方程表示为^[3, 4]:

$$\frac{dr}{dt} = a_0 r - A r^3 + \frac{P}{2r} + P(t)r + q(t) \quad (1)$$

式中 r 为激光场振幅, a_0 为泵浦参量, A 为自饱和系数, P 为加性噪声强度, $q(t)$ 和 $p(t)$ 分别为表示加性噪声和倍增噪声的随机变量。由复激光场 $E(= E_x + iE_y)$ 的运动方程推导对应的极坐标系 $[E = r \exp(i\Phi)]$ 中的福克-普朗克方程时, 对位相 Φ 进行积分, 就得到只和光场振幅 r 有关的方程。这时, 如果用一维模型来表示场振幅的运动方程, 就等效于在(1)式右边加上第三项 $P/2r^{13-61}$ 。这里, 随机噪声的统计性质可由它们的一次矩和二次矩表示为:

$$\begin{aligned} \langle \dot{q}(t) \rangle = \langle \dot{p}(t) \rangle = 0, \quad \langle \dot{q}(t) q(t') \rangle = P\delta(t-t'), \\ \langle \dot{P}(t) P(t') \rangle = P'\delta(t-t'), \quad \langle \dot{q}(t) P(t') \rangle = \lambda \sqrt{PP'}\delta(t-t'), \quad (-1 \leq \lambda \leq 1) \end{aligned} \quad (2)$$

式中变量均为实变量, 激光强度 $I = r^2$, P' 为倍增噪声强度, 参变量 λ 表征加性噪声与倍增噪声之间的耦合强度。当 λ 大于零时, 代表正耦合; 当 λ 小于零时, 代表负耦合; 当 λ 等于零时, 表示噪声之间统计独立, 没有耦合。

和激光场振幅的几率密度相对应的福克-普朗克方程为^[7, 81]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial r} \left[(a_0 r - Ar^3 + \frac{P}{2r} + \frac{\lambda}{2} \sqrt{PP'} + \frac{P'}{2} r) Q(r, t) \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2) Q(r, t) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

通过分离变量法, 方程(3)的通解可写成如下形式:

$$Q(r, t) = \frac{\sum_n C_n \psi_n(r) \sqrt{Q_s(r)} \exp(-\lambda_n t)}{(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2)/2} \quad (4)$$

式中系数 C_n 为由初始条件决定的常数, 本征值 $\lambda_n \geq 0$, $Q_s(r)$ 为激光振幅定态分布函数, 本征函数为 $\psi_n(r) / \sqrt{(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2)/2}$, 并且 $\psi_n(r)$ 满足方程

$$\frac{1}{2} (P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2) \frac{d^2 \psi_n(r)}{dr^2} + [\lambda_n - V(r)] \psi_n(r) = 0. \quad (5)$$

显然, (4)式具有量子力学中质量依赖于坐标的径向薛定谔方程的形式, $\psi_n(r)$ 为等效波函数, $V(r)$ 为等效势函数。不过, (4)式中的变量 r 是激光场振幅, 势函数 $V(r)$ 的形式为

$$\begin{aligned} V(r) = (a_0 - 3Ar^2 - \frac{P}{2r^2}) - \frac{(\lambda \sqrt{PP'} + P' r)^2}{2(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2)} \\ + (a_0 r - Ar^3 + \frac{P}{2r} - \frac{3}{2}\lambda \sqrt{PP'} - \frac{3}{2}P' r) \left[\frac{1}{2r} + \frac{\alpha(\lambda \sqrt{PP'} + P' r)}{P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2} - \frac{Ar}{P'} \right] \\ + \frac{2A\lambda \sqrt{PP'}}{(P')^2} - \frac{\beta \sqrt{PP'(1-\lambda^2)}}{2(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2)} \left| - \frac{1}{2} (P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2) \right. \\ \times \left[\left| - \frac{1}{2r^2} + \frac{\alpha P'}{P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2} - \frac{2\alpha(\lambda \sqrt{PP'} + P' r)^2}{(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2)^2} - \frac{A}{P'} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta \sqrt{PP'(1-\lambda^2)}(\lambda \sqrt{PP'} + P' r)}{(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2)^2} \right] + \left[\frac{1}{2r} + \frac{\alpha(\lambda \sqrt{PP'} + P' r)}{P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2} - \frac{Ar}{P'} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2A\lambda \sqrt{PP'}}{(P')^2} - \frac{\beta \sqrt{PP'(1-\lambda^2)}}{2(P + 2\lambda \sqrt{PP'} r + P' r^2)} \right]^2 \right], \quad (-1 \leq \lambda \leq 1) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{a_0}{P'} - \frac{AP(4\lambda^2 - 1)}{(P')^2} - 1; \quad \beta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \left[\frac{2a_0}{P'} - \frac{2AP(4\lambda^2 - 3)}{(P')^2} + 1 \right] \quad (7)$$

最低阶本征值 $\lambda_0 = 0$ 对应于定态解。这时，最低阶波函数 $\psi_0(r)$ 为

$$\psi_0(r) = [(P + 2\lambda \sqrt{PP'r + P'r^2})/2]^{1/2} Q_s(r) \quad (8)$$

式中 $Q_s(r)$ 与在方程(4)中的一样，它是定态激光振幅分布函数。令(3)式中 $\partial Q(r, t)/\partial t = 0$ 就可以求出 $Q_s(r)$ 的显函数形式：

$$Q_s(r) = Nr(P + 2\lambda \sqrt{PP'r + P'r^2})^\alpha \exp \left[-\frac{Ar^2}{P'} + \frac{4A\lambda \sqrt{PP'r}}{(P')^2} - \beta \operatorname{arctg} \left[\frac{\lambda + \sqrt{P'/Pr}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right] \right] \quad (9)$$

式中 N 为归一化常数， α 和 β 由(7)式确定。当 $\lambda = -1$ 时，定态分布函数 $Q_s(r)$ 在 $r = \sqrt{P/P'}$ 处趋向无穷大，这表明激光系统已经由随机过程过渡到确定过程。

由方程(4)中求出强度涨落的方差：

$$\mu(\tau) = \frac{\langle [\Delta I(\tau)]^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = \frac{1}{v_0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \exp(-\lambda_n \tau) \quad (10)$$

$$v_n = \left| \frac{\int_0^{\infty} dr r^2 \psi_0(r) \psi_n(r)}{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} (P + 2\lambda \sqrt{PP'r + P'r^2})} \right|^2 \quad (11)$$

归一化的强度相关函数为

$$C(\tau) = \mu(\tau) / \mu(0) \quad (12)$$

这里，在实验上可测量的物理量有两个，一个是强度相关时间 T_c ，其形式为：

$$T_c = \frac{\int_0^{\infty} d\tau \mu(\tau)}{\mu(0)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (v_n / \lambda_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} v_n} \quad (13)$$

另一个是有效本征值 λ_{eff} ，其形式为

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} v_n \lambda_n}{\sum_{n=1}^{\infty} v_n} \quad (14)$$

3 噪声间的耦合作用

为了看出噪声间的耦合对激光场的影响，可以将噪声间相互独立的激光模型与噪声间存在耦合的激光模型进行比较，参量选为 $A = 1, P = 2, P' = 1.78$ 和 3.28 。

耦合强度 λ 不同的归一化强度相关函数 $c(\tau)$ 随时间延迟 τ 变化的情况如图 1 所示。图中

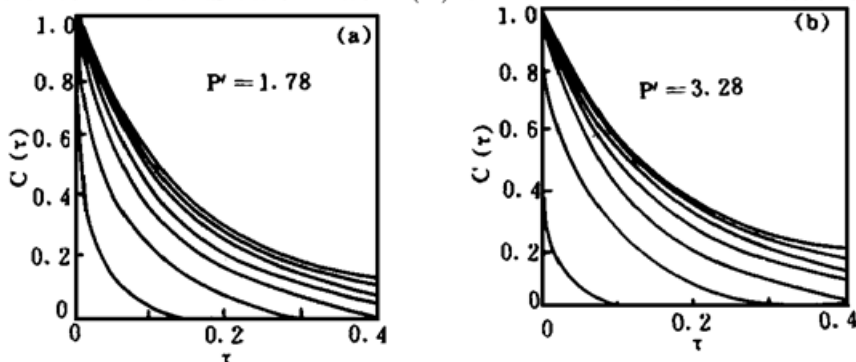


Fig. 1 The normalized laser intensity correlation function $c(\tau)$ of Eq. (12) as a function of delay time τ . (a) $P' = 1.78$, (b) $P' = 3.28$. From bottom to top: $\lambda = -0.9, -0.6, -0.3, 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$

曲线根据(12)式的理论预期值画出。由图 1 可见, $c(\tau)$ 随时间 τ 的增加而衰减。当耦合强度 λ 由 -1 向 $+1$ 变化时, 曲线 $c(\tau)$ 的值增大, 曲线之间的间距变小, $\lambda < 0$ 的曲线位于 $\lambda > 0$ 的曲线下方。由此可见, 噪声间的负耦合使 $c(\tau)$ 的值较快地趋近于零, 而噪声间的正耦合则减缓了 $c(\tau)$ 的衰减。

强度相关时间 T_c 随激光平均强度 $\langle I \rangle$ 变化的情况如图 2 所示。图中曲线相应于(13)式的理论预期值, 由图 2 可见, 当耦合强度 λ 由 -1 向 $+1$ 变化时, 曲线 T_c 的数值增大, 间距减小, $\lambda < 0$ 的曲线位于 $\lambda > 0$ 的曲线下方。显然, 噪声间的负耦合使 T_c 变小, 而噪声间的正耦合使 T_c 变大。

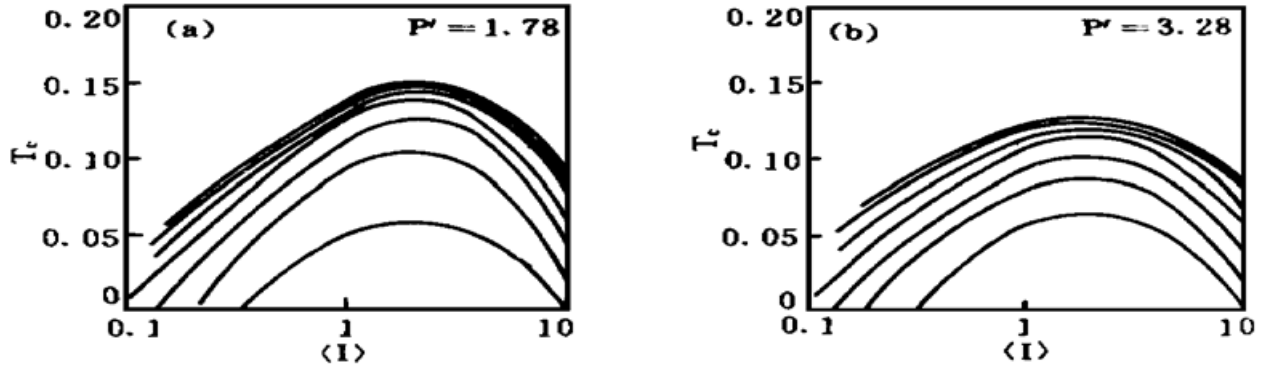


Fig. 2 The intensity correlation time T_c of Eq. (13) as a function of mean laser intensity $\langle I \rangle$. (a) $P' = 1.78$, (b) $P' = 3.28$. From bottom to top: $\lambda = -0.9, -0.6, -0.3, 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$

有效本征值 λ_{eff} 随激光平均强度 $\langle I \rangle$ 变化的情况如图 3 所示。图中曲线相应于(14)式的理论预期值。由图可见, 当耦合强度 λ 由 -1 向 $+1$ 变化时, 曲线 λ_{eff} 的数值和间距均减小, $\lambda < 0$ 的曲线位于 $\lambda > 0$ 的曲线上方。可见, 噪声间的负耦合使 λ_{eff} 变大, 而噪声间的正耦合使 λ_{eff} 变小。

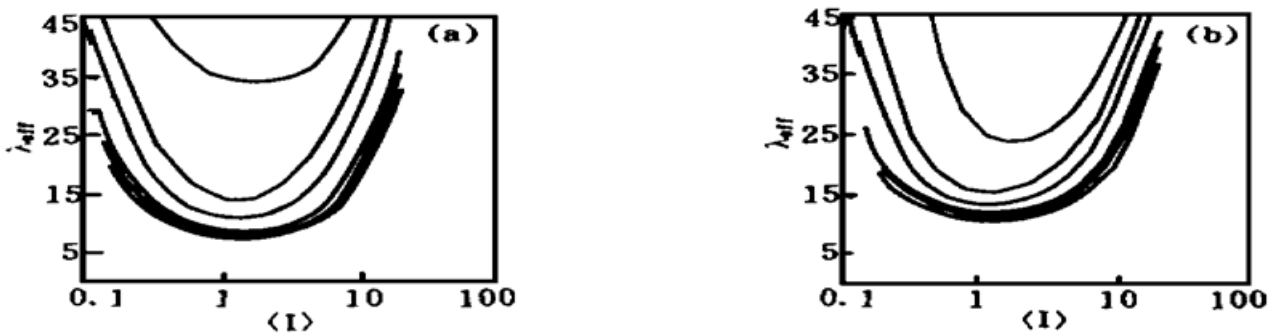


Fig. 3 The effective eigenvalue λ_{eff} of Eq. (14) as a function of mean laser intensity $\langle I \rangle$. (a) $P' = 1.78$, (b) $P' = 3.28$. From top to bottom: $\lambda = -0.9, -0.6, -0.3, 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$

综上所述, 噪声之间的正耦合会增大 $c(\tau)$ 和 T_c 的值, 减小 λ_{eff} 的值, 使激光场的涨落增强。噪声之间的负耦合会减小 $c(\tau)$ 和 T_c 的值, 增大 λ_{eff} 的值, 使激光场的涨落减小。同时, 当泵浦噪声增大时, 图 1、图 2 和图 3 中曲线的间距都减小。

结 论 当加性噪声和倍增噪声之间存在耦合时, 耦合的性质和大小对激光系统的涨落影响很大。噪声之间的正耦合会延缓强度相关函数的衰减率, 增强激光系统的统计涨落; 噪声之间的负耦合会加大强度相关函数的衰减率, 从而抑制激光系统的统计涨落, 最终使激光系统由随机过程过渡到确定过程。

参 考 文 献

- [1] M. R. Young, S. Singh, Statistical properties of a laser with multiplicative noise. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(11) : 21~ 23
- [2] M. R. Young, S. Singh, Effects of multiplicative white noise on laser light fluctuations. *Phys. Rev. (A)*, 1988, **A38**(1) : 238~ 244
- [3] Shiqun Zhu, Effects of Multiplicative white and colored noise in dye laser theory. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **A41**(3) : 1689~ 1694
- [4] Shiqun Zhu, White noise in dye-laser transients. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **A42**(9) : 5758~ 5761
- [5] R. F. Fox, R. Roy, Steady-state analysis of strongly colored multiplicative noise in a dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **A35**(4) : 1838~ 1842
- [6] Shiqun Zhu, Saturation effects in a laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **A45**(5) : 3210~ 3215
- [7] A. Fulinski, T. Telejko, On the effects of interference of additive and multiplicative noise. *Phys. Lett. (A)*, 1991, **A152**(1, 2) : 11~ 14
- [8] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Berlin, Springer-Verlag, 1984

Effects of Positive and Negative Coupling Between Noise Terms in a Laser Field

Wang Jin Zhu Shiqun

(School of Physics and Technology, Suzhou University, Suzhou, 215006)

(Received 1 July 1995; revised 25 December 1995)

Abstract The effect of positive and negative coupling between additive and multiplicative noise terms in a laser field is investigated. The fluctuations in the laser field is related to the property of coupling. The positive coupling between noise terms slows down the decay of intensity correlations, thus enhances the fluctuations in the laser system. While the negative coupling suppresses the fluctuations in the laser system and changes the system from stochastic process to deterministic process.

Key words positive coupling, negative coupling, additive noise, multiplicative noise, fluctuation.